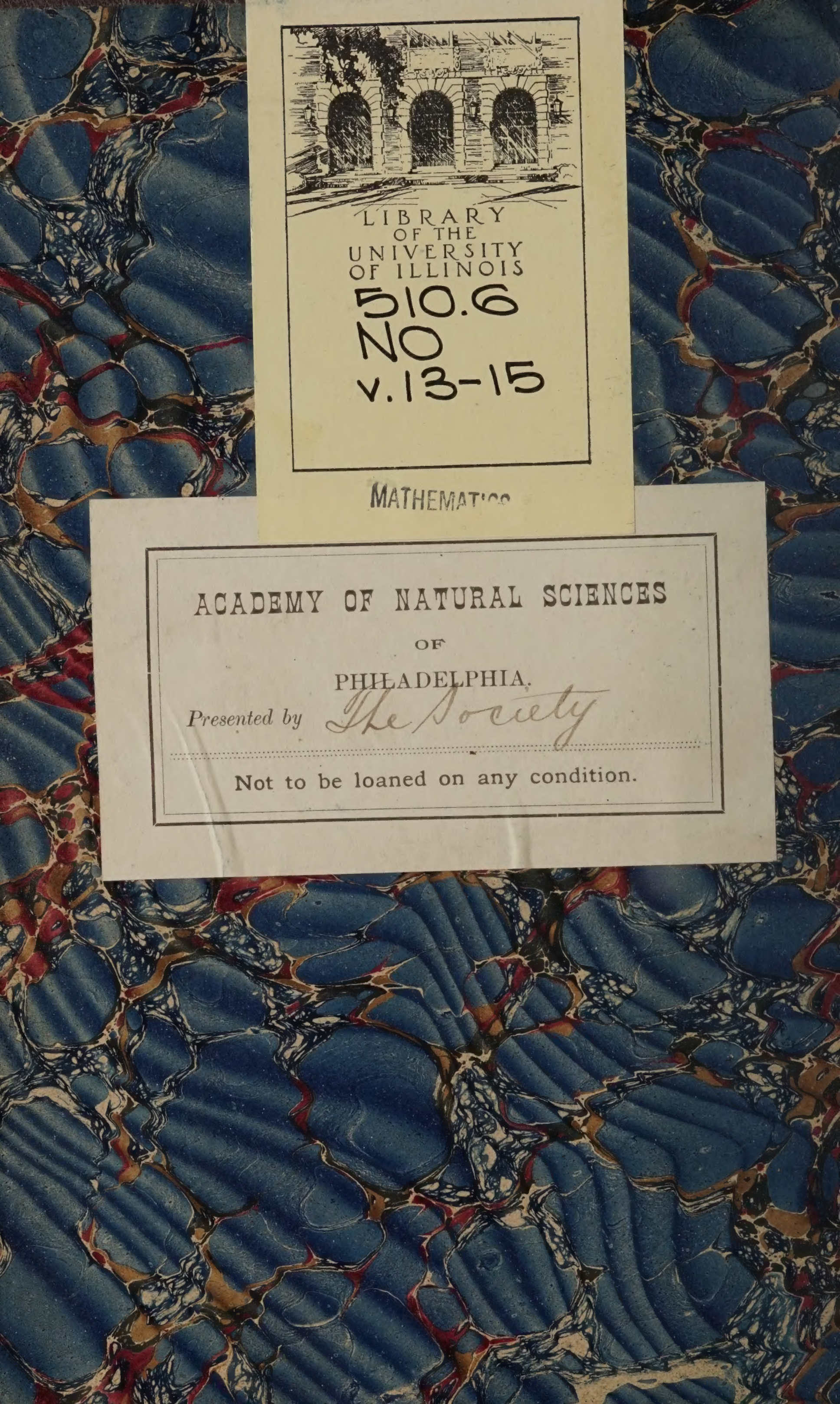
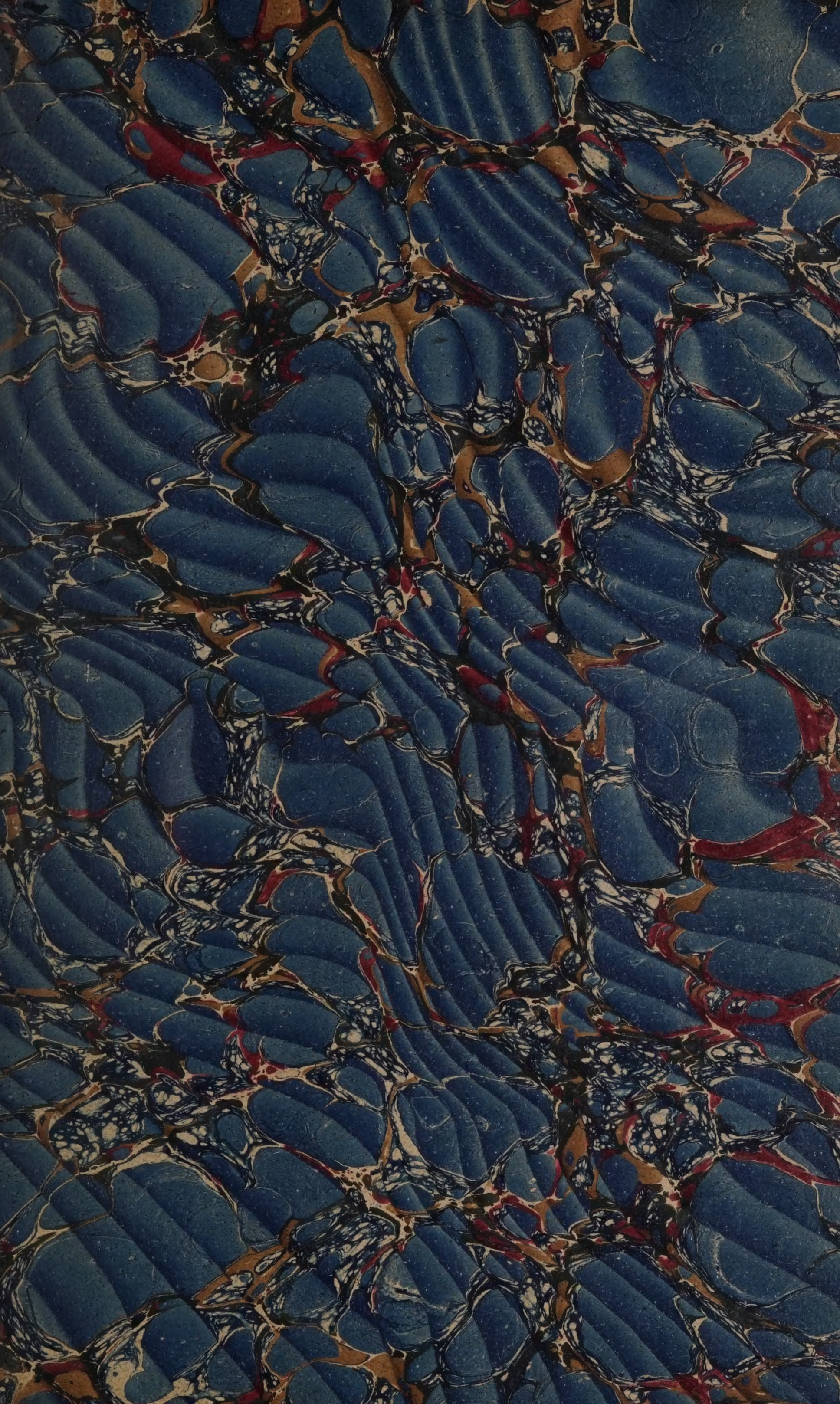




LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS
510.6
NO
v.13-15
MATHEMATICS
ACADEMY OF NATURAL SCIENCES
OF
PHILADELPHIA.
Presented by The Society
Not to be loaned on any condition.



12

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ XIII.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36
1891.

Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естество-испытателей. Секретарь общества *П. Бучинскій.*

MÉMOIRES

de la section mathématique

de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie

(Odessa).

T. XIII.

СОДЕРЖАНІЕ.

TABLE DES MATIÈRES.

Къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

М. П. Рудзкаго.

Въ настоящей статейкѣ я желаю отмѣтить, что дифференціальное линейное уравненіе:

$$\varphi_n\frac{d}{dx}\varphi_{n-1}\frac{d}{dx}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\varphi_1\frac{du}{dx}=u \qquad (1)\ (*)$$

, въ которомъ:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$$

суть функціи отъ x, связано съ группой подобныхъ ему дифференціанальныхъ уравненій вида:

$$\varphi_k\frac{d}{dx}\varphi_{k+1}\frac{d}{dx}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\varphi_n\frac{d}{dx}\varphi_1\frac{d}{dx}\cdot\cdot\cdot\varphi_{k-1}\frac{p}{dv}=(-1)^n v\ldots\ldots \qquad (2)$$

, гдѣ k поочереди равно $1, 2, \ldots n$; ибо если возьмемъ функціи:

$$u_1 \ u_2 \ldots\ldots u_n$$

удовлетворяющія уравненію *(1)*, а потомъ еще функціи:

$$\left.\begin{aligned} \overset{(1)}{\mu_i} &= \varphi_1\frac{du_i}{dx} \\ \overset{(2)}{\mu_i} &= \varphi_2\frac{d\mu_i^{(1)}}{dx} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(*) Это уравненіе слѣдуетъ понимать такъ: производную отъ и умножаемъ на φ_1, потомъ образуемъ производную отъ этого произведенія, умножаемъ на φ_2 и т. д.

$$\cdots\cdots$$

$$\mu_i^{(h)} = \varphi_h \frac{d\mu_i^{(h-1)}}{dx}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mu_i^{(n-1)} = \varphi_{n-1} \frac{d\mu_i^{(n-2)}}{dx}$$

и составимъ опредѣлитель n таго порядка:

$$M = \begin{vmatrix} u_1 \ldots\ldots u_n \\ \mu_1^{(1)} \ldots\ldots \mu_n^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mu_1^{(n-1)} \ldots\ldots \mu_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{4}$$

а потомъ его подопредѣлители, принадлежащіе къ элементамъ k той строки и i той колоны:

$$M_{k,\,i} = \begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_{i-1} & u_{i+1} & \ldots & u_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^{(k-2)} & \ldots & \mu_{i-1}^{(k-2)} & \mu_{i+1}^{(k-2)} & \ldots & \mu_n^{(k-2)} \\ \mu_1^{(k)} & \ldots & \mu_{i-1}^{(k)} & \mu_{i+1}^{(k)} & \ldots & \mu_n^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^{(n-1)} & \ldots & \mu_{i-1}^{(n-1)} & \mu_{i+1}^{(n-1)} & \ldots & \mu_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

то подопредѣлители:

$$M_{k,i}$$

удовлетворяютъ уровненіямъ выда (2), именно подопредѣлитель принадлежащій къ k той строкѣ удовлетворяетъ уравненію, въ которомъ коэффиціентъ: φ_k стоить на крайнемъ мѣстѣ съ лѣвой стороны.

Доказательство сказаннаго основывается на слѣдующихъ двухъ равенствахъ:

$$M_{k,i} = \varphi_k \frac{d}{dx}(M_{k+1,i}) \tag{6}$$

, когда: $k=1,\ 2, \ldots (n-1)$, но

$$M_{n,i}=(-1)^n\varphi_n\frac{d}{dx}(M_{1,i}) \tag{7}$$

Эти равенства доказываются очень просто. Если дѣйствительно продифференцируемъ опредѣлитель: $M_{k+1,i,}$ то получимъ $_{n-1}$ опредилителей сходныхъ съ даннымъ опредѣлителемъ. Единственное различіе состоитъ въ томъ, что въ первомъ изъ опредѣлителей, составляющихъ производную, вмѣсто строки:

$$u_1 \ldots u_{i-1}\ u_{i+1} \ldots u_n$$

, будетъ строка:

$$\frac{du_1}{dx} \ldots \frac{du_{i-1}}{dx}\ \frac{du_{i+1}}{dx} \ldots \frac{du_n}{dx}$$

, во второмъ вмѣсто строки:

$$\overset{(1)}{\mu_i} \ldots \overset{(1)}{\mu_{i-1}}\ \overset{(1)}{\mu_{i+1}} \ldots \overset{(1)}{\mu_n}$$

, будетъ строка:

$$\frac{d\overset{(1)}{\mu_i}}{dx} \ldots \frac{d\overset{(1)}{\mu_{i-1}}}{dx}\frac{d\overset{(1)}{\mu_{i+1}}}{dx} \ldots \frac{d\overset{(1)}{\mu_n}}{dx}$$

и т. д.

Если возьмемъ во вниманіе уравненія: (3) то на основаніи извѣстной теоремы, что опредѣлитель, въ которомъ всѣ элементы одной строки равны соотвѣтственнымъ элементамъ другой строки, умноженнымъ на одинъ и тотъ-же множитель, равняется нулю; окажется, что всѣ эти опредѣлители равны нулю, кромѣ одного, именно кромѣ того, въ которомъ строка:

$$\overset{(k-1)}{\mu_1} \ldots \overset{(k-1)}{\mu_{i-1}}\ \overset{(k-1)}{\mu_{i+2}} \ldots \overset{(k-1)}{\mu_n}$$

замѣнена строкой: *)

*) Обращаю вниманіе читателя на то, что здѣсь разсматривается производная опредѣлителя $M_{k+1,i}$

$$\frac{d\overset{(k-1)}{\mu_1}}{dx} \quad \cdots \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_i}}{dx} \quad \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_{i+1}}}{dx} \quad \cdots \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_n}}{dx}$$

Если наконецъ въ этомъ послѣднемъ опредѣлителѣ, сдѣлаемъ общій множитель: φ_k множителемъ элементовъ именно этой строки:

$$\frac{d\overset{(k-1)}{\mu_1}}{dx} \quad \cdots \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_{i-1}}}{dx} \quad \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_{i+1}}}{dx} \quad \cdots \frac{d\overset{(k-1)}{\mu_n}}{dx}$$

, то окажется, что этотъ единственный, оставившійся опредѣлитель есть ничто иное, какъ:

$$M_{k,\,i}$$

Такимъ образомъ равенство: (6) обращается въ тождество. Что касается равенства: (7), то при исполненіи дифференціаціи надъ опредѣлителемъ: $M_{1,i}$ всѣ опредѣлители, составляющіе производную оказываются равны нулю, кромѣ однаго, въ которомъ послѣдняя строка опредѣлителя: $M_{1,i}$ или строка:

$$\overset{(n-1)}{\mu_i} \quad \cdots\cdots \overset{(n-1)}{\mu_{i-1}} \quad \overset{(n-1)}{\mu_{i+1}} \quad \cdots\cdots \overset{(n-1)}{\mu_n}$$

замѣняется строкой:

$$\frac{d\overset{(n-1)}{\mu_1}}{dx} \quad \cdots \frac{d\overset{(n-1)}{\mu_{i-1}}}{dx} \quad \frac{d\overset{(n-1)}{\mu_{i+1}}}{dx} \quad \frac{d\overset{(n-1)}{\mu_n}}{dx}$$

Но на основаніи уравненій: (3) и уравненій: (1):

$$\varphi_n \frac{d\overset{(n-1)}{\mu_i}}{dx} = u_i$$

, а потому, если перенесемъ эту послѣднюю строку на первое мѣсто, то окажется, что равенство: (7) есть тождество. — Дѣйствительно, при передвиженіи любой строки на одно мѣсто определитель мѣняетъ свой знакъ. Здѣсь мы должны совершить

$n-2$ такихъ передвиженій съ послѣдней строкой, слѣдовательно мы должны ввести множитель: $(-1)^{n-2}$, или, что все равно: $(-1)^n$

Если теперъ въ равенство:

$$M_{k,i}=\varphi_k\frac{d}{dx}(M_{k+1,i})$$

Подставимъ: $M_{k+1,i}$ изъ подобнаго ему равенства:

$$M_{k+1,i}=\varphi_{k+1}\frac{d}{dx}(M_{k+2,i})$$

и т. д. а $M_{n,i}$ подставимъ изъ равенства: (7) то получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\varphi_k\frac{d}{dx}\varphi_{k+1}\frac{d}{dx}\dots\varphi_k\frac{d}{dx}\varphi_1\frac{d}{dx}\dots\varphi_{k-1}\frac{d}{dx}(M_{k,1})=(-1)^nM_{k,i}$$

гдѣ

$$k=1,\ 2\dots\dots n$$

значитъ функція $M_{k,i}$ удовлетворяетъ уравненію: (2) Замѣтимъ теперь, что опредѣлители: $M_{1,i}$ равны частнымъ нѣкоторыхъ опредѣлителей, именно:

$$M_{1,i}=C.\frac{R_{1,i}}{R} \tag{8}$$

Гдѣ C есть постоянная:

$$R=\begin{vmatrix} u_1\dots\dots & u_n \\ \frac{du_1}{dx}\dots\dots & \frac{du_n}{dx} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}\dots\dots & \frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$R_{i,1} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx} \cdots \frac{du_{i-1}}{dx} & \frac{du_{i+1}}{dx} \cdots \frac{du_n}{dx} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} \cdots \frac{d^{n}u_{i-1}}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}u_{i+1}}{dx^{n+1}} \cdots \frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

т. е. R есть опредѣлитель n таго порядка изъ функцій u_i и ихъ производныхъ до $n-1$ аго порядка включительно, а $R_{1,i}$ есть подопредѣлитель, принадлежащій къ i тому элементу первой строки опредѣлителя: R.

Дѣйствительно, всякое $\overset{(k)}{\mu_i}$ послѣ исполненія дифференціацій получаетъ слѣдующій видъ:

$$\overset{(k)}{\mu_i} = p_{k,k} \frac{d^k u_i}{dx^k} + p_{k,k-1} \frac{d^{k-1} u_i}{dx^{k-1}} + \cdots\cdot p_{k,1} \frac{du_i}{dx} \tag{9}$$

Фунціи: $p_{k,k}$, $p_{k,k-1} \cdots p_{k,1}$ состоятъ изъ функцій φ и ихъ производныхъ. Онѣ могутъ быть легко найдены помощью формулы:

$$p_{k,h} = \varphi_k \left[p_{k-1,h-1} + \frac{d}{dx}(p_{k-1,h}) \right] \cdots \tag{10}$$

которая даетъ возможность образовать поочереди всѣ коэффиціенты: $p_{k,h}$, начиная съ тѣхъ, въ которыхъ знаки: k и h имѣютъ самыя малы значенія.

Выражая въ опредѣлителѣ: $R_{1,i}$ всѣ функціи: μ помощью формулы: (9) и примѣняя извѣстную теорему, что значеніе опредѣлителя не измѣняется, если къ элементамъ любой его строки прибавить соотвѣтственные элементы другихъ строкъ, умноженные на нѣкоторые постоянные для данной строки множители, найдемъ слѣдующее:

$$M_{1,i}=\begin{vmatrix} \varphi_1 \dfrac{du_1}{dx} & \varphi_1 \dfrac{du_2}{dx} \dots\dots \\ \varphi_1\varphi_2\dfrac{d^2u_1}{dx} & \varphi_1\varphi_2\dfrac{d^2u_2}{dx^2}\dots\dots \\ \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n\dfrac{d^{2-1}u_1}{dx^{n-1}} \dots\dots & \end{vmatrix}$$

или

$$M_{1,i}=\varphi_1^{n-1}\cdot\varphi_2^{n-2}\dots\dots\varphi_{n-1}\begin{vmatrix} \dfrac{du_1}{dx}\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}\dots\dots \end{vmatrix} \tag{11}$$

Опредѣлитель, входящій въ составъ правой стороны равенства: (11) есть ничто иное, какъ:

$$R_{1,i}$$

Съ другой стороны мы можемъ доказать, что:

$$\varphi_1^{n-1}\cdot\varphi_2^{n-1}\dots\dots\varphi_{n-1}=\frac{C}{R} \tag{12}$$

Дѣйствительно, если привести уравненіе: (1) къ виду:

$$q_n\frac{d^nu}{dx^n}+q_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\dots\dots+q_1\frac{du}{dx}=u$$

то по общему свойству всѣхъ уравненій этого вида:

$$R=e^{-\int_{xo}^{x}\frac{q_{n-1}}{q_n}dx} \tag{13}$$

Но въ данномъ случаѣ, помощью формулы: (10) найдемъ:

$$q_n = \varphi_n \cdot \varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$$

$$q_{n-1} = \varphi_n \frac{d}{dx}(\varphi_{n-1} \cdot \varphi_{n-2} \cdot \ldots \cdot \varphi_1) + \varphi_n \varphi_{n-1} \frac{d}{dx}(\varphi_{n-2} \cdot \ldots \cdot \varphi_1) + \ldots$$

$$+ \varphi_n \cdot \varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \frac{d\varphi_1}{dx}$$

Подставляя эти значенія q_n и q_{n-1} въ формулу: (13) найдемъ формулу: (12).—Но коль скоро доказано равенство: (12) (8) тоже является доказаннымъ.

Замѣтимъ еще, что уравненіе, которому удовлетворяетъ функція:

$$M_{1,i}$$

тождественно съ такъ называемымъ соединеннымъ уравненіемъ, или «*equation adjointe*» у Жордана *). Это можетъ быть доказано непосредственно. Предполагая, что уравненіе, полученное подъ видомъ уравненія (2), гдѣ $k=1$, тождественно съ уравненіемъ, полученнымъ подъ такимъ видомъ, подъ какимъ оно является н. п. у Жордана, когда оба уравненія, положимъ, m таго порядка, нетрудно доказать тождество обоихъ видовъ для уравненій $(m+1)$ аго порядка.—Но частныя вида:

$$\frac{R_{1,i}}{R}$$

являются интегралами соединеннаго уравненія, не только въ разсматриваемомъ нами случаѣ, но вообще у всѣхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій вида:

$$q_n \frac{d^n u}{dx^n} + q_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-2}} + \ldots q_1 \frac{du}{dx} = u \qquad (14)$$

*) Cours d'analyse III томъ стр. 153

, гдѣ q_n , $q_{n-1} \cdots\cdots q_1$ есть вообще функціи отъ x вовсе независимыя другъ отъ друга. Дѣйствительно, если взять подопредѣлители функціональнаго опредѣлителя: R, состоящаго изъ функцій, [и ихъ производныхъ до $n-1$ аго порядка включительно] удовлетворяющихъ уравненію: (14), написать n извѣстныхъ связей между этими подопредѣлителями вида:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{R_{k,\,i}}{R}\right)-\frac{R_{k-1,\,i}}{R}-(-1)^k p_{k-1}\frac{R_{1,\,i}}{R}=0$$

, начиная съ $k=1$, до $k=n$, и подставить: $\frac{R_{n,\,i}}{R}$ изъ послѣдняго въ предпослѣднее, изъ этого опять: $\frac{R_{n-1,\,i}}{R}$ въ третье отъ конца и т. д.; то наконецъ получимъ уравненіе:

$$(-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_n\frac{d\omega}{dx}\right)+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(p_{n-1}\frac{d\omega}{dx}\right)+ \\ +\ldots\ldots-p_1\frac{d\omega}{dx}=\omega \qquad (15)$$

, гдѣ мы ради краткости положили:

$$\frac{R_{1,\,i}}{R}=\omega$$

Уравненіе (15) и есть уравненіе соединенное съ уравненіемъ: (14). Его интегралы имѣютъ то свойство, *) что уравненіе: (14), будучи умножено на одинъ изъ интеграловъ уравненія: (15), помощью интеграціи по частямъ приводится къ уравненію порядкомъ ниже на одну единицу.

---

*) Жорданъ loc. cit.

Механика подобно-измѣняемой системы.

Д. Н. Зейлигера.

Mechanik der ähnlich-veränderlicher Systeme

von D. Seiliger.

ВЫПУСКЪ ТРЕТІЙ.

Статика подобно-измѣняемой системы.

ВВЕДЕНІЕ.

Приступая къ обзору содержанія настоящаго выпуска, я считаю долгомъ исправить ошибку, вкравшуюся противъ моей воли въ предисловіе къ первому выпуску. Тамъ я указалъ на нѣсколько главъ сочиненія Мэбіуса «Lehrbuch der Statik», какъ на всю литературу статики подобно-измѣняемой системы. Но недавно я случайно познакомился съ другой работой этого автора, посвященной тому же вопросу *). Вотъ содержаніе этой небольшой статьи, состоящей изъ 6 параграфовъ, Въ первомъ авторъ, исходя изъ принципа Бернулли, находитъ слѣдующія условія равновѣсія плоской системы силъ:

$$\Sigma X = o, \ \Sigma Y = o, \ \Sigma (Yx - Xy) = o, \ \Sigma (Xx + Yy) = o.$$

*) Journal von Crelle, 1840, B. 21, p. 64—73.

Здѣсь x, y, координаты точки приложенія силы (X, Y).

Въ слѣдующемъ параграфѣ изъ этихъ формулъ выводятся два предложенія:

I. Если нѣсколько точекъ такъ могутъ двигаться, что фигура, составленная ими, всегда остается себѣ подобной, причемъ силы, дѣйствующія на нихъ въ плоскости, находятся въ равновѣсіи, то послѣднее не нарушится во всякомъ иномъ положеніи, которое можно дать точкамъ въ силу ихъ подвижности, если только силы остаются параллельными своимъ первоначальнымъ направленіямъ.

Обратно:

II. Если силы, дѣйствующія въ плоскости на точки, неизмѣнно связанныя между собой, находятся въ равновѣсіи, и послѣднее сохраняется, когда система точекъ произвольно перемѣщена въ своей плоскости между тѣмъ, какъ силы дѣйствуютъ параллельно ихъ первоначальнымъ направленіямъ, то равновѣсіе не нарушится, если точкамъ дадимъ возможность такого относительнаго перемѣщенія, при которомъ фигура, составленная ими, остается подобной самой себѣ. Эти два предложенія были уже изложены авторомъ въ Lehrbuch der Statik.

Въ третьемъ параграфѣ Мэбіусъ прилагаетъ общую теорію къ случаю двухъ и трехъ силъ. Въ первомъ случаѣ необходимое условіе равновѣсія заключается въ совпаденіи точекъ приложеній обѣихъ силъ, что само собой очевидно; кромѣ того, дѣйствующія силы должны быть равны по величинѣ и прямо противоположны по направленію. Для случая трехъ силъ авторъ снова *) даетъ теорему, по которой къ условіямъ равновѣсія, имѣющимъ мѣсто въ томъ случаѣ, если разстоянія точекъ приложеній силъ неизмѣняются, присоединяется еще одно, именно: три точки должны лежать на одной окружности съ общей точкой пересѣченія силъ.

---

*) Lehrbuch der Statik § 234.

Далѣе авторъ переходитъ къ системѣ силъ, дѣйствующихъ въ пространствѣ на точки подобно-измѣняемой системы. Принципъ Бернулли даетъ ему слѣдующее условіе равновѣсія:

$$1)\quad \Sigma(Xx+Yy+Zz)=o.$$

Остальныя условія:

$$2)\quad \Sigma X=o,\ \Sigma Y=o,\ \Sigma Z=o,\ \Sigma(yZ-zY)=o,\ \Sigma(zX-xZ)=o,$$
$$\Sigma(xY-yX)=o$$

авторъ получаетъ непосредственно.

Дополнительное условіе 1), характерное для подобно-измѣняемой системы, Мэбіусъ представляетъ далѣе въ видѣ:

$$3)\quad \Sigma OA.Pcs\widehat{OAP}=o,$$

гдѣ OA— разстояніе любой точки O отъ точки приложенія A силы P.

Въ такомъ видѣ представленное дополнительное условіе атворъ формулируетъ слѣдующимъ образомъ: Выберемъ произвольную точку O и составимъ произведеніе изъ каждой силы P на разстояніе $OAcs\widehat{OAP}$ точки приложенія силы отъ плоскости, проведенной чрезъ O перпендикулярно къ P. Сумма такихъ произведеній должна равняться нулю.

Наконецъ въ послѣднемъ параграфѣ разсматривается случай четырехъ силъ, дѣйствующихъ на 4 точки, не лежащія въ одной плоскости, и дается теорема, по которой дополнительное условіе равновѣсія въ данномъ случаѣ заключается въ томъ, что плоскости, проведенныя чрезъ точки приложеній силъ перпендикулярно къ направленіямъ послѣднихъ, должны пересѣкаться въ одной точкѣ.

Перехожу теперь къ бѣглому обзору содержанія настоящаго выпуска.

Въ первой главѣ помощью принципа Бернулли я доказываю, что пару растяженія или сжатія можно перенести на любую прямую пространства; что двѣ одноименныя пары эквивалентны, если ихъ моменты равны, и наконецъ, что только въ подобно-измѣняемой системѣ имѣетъ мѣсто предыдущая теорема, которая, слѣдовательно, можетъ считаться статическимъ опредѣленіемъ подобно-измѣняемой системы.

Этотъ результатъ я считаю весьма важнымъ. Въ слѣдующихъ главахъ бѣгло указаны главныя приложенія теоріи векторовъ, изложенной въ первыхъ двухъ выпускахъ къ статикѣ подобно-измѣняемой системы. Читатель не долженъ думать, что я ограничился простой замѣной слова «векторъ» словомъ «сила». Вездѣ, гдѣ только представлялся случай, я старался упрощать, видоизмѣнять доказательства, данныя мною раньше. Такъ во второй главѣ указаны очень простые способы преобразованія паръ (теор. VI, VII и VIII), что позволило мнѣ дать вполнѣ геометрическое доказательство теоремы Мэбіуса о равнодѣйствующей 2 силъ. Въ той же главѣ дано новое изложеніе свойствъ линейной системы силъ, основанное на геометрическомъ изображеніи момента пары растяженія. Иначе и также значительно проще изложена плоская система силъ. Но особенно внимательному пересмотру подверглась теорія винтовъ. Я ввожу, вмѣстѣ съ Балемъ, взаимные винты и пользуюсь ихъ свойствами для большей простоты изложенія. Если это и не приводитъ къ новымъ результатамъ, все же я не считаю эту работу совершенно безполезной. Дѣло въ томъ, что, по справедливому замѣчанію г. Занчевскаго*),.... «чисто геометрической теоріи винтовъ въ собственномъ смыслѣ этого слова не существуетъ». Въ указанномъ сочиненіи пробѣлъ этотъ пополняется въ томъ отношеніи, что теорія винтовъ изъ области механики цѣликомъ

---

*) Занчевскій. Теорія винтовъ и приложенія ея къ механикѣ. Одесса, 1889 г., стр. 16.

перенесена въ область аналитической геометріи. Въ настоящей работѣ я доказываю, что и синтетическая геометрія можетъ справиться съ этимъ вопросомъ, причемъ цѣликомъ сохраняется все изящество доказательствъ, предложенныхъ Балемъ въ его «The Theory of Screws».

Возвращаюсь къ прерванному обзору содержанія настоящаго выпуска. Въ послѣднихъ двухъ главахъ я излагаю изслѣдованія Шаля *) о возможныхъ перемѣщеніяхъ подобно-измѣняемой системы точекъ. Вывожу формулы для возможныхъ перемѣщеній послѣдней и прилагаю эти формулы къ вычисленію работы силы, пары вращенія и силоваго винта. Далѣе ввожу понятіе о кинематическомъ винтѣ въ подобно-измѣняемой системѣ. Этимъ именемъ я обозначаю совокупность вращательнаго движенія вокругъ оси винта и лучистаго растяженія вокругъ центра послѣдняго. Подъ лучистымъ растяженіемъ я разумѣю такого рода движеніе точекъ системы, при которомъ послѣднія движутся по радіусамъ, исходящимъ изъ общаго центра. Въ заключеніе вычисляется работа силоваго винта по отношенію къ кинематическому и изслѣдуется вопросъ: когда винтъ силовой не производитъ никакой работы?

Изъ этого краткаго обзора читатель, надѣюсь, выведетъ заключеніе, что вторая, новая для меня, работа Мэбіуса нисколько не отразилась на моемъ сочиненіи.

---

*) Charles. Comptes rendues. 1834, p. 1743—1759.

ГЛАВА I.

О работѣ. Принципъ Бернулли. Подобно-измѣняемая система точекъ. Основныя теоремы.

I. О работѣ силъ. Всякое безконечно-малое перемѣщеніе матеріальной точки называется возможнымъ, если оно допускается условіями, которымъ подчинено движеніе точки. Точка называется свободной, если всякое ея перемѣщеніе возможно; въ этомъ случаѣ ея движеніе не подчинено никакому условію.

Пусть AA' — возможное перемѣщеніе точки, $A\alpha$ — проекція послѣдняго на направленіе силы P, дѣйствующей на точку (Ч.I.); обозначимъ $A\alpha$ чрезъ δp. Произведеніе $P\delta p$ называется работой силы P по возможному пути AA' или, короче, возможной работой силы P. Работа силы положительна, если направленія P и δp одинаковы, — отрицательна въ противномъ случаѣ.

Если δx, δy, δz — проекціи на прямоугольныхъ осяхъ координатъ возможнаго пути $AA' = \delta s$, α, β, γ — cs'ы угловъ съ осями, образуемыхъ направленіемъ P, то

$$\delta p = \alpha \delta x + \beta \delta y + \gamma \delta z;$$

слѣдовательно,

$$P\delta p = P\alpha \delta x + P\beta \delta y + P\gamma \delta z.$$

Но, если X, Y, Z — слагающія по осямъ силы P, то

$$X = P\alpha,\ Y = P\beta,\ Z = P\gamma.$$

Внося эти значенія въ предыдущую формулу, получимъ окончательно:

$$1)\quad P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Пусть P, P',..—силы, дѣйствующія на точки A, A',... системы точекъ, δp, $\delta p'$,..—проекціи на направленія силъ одновременныхъ, возможныхъ перемѣщеній точекъ A,A',.. $\Sigma P\delta p$, распространенная на всю систему, называется возможной работой силъ P, P',.. На основаніи предыдущаго,

$$2)\quad \Sigma P\delta p = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Остановимся на случаѣ двухъ точекъ.

Предположимъ, что вдоль прямой AB въ точкахъ A и B дѣйствуютъ двѣ равныя и прямо-противоположныя силы $-P$ и $+P$ (Ч. II). Такую совокупность двухъ силъ назовемъ парой сжатія или растяженія, смотря по тому, направлены-ли силы на встрѣчу другъ къ другу или нѣтъ. (На нашемъ чертежѣ изображена пара растяженія). Силы P и $-P$ суть слагающія пары. Вычислимъ возможную работу послѣдней.

Пусть x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 — прямоугольныя координаты точекъ A и B, ρ, α, β, γ—длина прямой AB и cs'ы угловъ, составляемыхъ ею съ осями. Тогда

$$3)\quad x_2 - x_1 = \rho\alpha,\ y_2 - y_1 = \rho\beta,\ z_2 - z_1 = \rho\gamma.$$

Если X, Y, Z — слагающія по осямъ силы P, дѣйствующей на точку B, то слагающія силы $-P$, дѣйствующей на A, будутъ: $-X$, $-Y$, $-Z$, причемъ

$$4)\quad X = P\alpha,\ Y = P\beta,\ Z = P\gamma.$$

Искомое выраженіе работы будетъ:

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 = X(\delta x_2 - \delta x_1) + Y(\delta y_2 - \delta y_1) + Z(\delta z_2 - \delta z_1).$$

Но формулы 3) даютъ:

$$\delta x_2 - \delta x_1 = \rho\delta\alpha + \alpha\delta\rho, \quad \delta y_2 - \delta y_1 = \rho\delta\beta + \beta\delta\rho, \quad \delta z_2 - \delta z_1 = \rho\delta\gamma + \gamma\delta\rho.$$

Умножая эти выраженія на X, Y, Z соотвѣтственно и пользуясь формулами 4), найдемъ:

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p = P\rho(\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma) + P\delta\rho(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Но, какъ извѣстно,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

откуда

$$\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma = o,$$

въ силу чего предыдущее выраженіе работы пары силъ приметъ слѣдующій видъ:

$$5) \quad P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 = P\delta\rho.$$

Это выраженіе чрезвычайно важно для послѣдующаго. Его нетрудно вывести геометрически *), но на этомъ я останавливаться не буду.

II. Принципъ Бернулли. Статика всякой системы точекъ заключается въ слѣдующемъ предложеніи Бернулли: Если силы, дѣйствующія на свободную систему точекъ, находятся въ равновѣсіи, то работа этихъ силъ равна нулю для всякаго возможнаго перемѣщенія системы точекъ. Обратно, если работа силъ равна нулю для всякаго возможнаго перемѣщенія точекъ приложеній этихъ силъ, то послѣднія находятся въ равновѣсіи.

Доказательство этого предложенія здѣсь опускается. Читатель найдетъ его въ любомъ учебникѣ аналитической механики.

Двѣ системы силъ $P, P', \ldots, Q, Q', \ldots$ считаются эквивалентными или равнодѣйствующими, если онѣ уравновѣшиваютск послѣ

---

*) *Schell.* Theorie der Bewegung und der Kräfte. T. II, стр. 194.

того, какъ силы одной изъ нихъ измѣнятъ свои направленія на прямо-противоположныя *).

Пусть δp, $\delta p'$, . ., δq, $\delta q'$. . . — проекціи на направленія силъ P и Q возможныхъ перемѣщеній точекъ приложеній послѣднихъ. По опредѣленію, силы (P) и (Q) эквивалентны, если системы (P) и $(-Q)$ находятся въ равновѣсіи. Но для послѣдняго, по теоремѣ Бернулли, необходимо, чтобы

$$\Sigma P\delta p - \Sigma Q\delta q = o,$$

т. е., двѣ системы силъ (P) и (Q) эквивалентны, если работы ихъ равны для всякаго возможнаго перемѣщенія точекъ ихъ приложеній.

Приложимъ эту теорему къ случаю трехъ силъ.

Положимъ, что на свободную точку (x, y, z) дѣйствуютъ силы P и Q. Если R — равнодѣйствующая сила, то, по предыдущему,

$$P\delta p + Q\delta q = R\delta z.$$

Пусть (X_1, Y_1, Z), (X_2, Y_2, Z_2), (X, Y, Z) — проекціи силъ P, Q и R на прямоугольныхъ осяхъ и координатахъ. Прилагая къ разсматриваемому случаю формулу 1), получимъ:

$$(X_1 + X_2)\delta x + (Y_1 + Y_2)\delta y + (Z_1 + Z_2)\delta z = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Такъ какъ точка (x, y, z) свободна, то эта формула, по предыдущему, справедлива для безчисленнаго множества системъ значеній $(\delta x, \delta y, \delta z)$, независимыхъ между собой. Это возможно лищь въ томъ случаѣ, если

$$X = X_1 + X_2,\quad Y = Y_1 + Y_2,\quad Z = Z_1 + Z_2.$$

*) Möbius. Lehrbuch der Statik. 1837, § 6.

Полученными равенствами аналитически выражается извѣстный законъ параллелограмма, по которому складываются двѣ силы, дѣйствующія на одну и туже свободную точку x, y, z.

Предположимъ, что, вмѣсто одной точки (x, y, z), у насъ система точекъ, связи которой таковы, что всякое, безконечно-малое перемѣщеніе какой нибудь точки системы возможно. Такую систему назовемъ свободной. Точки ея удовлетворяютъ данному въ 1 § опредѣленію свободныхъ точекъ. Слѣдовательно, законъ параллелограмма имѣетъ мѣсто во всѣхъ точкахъ свободной системы.

III. О подобно-измѣняемой системѣ. Подобно-измѣняемой называется такая система, послѣдовательныя положенія которой представляютъ рядъ подобныхъ фигуръ. Слѣдовательно, при движеніи подобно-измѣняемой системы всякая фигура, составленная изъ точекъ послѣдней, остается подобной самой себѣ.

Пусть (ρ_1, ρ_2), (r_1, r_2)—длины отрѣзковъ ρ и r системы въ двухъ положеніяхъ σ_1 и σ_2 занимаемыхъ послѣдней въ моменты t_1 и t_2. Изъ опредѣленія системы вытекаетъ:

$$\frac{\rho_2}{r_2}=\frac{\rho_1}{r_1}=const.$$

Это равенство есть аналитическое опредѣленіе подобно-измѣняемой системы. Его можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}=\frac{r_2-r_1}{r_1}=E,$$

гдѣ E—постоянная величина, независящая отъ длины и положенія отрѣзка ρ. Величина E называется линейнымъ расширеніемъ системы за промежутокъ времени t_2-t_1, а отношеніе $\frac{E}{t_2-t_1}$—среднимъ коэффиціентомъ расширенія за тотъ же про-

межутокъ времени. Предѣлъ, къ которому стремится этотъ средній коэффиціентъ, когда разность t_2-t_1 стремится къ нулю, называется коэффиціентомъ расширенія въ моментъ t_1. Обозначимъ его чрезъ e. Если dE—линейное расширеніе за элементъ времени dt, то, по опредѣленію,

$$dE=edt.$$

Предыдущая формула, примѣненная къ расматриваемому случаю, даетъ:

$$6)\quad \frac{d\rho}{\rho}=\frac{dr}{r}=edt.$$

Мы назвали выше парой сжатія или растяженія совокупность двухъ силъ P и $-P$, лежащихъ на одной прямой и отличающихся другъ отъ друга только направленіями и точками приложеній. Отрѣзокъ, концами котораго служатъ послѣднія, назовемъ плечомъ пары, причемъ условимся обозначать послѣднюю символомъ $(P,-P)$.

Теорема I. Двѣ одноименныя пары эквивалентны, если длины ихъ плечей и величины силъ одинаковы.

Здѣсь, какъ и во всемъ послѣдующемъ, подразумѣвается, что точка приложенія силы принадлежитъ подобно-измѣняемой системѣ.

Доказательство. Если ρ_1, ρ_2—плечи паръ, P—общая величина дѣйствующихъ силъ, то, по § 1, возможныя работы паръ будутъ соотвѣтственно:

$$P\delta\rho_1 \text{ и } P\delta\rho_2.$$

Но формула 6) даетъ:

$$\delta\rho_1=e\rho_1\delta t,\quad \delta\rho_2=e\rho_2\delta t.$$

Такъ какъ, по предположенію, ρ_1 и ρ_2 равны, то равны $\delta\rho_1$ и $\delta\rho_2$,—слѣдовательно, возможныя работы паръ также равны. А это, по § 2, служитъ доказательствомъ теоремы.

Доказанная теорема основная.

Мы вправѣ формулировать послѣднюю слѣдующимъ образомъ: въ подобно-измѣняемой системы пару расширенія или сжатія можно перенести на любую прямую пространства.

Назовемъ моментомъ пары растяженія или сжатія произведенія $\pm P.\rho$, гдѣ P—общая величина слагающихъ пары, ρ—плечо послѣдней. Верхній знакъ берется для пары растяженія; нижній—для пары сжатія.

Теорема II. Двѣ одноименныя пары эквивалентны, если ихъ моменты равны.

Доказательство. Пусть $(P,—P)$ и $(Q,—Q)$—двѣ одноименныя пары, ρ и r—длины ихъ плечей. По предположенію,

$$\alpha) \quad P\rho = Qr.$$

Элементарныя работы этихъ паръ измѣряются соотвѣтственно произведеніями: $P\delta\rho$ и $Q\delta r$. Но эти произведенія равны въ силу б) и α); слѣдовательно, теорема доказана.

Теорема III. Система точекъ, въ которой двѣ одноименныя пары эквивалентны при одномъ лишь условіи равенства ихъ моментовъ, есть подобно-измѣняемая система.

Доказательство. Пусть $(P,—P)$ и $(Q,—Q)$—двѣ пары, плечи которыхъ суть ρ и r соотвѣтственно. По предположенію,

$$P\rho = Qr \text{ и } P\delta\rho = Q\delta r,$$

откуда

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta r}{r}.$$

Полученное равенство справедливо, по предположенію,

при произвольномъ положеніи отрѣзковъ r и ρ. Но, по формулѣ 6), такимъ же равенствомъ опредѣляются два безконечно-близкихъ положенія подобно-измѣняемой системы. *Q. E. D* *).

Примѣчаніе. Мы моглибы вывести теорему II изъ I, не пользуясь принципомъ Бернулли **). Но преимущество избраннаго нами пути заключается въ весьма важной теоремѣ III. Изъ нея вытекаетъ, что теорема II есть статическое опредѣленіе подобно-измѣняемой системы точекъ.

Полученныя теоремы показываютъ, что всѣ результаты теоріи векторовъ, изложенной въ первыхъ двухъ выпускахъ настоящаго труда, имѣютъ мѣсто въ статикѣ подобно-измѣняемой системы. Въ самомъ дѣлѣ, вся теорія, о которой идетъ рѣчь, была нами построена на слѣдующихъ двухъ опредѣленіяхъ ***):

1. Два вектора, начала которыхъ совпадаютъ, складываются по правилу параллелограмма, причемъ сумма ихъ имѣетъ общее съ ними начало.

2. Двѣ одноименныя пары эквивалентны, если слагающіе и плеча ихъ равны. Иначе говоря, пару можно перенести на любую прямую пространства.

Этимъ двумъ опредѣленіямъ въ статикѣ подобно-измѣняемой системы соотвѣтствуютъ: правило параллелограмма двухъ силъ, приложенныхъ къ одной и той-же точкѣ, и теорема I.

---

*) *Примѣчаніе.* Интегрированіе равенства $\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta r}{r}$ далобы намъ: $\rho = Cr$, т. е., тотъ же результатъ. Авторъ.

**) Вып. I, стр. 14, теор. III.

***) Вып. I, стр. 5, § 3 и стр. 6, § 6.

ГЛАВА II.

Сложеніе силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ. Сложеніе паръ растяженій и сжатій. Линейная система силъ.

Мы будемъ пользоваться всѣми обозначеніями предыдущихъ двухъ выпусковъ.

I. Сложеніе силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ. Пусть O—точка приложенія силъ $P, P', ..$ Примемъ ее за начало прямоугольныхъ координатъ x, y, z. Если $\mathbf{X}, Y, Z$—слагающія по осямъ силы P, α, β, γ—cs'ы угловъ, образуемымъ направленіемъ послѣдней съ осями координатъ, то

$$A) \quad \frac{\alpha}{\mathbf{X}} = \frac{\beta}{Y} = \frac{\gamma}{Z} = \frac{1}{P}.$$

На основаніи второй главы перваго выпуска равенство

$$[R_0] \equiv \Sigma[P_0],$$

влечетъ за собой слѣдующія:

$$B) \left\{ \begin{array}{l} \Xi = \Sigma P\alpha, \ H = \Sigma P\beta, \ Z = \Sigma P\gamma, \\ \dfrac{a}{\Xi} = \dfrac{b}{H} = \dfrac{c}{Z} = \dfrac{1}{R}, \end{array} \right.$$

гдѣ a, b, c, Ξ, H и Z—cs'ы угловъ съ осями и слагающія по осямъ равнодѣйствующей силы R_0.

Формулы B) содержатъ всю теорію сложенія силъ, приложенныхъ къ одной и той же точкѣ.

II. Сложеніе паръ сжатій или растяженій. Какъ и въ первомъ выпускѣ, символомъ $\pm(X, a)$ будетъ обозначать пару, общая длина слагающихъ которой есть X, a—длина плеча. Верхній знакъ относится къ парѣ растяженія, нижній—къ парѣ сжатія.

Изъ теоремъ III главы перваго выпуска*) отмѣтимъ лишь слѣдующія:

Теорема IV. Совокупность паръ, имѣющихъ одно и тоже плечо, эквивалентна одной парѣ съ тѣмъ же плечомъ, общая величина слагающихъ которой есть алгебрическая сумма величинъ слагающихъ первыхъ паръ. Если знакъ каждаго члена этой суммы одинаковъ со знакомъ соотвѣтствующей пары, то знакъ равнодѣйствующей пары совпадаетъ со знакомъ суммы.

Теорема V. Совокупность любаго числа паръ эквивалентна парѣ, моментъ которой есть алгебрическая сумма моментовъ складываемыхъ паръ.

Разсмотримъ теперь различныя преобразованія паръ.

Пусть (AP, BQ), $(AP', B'Q')$—двѣ эквивалентныя пары растяженія (чер. III), по предположенію,

$$\alpha)\quad AB.AP = AB'.AP'.$$

Проведемъ прямыя BB' и PP'. Изъ α) вытекаетъ, что точки B, B', P и P' лежатъ на одной окружности. Слѣдовательно,

$$\beta)\ \angle ABB' = \angle PP'A \text{ и } \gamma)\ \angle AB'B = \angle APP'.$$

Полученныя равенства доказываютъ слѣдующія 2 теоремы:

Теорема VI. Если пара (AP, BQ) вращается вокругъ точки приложенія A одной слагающей AP, причемъ точка приложенія B другой описываетъ прямую BB', то конецъ P первой слагающей описываетъ дугу окружности $PP'A$. Эта дуга вмѣщаетъ уголъ, равный $\angle ABB'$.

Теорема VII. Если пара (AP, BQ) вращается вокругъ точки приложенія A одной слагающей AP, причемъ точка приложенія B другой описываетъ кругъ ABB', то конецъ P пер-

*) Вып. I, глава III.

вой слагающей описываетъ прямую PP'. Эта прямая образуетъ съ PA уголъ, равный $\angle AB'B$.

Примѣчаніе. Прямая BB' первой изъ этихъ теоремъ перпендикулярна къ діаметру круга $PP'A$, проходящему чрезъ A *). Точно тоже имѣетъ мѣсто во второй теоремѣ: прямая PP' перпендикулярна къ діаметру круга ABB', проходящему чрезъ A *).

Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, мы легко сможемъ превратить данную пару (AP, BQ) въ другую, ей эквивалентную. Пусть MAN—прямая, на которой должна лежать вторая пара. Дана слагающая AP' послѣдней, нужно найти второй конецъ B' ея плеча. Для этого проводимъ кругъ чрезъ A, P и P'. Прямая BB', перпендикулярная къ діаметру, проходящему чрезъ A, встрѣтимъ MN въ искомой точкѣ. Если дана точка B' и нужно найти конецъ P' слагающей новой пары, то проводимъ кругъ чрезъ A, B и B'. Прямая PP', перпендикулярная къ діаметру, проходящему чрезъ A, встрѣтитъ MN въ искомой точкѣ.

Теорема VII есть слѣдствіе слѣдующей:

Теорема VIII. Если пара (AP, BQ) вращается вокругъ точки приложенія A одной своей слагающей AP, причемъ точка приложенія B второй описываетъ кругъ β, не проходящій чрезъ A, то конецъ P первой слагающей описываетъ кругъ α Центры круговъ α и β лежатъ на одной прямой съ точкой A *).

Въ послѣднихъ трехъ теоремахъ, очевидно, подразумѣвается, что пара, перемѣщаясь и измѣняя длину плеча и величину слагающихъ силъ, остается эквивалентной самой себѣ.

Послѣдняя теорема даетъ болѣе общее преобразованіе одной пары въ другую, ей эквивалентную; но мы на этомъ останавливаться не будемъ.

III. Линейная система силъ. Въ четвертой главѣ перваго выпуска **) мы изслѣдовали систему векторовъ, лежащихъ

---

*) Ср. Приложеніе II къ первому выпуску.

**) Ср. Вып. I, стр. 15--22.

на прямой; слѣдовательно, свойства линейной системы силъ, приложенныхъ къ точкамъ подобно-измѣняемой системы, намъ извѣстны. Здѣсь мы дадимъ иное изложеніе этихъ свойствъ, основанное на геометрическомъ изображеніи момента пары.

Намъ придется разсматривать треугольники, имѣющіе общую вершину O. Пусть OAB одинъ такой треугольникъ. Условимся, вмѣстѣ съ Мэбіусомъ *), считать положительной площадь этого треугольника, если направленіе $\overrightarrow{OAB}$ совпадаетъ съ направленіемъ движенія часовой стрѣлки,—отрицательной въ противномъ случаѣ.

Пусть теперь AB—сила, C—какая-нибудь точка прямой AB (ч. 4). Приложимъ въ C вдоль прямой AB двѣ равныя и прямо-противоположныя силы CB' и CB'', общая величина которыхъ равна AB. Введенная совокупность эквивалентна нулю; слѣдовательно, вмѣсто силы AB, мы получили эквивалентную ей совокупность пары (CB'', AB) и силы CB'. Итакъ *переносъ силы AB въ какую-нибудь точку C прямой, содержащей силу, сопровождается появленіемъ пары (BC'', AB).* Моментъ послѣдней назовемъ растяженіемъ силы AB въ точкѣ C. Сказанное даетъ намъ теорему:

Теорема IX. Растяженіе силы AB въ какой-нибудь точкѣ C ея прямой представляется парой, имѣющей плечо AC, а одной изъ слагающихъ силу AB.

Слѣдствіе. Растяженія силы AB въ точкахъ C ея прямой пропорціональны разстояніямъ AC.

Теорема IX и слѣдствіе лишь по формѣ отличаются отъ теоремы V перваговыпуска.

Примѣчаніе. Если направленія AB и AC совпадаютъ, то въ точкѣ C, вмѣсто растяженія, получимъ сжатіе (ч. 4,а). Мы будемъ называть это сжатіе отрицательнымъ растяженіемъ. Моментъ сжатія силы AB въ C есть произведеніе $\pm AC.AB$. Этотъ моментъ можно геометрически представить слѣдующимъ

*) Möbius. Lehrbuch der Statik. I. Th. S. 51.

образомъ. Повернемъ отрѣзокъ AB на прямой уголъ въ сторону движенія часовой стрѣлки (ч. 4 и 4а). Пусть новое его положеніе будетъ AB'. На основаніи сдѣланнаго выше условія моментъ растяженія въ C представляется по величинѣ и знаку удвоенной площадью треугольника CAB'.

Пусть теперь AB, CD, EF,.. линейная система силъ, дѣйствующихъ вдоль прямой m,O—какая-нибудь точка послѣдней. Перенесемъ всѣ силы системы въ O. Если для краткости обозначимъ OA, OC, OE,.... чрезъ α, γ, ε,.., то, по предыдущему,

$$[AB]\equiv[OB']+(AB,\alpha),\ [BD]\equiv[OD']+(CD,\gamma),\ [EF]\equiv$$

$$\equiv[OF']+(EF,\varepsilon),\ldots.$$

откуда

$$1)\quad \Sigma]AB]\equiv\Sigma[OB']+\Sigma(AB,\alpha).$$

Силы OB', приложенныя къ одной и той же точкѣ O, можно сложить. Такъ какъ эти силы дѣйствуютъ вдоль прямой α, то эквивалентная имъ OR дѣйствуетъ на O вдоль той же прямой и имѣетъ величину, равную алгебрической суммѣ величинъ силъ OB'. Итакъ

$$2)\quad \Sigma[OB']\equiv[OR] \text{ и } \Sigma OB'=OR.$$

Займемся теперь суммой $\Sigma(AB,\alpha)$. Проведемъ какую-нибудь плоскость чрезъ прямую m и въ этой плоскости повернемъ каждую силу системы вокругъ точки ея приложенія на прямой уголъ въ сторону движенія часовой стрѣлки (черт. 5). Если AB'', CD'', EF'',.... — новыя положенія силъ AB, CD,.. системы, M_0-—моментъ растяженія системы силъ въ O, то, по предыдущему,

$$\frac{M_0}{2}=\Sigma OAB''.$$

Пусть теперь O'—другая точка прямой m, $M_{0'}$—моментъ растяженія въ O', $O'R'$ — равнодѣйствующая силъ системы, перенесенныхъ въ O'. Тогда

$$\frac{M'_0}{2}=\Sigma O'AB'' \quad \text{и} \quad O'R=OR.$$

Но очевидно,

$$O'AB''=OAB''+O'OB'';$$

слѣдовательно,

$$3) \quad \frac{M'_0-M_0}{2}=\Sigma O'OB''.$$

Повернемъ силы OB', OD',.., вмѣстѣ съ ихъ равнодѣйствующей OR, вокругъ O на прямой уголъ въ сторону движенія часовой стрѣлки. Пусть OB''', OD''',.. OR''—новыя положенія этихъ силъ. Очевидно,

$$O'OB''=O'OB''' \quad \text{и} \quad \Sigma O'OB''=\Sigma O'OB''',$$

откуда

$$\frac{M'_0-M_0}{2}=\Sigma O'OB'''.$$

Треугольники $O'OB'''$ имѣютъ общее основаніе $O'O$; высотами ихъ служатъ прямыя OB''', OD''',.. Въ силу равенства длинъ OB' и OB''', мы на основаніи второй изъ формулъ 2) заключаемъ:

$$4) \quad M'_0=M_0+2O'OR''.$$

Положимъ теперь, что точка O' перемѣщается по прямой m. Въ правой части формулы 4) членъ M_0 есть величина постоянная, представляющая растяженіе въ точкѣ O. Второй членъ $2OO'R''$ той же части измѣняется пропорціонально разстоянію OO'. Этотъ членъ обращается въ нуль, когда O' совпадаетъ съ O, и мѣняетъ знакъ при переходѣ O' чрезъ O. Отсюда мы

заключаемъ, что, если равнодѣйствующая $O'R'$ не равна нулю, то на прямой m находится такая точка O', въ которой растяженіе системы силъ равно нулю. Эту точку мы назвали*) *центральной точкой*. Очевидно, что, если O' — центральная точка, то линейная система силъ эквивалентна одной силѣ $O'R'$.

Центральная точка опредѣляется изъ условія:

$$M_0 + 2OO'R'' = o.$$

Но

$$2OO'R'' = \pm OO'.OR'' = \pm OO'.R,$$

откуда

$$5)\quad OO' = \pm \frac{M_0}{OR}.$$

Допустимъ, что O — центральная точка. Тогда формула 4) приметъ видъ:

$$6)\quad M_0' = 2OO'R'' = \pm OO'.OR$$

т. е. M_0' *измѣняется пропорціонально растяженію точки* O' *отъ центральной точки*.

Если равнодѣйствующая OR равна нулю, то формула 4) даетъ:

$$M_0' = M_0,$$

т. е., въ разсматриваемомъ случаѣ во всѣхъ точкахъ прямой m растяженія системы одинаковы.

Мы получили такимъ образомъ снова всѣ свойства линейной системы силъ.

---

*) Вып. I, стр. 18—22.

ГЛАВА III.

Сложеніе силъ, направленія которыхъ пересѣкаются. Сложеніе параллельныхъ силъ. Пара Пуансо. Пара вращенія. Сложеніе паръ вращенія. Вращенія и растяженія силъ въ различныхъ точкахъ пространства.

I. Сложеніе пересѣкающихся и параллельныхъ силъ. Пара Пуансо.

*Теорема X**). Равнодѣйствующая ER двухъ силъ AB и CD, направленія которыхъ пересѣкаются въ O, представляется по величинѣ и направленію геометрической суммой линій AB и CD. Направленіе равнодѣйствующей проходитъ чрезъ O, а точка ея приложенія E лежитъ на окружности OAC.

Доказательство. Пусть AB и CD — силы, O — общая точка ихъ прямыхъ (ч. 6). Перенесемъ силы въ O. Пусть OB' и OD' — новыя положенія силъ, OB'' и OD'' — силы, соотвѣтственно равныя и прямо-противоположныя силамъ AB и CD, образующія съ послѣдними двѣ пары (AB, OB'') и (CD, OD'') — растяженія данныхъ силъ въ O. Тогда

$$[AB]+[CD]\equiv[OB']+[OD']+(AB, OB'')+(CD, OD'').$$

Силы OB' и OD', приложенныя къ одной и той же точкѣ можно сложить по правилу параллелограмма. Если OR' — діагональ послѣдняго, выходящая изъ O, то

$$1)\quad [AB]+[CD]\equiv[OR']+(AB, OB'')+(CD, OD'').$$

Проведемъ кругъ чрезъ точки A, C и O. На діаметръ OO' послѣдняго опустимъ перпендикуляры $B''b$ и $D''d$ и примемъ OO' за общее плечо двухъ паръ, причемъ Ob — слагаю-

---

*) Möbius. Lehrbuch der Statik. § 234.

щая первой изъ нихъ, Od – слагающая второй. Тогда, по теоремѣ VII (прим.),

$$(AB,OB'')\equiv(Ob,OO'),\ (CD,OD'')\equiv(Od,OO');$$

слѣдовательно,

$$[AB]+[CD]\equiv[OR']+(Ob,OO')+(Od,OO')\equiv[OR']+$$
$$+(Ob+Od,OO'),$$

по теоремѣ IV. Откладывая на OO' отрѣзокъ $de=Ob$, получимъ окончательно:

$$2)\quad [AB]+[CD]\equiv[OR']+(Oe,OO').$$

Пусть теперь OE' — отрѣзокъ, равный и прямо-противоположный линіи OR', E — вторая точка встрѣчи послѣдней съ окружностью ACO. Линія OE', очевидно, есть геометрическая сумма линій OB'' и OD''; слѣдовательно, проекція OE' на OO' равна, по извѣстной теоремѣ, суммѣ проекцій на ту же прямую линій OB'' и OD'', т. е., по предыдущему, равна Oe. Отсюда мы заключаемъ, что уголъ $\angle E'eO$ — прямой. Принимая OE за плечо пары, слагающими которой служатъ OE' и ER, находимъ, какъ и выше:

$$(Oe,OO')\equiv(OE',ER).$$

Слѣдовательно, вмѣсто 2), получимъ

$$[AB]+[CD]\equiv[OR']+(OE',ER)\equiv[OR']+[OE']+[ER]\equiv[ER],$$

такъ какъ равныя и прямо-противоположныя силы OR' и OE', приложенныя къ одной и той же точкѣ O, взаимно-уничтожаются.

Полученное равенство доказываетъ теорему.

Слѣдствіе. Точка приложенія равнодѣйствующей ER дѣ-

литъ дугу AC такъ, что хорды AE и EC обратно пропорціональны величинамъ слагающихъ силъ.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{AE}{EC}=\frac{snAOE}{snEOC}.\ (\text{ч. } 6)$$

Но параллелограммъ $OB'R'D'$, въ которомъ

$$OB'=AB \text{ и } OD'=CD,$$

даетъ:

$$\frac{snAOE}{snEOC}=\frac{OD'}{OB'}=\frac{CD}{AB};$$

слѣдовательно,

$$\frac{AE}{EC}=\frac{CD}{AB}.\quad Q.\ E.\ D.$$

Теорема XI. Если двѣ силы AB и CD, направленія которыхъ пересѣкаются, повернутся въ плоскости (AB, CD) вокругъ своихъ точекъ приложеній въ одну и ту же сторону на одинъ и тотъ же уголъ α, не измѣняя своихъ величинъ, то ихъ равнодѣйствующая повернется въ той же плоскости, не измѣняя своей величины, въ ту же сторону и на тотъ же уголъ α.

Доказательство. Пусть AB, CD—силы, направленія которыхъ пересѣкаются въ O, ER—ихъ равнодѣйствующая (ч. 7). Если AB', CD', $E'R'$—новыя положенія силъ, O'—точка ихъ пересѣченія, то, по предположенію,

$$\angle BAB'=\angle DAD'.$$

Но

$$\angle BAB'=\angle OAO' \text{ и } \angle DAD'=\angle OCO',$$

слѣдовательно,

$$\angle OAO'=\angle OCO',$$

т. е., точки A, C, O и O' лежатъ на одной окружности, откуда

$$\angle AOC = \angle AO'C.$$

Отсюда и изъ того, что величины силъ не измѣнялись, мы заключаемъ, что величина новой равнодѣйствующей $E'R'$ равна величинѣ ER. Далѣе сила $E'R'$ должна пройти чрезъ точку O', причемъ начало E' лежитъ на AC такъ, что

$$\frac{AE'}{E'C} = \frac{CD'}{AB'} = \frac{CD}{AB} = \frac{AE}{CE},$$

по слѣдствію предыдущей теоремы. Изъ послѣдняго равенства мы заключаемъ, что E' совпадаетъ съ E. Затѣмъ изъ чертежа получаемъ:

$$\angle RER' = \angle OEO' = \angle OAO' = \angle OCO'.$$

Итакъ равнодѣйствующая ER, дѣйствительно, повернулась, не измѣняя своей величины, вокругъ своей точки приложенія въ одну и ту же сторону съ слагающими на одинъ уголъ съ послѣдними.

Примѣчаніе. Любопытно, что эта теорема имѣетъ свое толкованіе въ астатикѣ плоской неизмѣняемой системы*). Замѣчу вообще, что всѣ результаты нашихъ изслѣдованій могутъ быть приложены къ астатикѣ твердаго тѣла.

Теорема XII. Равнодѣйствующая ER двухъ параллельныхъ силъ AB и CD параллельна слагающимъ и приложена въ точкѣ E прямой AC. Если AB и CD направлены въ одну сторону, то ER направлена въ туже сторону, величина ея равна суммѣ величинъ слагающихъ, а точка E лежитъ между A и C такъ, что

$$\frac{AE}{EC} = \frac{CD}{AB}.$$

---

*) Ср. Möbius, loc. cit. § 115.

Если AB и CD направлены въ противоположныя стороны, то сила ER направлена въ сторону большей силы, величина ея равна разности величинъ слагающихъ, причемъ точка E лежитъ на продолженіи отрѣзка AC, ближе къ большей силѣ, такъ, что

$$\frac{AE}{EC}=\frac{CD}{AB}.$$

Эта теорема есть слѣдствіе теоремы X *).

Въ случаѣ равныхъ параллельныхъ и противо-положныхъ силъ AB и CD равнодѣйствующая ER равна нулю, а точка E лежитъ въ безконечности. Итакъ *совокупность двухъ равныхъ и параллельныхъ силъ, не лежащихъ на одной прямой и имѣющихъ противо-положныя направленія, не можетъ быть замѣнена одной силой.* Такую совокупность, какъ и въ первомъ выпускѣ, я назову *парой Пуансо.*

II. Сложеніе паръ вращенія. Пусть AB и CD — двѣ силы, равныя, параллельныя и прямо-противоположныя, причемъ прямая AC перпендикулярна къ общему направленію силъ AB и CD. Эту частную форму пары Пуансо я назову *парой вращенія.* Полное опредѣленіе и теорія этихъ паръ даны въ шестой главѣ перваго выпуска **). Такъ, разстояніе $AC=a$ есть плечо пары, произведеніе $AC\times AB$—моментъ пары. Кромѣ того, тамъ же было показано, какъ опредѣляется *сторона вращенія* пары. Пару вращенія будемъ обозначать символомъ $((X,a))$. Изъ теоремъ указанной главы отмѣтимъ лишь слѣдующія:

Теорема XIII. Пара Пуансо, общая величина слагающихъ которой есть X, а разстояніе послѣднихъ равно a, эквивалентна совокупности пары вращенія $((X,a))$ и пары растяженія $\pm(X,\alpha)$, гдѣ α — ортогональная проекція на общее на-

*) Ср. Вып. I; стр. 24—25.

**) Вып. I, стр. 26—37.

правленіе слагающихъ пары Пуансо разстоянія ихъ началъ. Эта теорема сводитъ изученіе пары Пуансо къ изученію пары вращенія.

Теорема XIV. Двѣ пары вращенія эквивалентны, если ихъ моменты геометрически равны.

Теорема XV. Совокупность двухъ паръ вращенія эквивалентна одной парѣ вращенія, моментъ которой есть геометрическая сумма моментовъ складываемыхъ паръ.

Наконецъ, если $G_1, G_2, ..$ — моменты данныхъ паръ, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, .. — cs'ы угловъ, образуемыхъ съ осями прямо-угольныхъ координатъ x, y, z прямыми $G_1, G_2, ..$, (G_1^x, G_1^y, G_1^z), .. —слагающія по осямъ послѣднихъ, то

$$\frac{\alpha_i}{G_i^x}=\frac{\beta_i}{G_i^y}=\frac{\gamma_i}{G_i^z}=\frac{1}{G_i}.$$

Пусть G_x, G_y и G_z, a, b, c — слагающіе по осямъ и cs'ы угловъ съ послѣдними момента G равнодѣйствующей пары, то

$$A)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a}{G_x}=\dfrac{b}{G_y}=\dfrac{c}{G_z}=\dfrac{1}{G} \\ G_x=\Sigma G_i\alpha_i,\ G_y=\Sigma G_i\beta_i,\ G_2=\Sigma G_i\gamma_i. \end{array} \right.$$

Эти формулы содержатъ всю теорію паръ вращенія.

III. Вращенія и растяженія силы, пары растяженія и пары вращенія въ различныхъ точкахъ пространства. Предыдущія изслѣдованія привели насъ къ новому сочетанію двухъ силъ, къ парѣ вращенія. Сила, пара растяженія и пара вращенія — вотъ три элемента, къ которымъ, какъ мы увидимъ дальше, приводится всякая система силъ, дѣйствующихъ на точки подобно-измѣняемой системы. Докажемъ теперь, что эти элементы не приводимы другъ къ другу, причемъ замѣтимъ

разъ на всегда, что система точекъ, къ которой относятся наши изслѣдованія, свободна.

Прежде всего, очевидно, что *сила P, приложенная къ точкѣ O, только тогда эквивалентна нулю, если величина силы равна нулю.*

Итакъ, если

$$P_0 \equiv o,$$

то

$$P = o.$$

Пусть теперь P_0 и Q_0—двѣ эквивалентныя силы, приложенныя къ одной и той же точкѣ O. По предположенію,

$$1) \quad P_0 \equiv Q_0.$$

Разложимъ P_0 по правилу параллелограмма на двѣ силы Q'_0 и P'_0, изъ которыхъ первая совпадаетъ съ Q_0 по величинѣ и направленію. Тогда

$$Q'_0 + P'_0 \equiv Q_0,$$

откуда

$$P'_0 \equiv o \text{ и } P' = o,$$

на основаніи предыдущаго. Отсюда мы заключаемъ, что *двѣ силы, приложенныя къ одной и той же точкѣ, только тогда эквивалентны, если величины и направленія силъ одинаковы.*

Разсмотримъ теперь эквиваленцію:

$$P_0 + (AB, CD) \equiv o$$

Пару растяженія (AB, CD) можно замѣтить эквивалентной парой, слагающая которой были-бы равны по величинѣ силъ P_0. Пусть это новая пара будетъ (ab, cd). Перенесемъ послѣднюю такъ, чтобы точка приложенія a ея слагающей ab совпала съ O, а сама слагающая ab оказалась прямо-противо-

положной силѣ P_0. Тогда написанная выше эквиваленція обратится въ слѣдующую

$$P_0 + ab + cD \equiv o.$$

Но совокупность силъ P_0 и ab, приложенныхъ къ одной и той же точкѣ O, имѣющихъ равныя величины и прямо-противоположныя направленія, эквивалентна нулю; слѣдовательно,

$$CD \equiv o \text{ и } CD = o.$$

Итакъ *эквиваленція*:

$$P_0 + (AB, CD) \equiv o,$$

влечетъ за собой слѣдующія двѣ:

$$P_0 \equiv o, \ (AB, CD) \equiv o.$$

Отсюда мы заключаемъ, что *сила* P_0 *и пара* (AB, CD) *не могутъ быть эквивалентны.* Въ самомъ дѣлѣ, если

$$(AB, CD) \equiv P_0,$$

то, введя силу P'_0, равную по величинѣ и прямо-противоположную силѣ P, получимъ:

$$(AB, CD) + P'_0 \equiv P_0 + P'_0 \equiv o,$$

что на основаніи предыдущаго даетъ:

$$P' = P = o, \ (AB, CD) \equiv o.$$

Мы видѣли выше, что пара Пуансо не можетъ быть замѣнена одной силой. Такъ какъ пара вращенія есть лишь частная форма пары Пуансо, то, слѣдовательно, *пара вращенія*

$((X,a))$ *и сила* P_0 *не могутъ быть эквивалентны другъ другу.* Отсюда, какъ и выше, заключаемъ, что *эквиваленція*:

$$P_0+((X,a))\equiv o,$$

влечетъ за собой:

$$P_0=o,\ ((X,a))\equiv o.$$

Намъ остается разсмотрѣть эквиваленцію:

$$(X,a)+((Y,b))\equiv o.$$

Эта эквиваленція не возможна, если моменты обѣихъ паръ не равны отдѣльно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, совокупность (X,a) и $((Y,b))$ эквивалентна, по теоремѣ XIII, парѣ Пуансо, которая не эквивалентна нулю. Итакъ *эквиваленція*:

$$(X,a)+((Y,b))\equiv o,$$

влечетъ за собой:

$$(X,a)\equiv o,\ ((Y,b))\equiv o.$$

Разсмотримъ наконецъ эквиваленцію:

$$P_0+(X,a)+((Y,b))\equiv o.$$

Совокупность P_0 и (X,a) эквивалентна силѣ P, перенесенной въ нѣкоторую точку O' прямой, вдоль которой дѣйствуетъ сила P_0. Итакъ

$$P_0+(X,a)\equiv P_{0'};$$

слѣдовательно, вмѣсто предыдущей эквиваленціи, получимъ:

$$P_{0'}+((Y,b))\equiv o.$$

Откуда на основаніи только что сказаннаго получимъ:

$$P_{0'}\equiv o,\ ((Y,b))\equiv o.$$

Слѣдовательно,

$$P_0+(X,a)\equiv o,$$

откуда

$$P_0\equiv o,\ (X,a)\equiv o.$$

Итакъ *эквиваленція*:

$$P_0+(X,a)+((Y,b))\equiv o,$$

даетъ:

$$P_0\equiv o,\ (X,a)\equiv o \text{ и } ((Y,b))\equiv o.$$

Отсюда, очевидно, вытекаетъ, что эквиваленція:

$$P_0+(X,a)+((Y,b))\equiv P_0'+(X',a')+((Y',b'))$$

влечетъ за собой:

$$P_0\equiv P_0',\ (X,a)\equiv(X',a) \text{ и } ((Y,b))\equiv((Y',b')).$$

Пусть теперь P_A — сила, O — какая-нибудь точка пространства (ч. 8). Опустимъ изъ O перпендикуляръ Oa на направленіе силы и перенесемъ послѣднюю въ a. Тогда

$$P_A\equiv P_a+(P_a,Aa).$$

Проведемъ чрезъ O прямую, параллельную aA, и приложимъ вдоль нея двѣ равныя и прямо-противоположныя силы P_0' и P_0'', общая величина которыхъ равна величинѣ силы P. Тогда

$$\alpha)\quad P_A\equiv P_0'+(P_A,Aa)+((P_a,Oa)).$$

Сила P_0' есть сила P_A, перенесенная параллельно самой себѣ въ O. Мы видимъ, что такой переносъ силы P_A даетъ пары (P_A,Aa) и $((P_a,Oa))$. Моменты Π_0 и M_0 послѣднихъ имѣютъ слѣдующія выраженія:

$$\beta)\quad \Pi_0=P.Pa,\ M_0=P.Aa,$$

причемъ моментъ M_0 перпендикуляренъ къ плоскости (O,P_A).

Вышеупомянутый переносъ силы P_A въ точку O назовемъ приведеніемъ силы къ O. Точка O есть начало приведенія, сила P'_0, пары (P_A, Aa) и $((P_a, Oa))$ — элементы послѣдняго, причемъ моменты послѣднихъ назовемъ растяженіемъ и вращеніемъ силы A_A въ точкѣ O. Назовемъ плоскость перпендикулярную къ направленію силы P_A въ A, центральной плоскостью силы. Формулами α) и β) доказывается слѣдующая теорема:

Теорема XVI. Приведеніе силы P_A къ точкѣ O даетъ три элемента: силу P'_0, пару растяженія (Π_0) и пару вращенія $((M_0))$. Сила P'_0 есть сила P_A, перенесенная параллельно самой себѣ въ O. Растяженіе Π_0 пропорціонально разстоянію начала O отъ центральной плоскости силы P_A и мѣняетъ знакъ при переходѣ точки O съ одной стороны плоскости на другую. Вращеніе M_0 пропорціонально разстоянію начала O отъ прямой, содержащей силу. Моментъ M_0 перпендикуляренъ къ плоскости (O, P_A).

Слѣдствіе I. Во всѣхъ точкахъ плоскости, параллельной центральной плоскости, сила P_A вызываетъ одинаковыя растяженія. Въ точкахъ центральной плоскости это растяженіе равно нулю.

Слѣдствіе II. Во всѣхъ точкахъ прямой, параллельной направленію силы P_A, послѣдняя вызываетъ одинаковыя вращенія. Въ точкахъ прямой, содержащей силу, это вращеніе равно нулю.

Назовемъ *лучемъ* прямую, перпендикулярную къ моментамъ вращеній всѣхъ своихъ точекъ.

Теорема XVII. Всякая прямая, встрѣчающая прямую, вдоль которой дѣйствуетъ сила P, есть лучъ.

Въ самомъ дѣлѣ, моментъ вращенія въ O перпендикуляренъ къ плоскости (O, P) и, слѣдовательно, перпендикуляренъ къ прямой, проходящей чрезъ O и встрѣчающей P.

Пусть теперь (P_A, P_B) — пара растяженія. По опредѣленію,

$$(P_A, P_B) \equiv P_A + P_B.$$

Приведя каждую изъ слагающихъ къ какой-нибудь точкѣ O, получимъ:

$$P_A \equiv P_0' + (\Pi_0') + ((M_0')); \quad P_B \equiv P_0'' + (\Pi_0'') + ((M_0'')),$$

гдѣ символы (Π_0') и $((M_0'))$ обозначаютъ пары растяженія и вращенія соотвѣтственно. Отсюда находимъ:

$$P_A + P_B \equiv (P_A, P_B) \equiv P_0' + P_0'' + (\Pi_0') + (\Pi_0'') + ((M_0')) + ((M_0''))$$

или

$$P_0' + P_0'' + (\Pi_0') + (\Pi_0'') - (P_A, P_B) + ((M_0')) + (M_0'') \equiv o.$$

Примѣняя къ этой эквиваленціи сказанное выше, получимъ:

$$P_0' + P_0'' \equiv o, \quad M_0' + M_0'' \equiv o, \quad (\Pi_0') + (\Pi_0'') \equiv (P_A, P_B).$$

Вторая изъ этихъ формулъ показываетъ, что *пара растяженія вовсе не вызываетъ вращенія въ какой-нибудь точкѣ пространства*. Формулу третью можно формулировать слѣдующимъ образомъ: *пара растяженія вызываетъ во всякой точкѣ пространства одинаковое растяженіе, моментъ котораго равенъ моменту пары.*

Очевидно, это лишь иная формулировка теоремы I. Точно также мы докажемъ, что *пара вращенія не вызываетъ растяженія въ какой-нибудь точкѣ пространства, а лишь вращеніе, моментъ котораго геометрически одинаковъ съ моментомъ приводимой пары.*

Пусть теперь C—система силъ $P_1, P_2, \ldots P_n$. Проведемъ каждую силу къ какой-нибудь точкѣ O. Тогда, по предыдущему, получимъ:

$$P_1 \equiv P_0' + (\Pi_0') + ((M_0')), \ldots P_n \equiv P_0^{(n)} + (\Pi_0^{(n)}) + ((M_0^{(n)})),$$

откуда

$$C \equiv \Sigma P_i \equiv \Sigma P_0^{(i)} + \Sigma(\Pi^{i}) + \Sigma((M_0^{(i)})).$$

Совокупность силъ $P_0^{(i)}$, приложенныхъ къ одной и той-же точкѣ O, можетъ быть замѣчена одной силой R_0, приложенной къ той-же точкѣ. Равнодѣйствующая R_0 аналитически опредѣляется формулами $A)$ этой главы. Геометрически величина и направленіе R_0 дается замыкающей многоугольника, стороны котораго геометрически равны силамъ системы C*). Совокупность паръ растяженій $(\Pi_0^{(i)})$ эквивалентна, какъ мы видѣли, одной парѣ (Π_0), моментъ которой Π_0 есть алгебрическая сумма слагающихъ моментовъ Π_0^i. Наконецъ $\Sigma((M_0^{(i)}))$ можетъ быть замѣнена одной парой вращенія $((M_0))$. Моментъ послѣдней M_0 аналитически опредѣляется формулами $B)$ настоящей главы. Геометрически онъ опредѣляется, какъ замыкающая многоугольника, стороны котораго геометрически равны слагающимъ моментамъ $M_0^{(i)}$.

На основаніи всего сказаннаго получаемъ:

$$C \equiv R_0 + (\Pi_0) + ((M_0)).$$

Такую замѣну системы C силой, парой растяженія и парой вращенія назовемъ приведеніемъ системы C къ точкѣ O. Послѣдняя — есть начало приведенія, R_0, (Π_0) и $((M_0))$ — элементы послѣдняго. Положимъ, что даны двѣ эквивалентныя системы силъ C и C'. Приведемъ каждую изъ нихъ къ какой-нибудь точкѣ O. Если R_0, (Π_0) и $((M_0))$, R_0', (Π_0') и $((M_0'))$ — соотвѣтствующіе элементы приведенія, то

$$C \equiv R_0 + (\Pi_0) + ((M_0)),\ C' \equiv R_0' + (\Pi_0') + ((M_0)).$$

Но, по предположенію,

$$C \equiv C',$$

слѣдовательно,

$$R_0 + (\Pi_0) + ((M_0)) \equiv R_0' + (\Pi_0') + ((M_0')).$$

---

*) Вып. I, стр. 9, глава II.

Послѣдняя эквиваленція влечетъ за собой, по предыдущему, слѣдующія:

$$R_0 \equiv R'_0,\ (\Pi_0) \equiv (\Pi'_0),\ ((M_0)) \equiv ((M'_0)),$$

что даетъ намъ теорему:

Теорема XVIII. Двѣ эквивалентныя системы силъ имѣютъ одинаковые элементы приведенія во всякомъ началѣ приведенія.

Слѣдствіе. Двѣ силы P_A и Q_B эквивалентны лишь въ томъ случаѣ, если онѣ приложены къ одной и той же точкѣ, причемъ силы должны быть геометрически равны.

Для доказательства приведемъ силу Q_B къ точкѣ A. Пусть Q_A, (Π_A) и $((M_A))$—элементы приведенія. Тогда

$$Q_B \equiv P_A \equiv Q_A + (\Pi_A) + ((M_A)),$$

откуда, по предыдущему, слѣдуетъ:

$$P_A \equiv Q_A;\ \ (\Pi_A) \equiv o,\ ((M_A)) \equiv o.$$

Первая изъ этихъ формулъ показываетъ, что силы P_A и Q_A одинаковы по величинѣ и направленію.

Изъ второй, въ силу β), вытекаетъ, что центральныя плоскости силъ P_A и Q_B совпадаютъ. Наконецъ послѣдняя, въ силу тѣхъ-же формулъ β), доказываетъ совпаденіе прямыхъ, вдоль которыхъ дѣйствуютъ силы P_A и Q_B. *Q. E. D.*

Пусть C — система силъ, эквивалентная совокупности системъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, т. е.,

$$C \equiv \Sigma C_i.$$

Пусть $R_0^{(i)}$, $(\Pi_0^{(i)})$ и $((M_0^{(i)}))$ — элементы приведенія къ точкѣ O слагающей системы C_i, R_0, (Π_0) и $((M_0))$ — элементы приведенія къ той же точкѣ равнодѣйствующей системы C.

Предыдущая эквиваленція перейдетъ въ слѣдующую:

$$R_0+(\Pi_0)+((M_0))\equiv\Sigma R_0^{(i)}+\Sigma(\Pi_0^{(i)})+\Sigma((M_0^{(i)})).$$

Складывая силы $R_0^{(i)}$ въ одну R_0', пары растяженія (Π_0^{i}) въ одну (Π_0') и пары вращенія $((M_0^{(i)}))$ въ одну $((M_0'))$, найдемъ:

$$R_0+(\Pi_0)+(M_0)\equiv R_0'+(\Pi_0')+((M_0')),$$

откуда, какъ и выше,

$$R_0\equiv R_0',\ \ (\Pi_0)\equiv(\Pi_0')\ \text{и}\ ((M_0))\equiv((M_0')).$$

Замѣтимъ, что сила R_0' есть геометрическая сумма силъ $R_0^{(i)}$, моментъ Π_0' есть алгебрическая, а моментъ M_0' — геометрическая сумма моментовъ $M_0^{(i)}$. Послѣдними формулами доказывается слѣдующая теорема:

Теорема XIX. Моментъ растяженія въ точкѣ O равнодѣйствующей системы C равенъ алгебрической суммѣ моментовъ растяженія въ O слагающихъ системъ $C^{(i)}$. Моментъ вращенія въ O системы C равенъ геометрической суммѣ моментовъ вращенія въ той же точкѣ O слагающихъ системъ $C^{(i)}$.

Эти двѣ теоремы чрезвычайно важны для послѣдующаго.

ГЛАВА IV.

Плоская система силъ. Система силъ, лежащихъ въ пространствѣ. Винтъ.

Перейдемъ къ приложеніямъ теоремъ предыдущей главы. Но предварительно разсмотримъ частный случай сложенія силы и пары вращенія.

Теорема XX. Совокупность силы P_0 и пары вращенія $((M))$, моментъ которой перпендикуляренъ къ направленію

силы, всегда эквивалентна одной силѣ $P'_{0'}$. Силы P_0 и $P'_{0'}$ геометрически равны, причемъ плоскость $(P_0, P'_{0'})$ перпендикулярна къ моменту M, а прямая OO' перпендикулярна къ общему направленію силъ P_0 и $P'_{0'}$.

Доказательство. Пусть P_0 и $((M_0))$ — данныя сила и пара вращенія, моментъ которой M перпендикуляренъ къ направленію силы P_0. Проведемъ чрезъ послѣднюю плоскость α, перпендикулярную къ прямой M. Плоскость α параллельна, по предположенію, плоскости, въ которой лежитъ пара (M_0). Перенесемъ послѣднюю на α и здѣсь замѣнимъ эквивалентной парой (P_A, P_B), слагающія которой имѣютъ одинаковую величину съ силой P_0. Слѣдовательно, по теоремѣ XIV,

$$P.AB = M.$$

Новую пару $((P_A, P_B))$ повернемъ въ плоскости α, не измѣняя длины плеча AB и величины слагающихъ, такъ, чтобы точка приложенія слагающей P_A совпала съ O, а сама слагающая оказалась прямопротивоположной силѣ P_0. Тогда

$$P_0 + ((M_0)) \equiv P_0 + ((P_A, P_B)) \equiv P_0 + P_A + P_B,$$

причемъ, такъ какъ OA равно нулю, то

$$AB = OB.$$

Но равныя и прямопротивоположныя силы P_0 и P_A приложены теперь къ одной и той же точкѣ; слѣдовательно,

$$P_0 + P_A \equiv o \quad \text{и} \quad P_0 + ((M_0)) \equiv P_B,$$

причемъ OB перпендикулярно къ P_A. Q. E. D.

Примѣчаніе. Разстояніе OB равнодѣйствующей силы P_B отъ P_A дается формулой:

$$OB = AB = \frac{M}{P}.$$

Слѣдствіе. Совокупность пары Пуансо и силы P_0, параллельной плоскости пары, эквивалентна силѣ P_0, перенесенной параллельно самой себѣ въ плоскости, параллельной плоскости пары.

Доказательство. По теоремѣ IV, пару Пуансо, лежащую въ плоскости α, можно замѣнить совокупностью пары вращенія $((M))$, плоскость которой параллельна α, и пары растяженія (П). Но, по предположенію, плоскость α параллельна P_0; слѣдовательно, моментъ M перпендикуляренъ къ P_0. Откуда, на основаніи доказанной теоремы,

$$P_0 + ((M)) \equiv P_{0_1},$$

гдѣ сила P_{0_1} геометрически равна силѣ P_0, причемъ плоскость (P_0, P_{0_1}) параллельна α. Слѣдовательно,

$$P_0 + ((M)) + (\Pi) \equiv P_{0_1} + (\Pi) \equiv P_{0'},$$

гдѣ $P_{0'}$—сила, дѣйствующая вдоль прямой P_{0_1}. *Q. E. D.*

I. Плоская система силъ. Пусть C — плоская система силъ $P_1, P_2, .. P_n$, приложенныхъ къ точкамъ 1, 2,.. n. Для приведенія этой системы къ простѣйшему виду замѣтимъ слѣдующее. Двѣ силы P_i и P_k системы лежатъ въ одной плоскости; слѣдовательно, ихъ можно сложить, причемъ результатомъ сложенія будетъ, одна сила или пара Пуансо, которая въ частномъ случаѣ можетъ обратиться въ пару вращенія или пару растяженія. Наконецъ, если силы P_i и P_k приложены къ одной и той же точкѣ, причемъ силы эти равны и прямопротивоположны, то совокупность ихъ эквивалентна нулю. Основываясь на этомъ замѣчаніи, сложимъ силы P_1 и P_2 въ одну R_a. Если, вмѣсто R_a, получимъ пару Пуансо или ея частные виды, то, по слѣдствію доказанной только что теоремы, вмѣсто совокупности пары Пуансо и силы P_3, получимъ одну силу R'_b. Продолжая точно также, пока не исчерпаемъ всѣхъ силъ системы, мы, очевидно, приведемъ систему C или къ одной силѣ R_0,

или къ парѣ Пуансо. Въ частномъ случаѣ, послѣдняя можетъ оказаться парой вращенія, парой растяженія или даже эквивалентной нулю, если точки приложеній ея слагающихъ совпадутъ въ одну.

Замѣтимъ, что приведеніе системы C не зависитъ отъ порядка, въ которомъ складывались силы системы. Это прямо вытекаетъ изъ результатовъ предыдущей главы.

Разберемъ теперь отдѣльно указанные частные случаи.

A. Случай, когда система эквивалентна одной силѣ R_0. Назовемъ точку O центральной точкой системы C. Величина силы R_0 дается геометрической суммой силъ P. Это слѣдуетъ изъ доказательства теоремы XIX. Прилагая къ разсматриваемому случаю эту теорему, а также теорему XVI, получаемъ:

Теорема XXI. Если геометрическая сумма силъ плоской системы не равна нулю, то система эквивалентна одной силѣ R_0, приложенной къ центральной точкѣ системы. Въ этомъ случаѣ, растяженія системы одинаковы во всѣхъ точкахъ прямой ν, лежащей въ плоскости системы и перпендикулярной къ силѣ R_0. Растяженія системы равны нулю въ точкахъ прямой ν_0 пересѣченія плоскости системы съ центральной плоскостью силы R_0. Вращенія системы одинаковы во всѣхъ точкахъ прямой μ, лежащей въ плоскости системы и параллельной силѣ R_0. Эти вращенія равны нулю въ точкахъ прямой μ_0, вдоль которой дѣйствуетъ R_0. Въ центральной точкѣ O вращеніе и растяженіе системы одновременно равны нулю.

Мы получили такимъ образомъ теоремы XVI и XVII перваго выпуска. Тамъ прямыя μ_0 и ν_0 были названы нулевыми прямыми.

B. Случай, когда система эквивалентна парѣ Пуансо. Замѣчая, что пара Пуансо распадается на пару вращенія и пару вращенія, мы въ силу той же теоремы XIX получаемъ:

Теорема XXII. Если плоская система силъ эквивалентна парѣ Пуансо, то растяженія и вращенія системы силъ одинаковы во всѣхъ точкахъ плоскости системы.

Примѣчаніе. Въ частномъ случаѣ, если, вмѣсто пары Пуансо, получимъ пару вращенія, то во всѣхъ точкахъ плоскости системы растяженія равны нулю; если пара Пуансо обращается въ пару растяженія, то равны нулю вращенія.

Нами было показано *), какъ по вращеніямъ и растяженіямъ въ трехъ точкахъ судить о томъ, чему эквивалентна система силъ. Равнымъ образомъ, было дано **) построеніе центральной точки и нулевыхъ прямыхъ. Отсылая читателя къ указаннымъ мѣстамъ перваго выпуска, приведемъ здѣсь лишь формулы, въ которыхъ заключается вся аналитическая теорія плоской системы силъ ***).

Пусть Ox, Oy — прямоугольная система координатъ, лежащая въ одной плоскости съ системой силъ. Если A и B — слагающія по осямъ равнодѣйствующей силы R, образующей съ осями уголъ a, x_0, y_0 — координаты центральной точки, то, полагая:

$$M_0=\Sigma(Xx+Yy),\ G_0=\Sigma(xY-yX),$$

найдемъ:

$$\frac{AM_0+BG_0}{A^2+B^2},\ y_0=\frac{BM_0-AG_0}{A^2+B^2},$$

причемъ

$$A=\Sigma X,\ B=\Sigma Y,\ R^2=A^2+B^2,\ tga=\frac{B}{A},$$

гдѣ (X,Y) — слагающія силы P, дѣйствующей на точку (x,y). Уравненія нулевыхъ прямыхъ будутъ:

$$Ax+By=M_0,\ Bx-Ay=G_0.$$

---

*) Вып. I, стр. 44.

**) Ibid. стр. 43–44.

***) Ibid. стр. 46—48, формулы β, γ, δ, ε, ζ, a и b.

Система силъ эквивалентна нулю, т. е., находится въ равновѣсіи, если

$$R = M_0 = G_0 = o,$$

т. е., если

$$\Sigma X = o,\ \Sigma Y = o,\ \Sigma(xX + yY) = o,\ \Sigma(xY - yX) = o.$$

Эти условія равновѣсія, какъ мы уже сказали въ введеніи, были впервые даны Мэбіусомъ въ его второй работѣ.

II. Система силъ въ пространствѣ. Пусть C—система силъ P, дѣйствующихъ въ пространствѣ на точки подобно-измѣняемой системы. Мы видѣли въ предыдущей главѣ, что

$$C \equiv R_0 + (\Pi_0) + ((M_0)),$$

гдѣ R_0, (Π_0) и $((M_0))$ — элементы приведенія системы C къ произвольной точкѣ O. Изъ даннаго тамъ же опредѣленія этихъ элементовъ вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема XXIII. Силы, приложенныя къ точкамъ подобноизмѣняемой системы, всегда могутъ быть замѣнены совокупностью одной силы R_0, приложенной къ произвольной точкѣ O системы, пары растяженія (Π_0) и пары вращенія $((M_0))$, моментъ которой M_0 вообще не параллеленъ направленію силы R_0. Величина и направленіе силы R_0 не зависятъ отъ выбора точки O.

Это —обобщеніе соотвѣтствующей теоремы Пуансо*).

Разложимъ $((M_0))$ на слагающія $((g_0))$ и $((g_1))$, причемъ моментъ g_0 параллеленъ направленію силы R_0, а g_1 перпендикуляренъ къ послѣдней. Эквиваленція

$$C \equiv R_0 + (\Pi_0) + ((M_0))$$

---

*) Poinsot. Eléments de Statique. 8-me éd Paris 1842, p. 77.

перейдетъ въ слѣдующую:

$$C \equiv R_0 + (\Pi_0) + ((g_0)) + ((g_1)).$$

Совокупность силъ R_0 и пары $((g_1))$ эквивалентна силѣ, пересенной параллельно самой себѣ въ нѣкоторую точку O' (теор. XX). Итакъ

$$C \equiv R_{0'} + (\Pi_0) + ((g_0)).$$

Совокупность силы $R_{0'}$ и пары (Π_0) эквивалентна силѣ, перенесенной по прямой, вдоль которой она дѣйствуетъ, въ нѣкоторую точку ω. Слѣдовательно,

$$C \equiv R_\omega + ((g_0)).$$

Замѣчая, что во всѣхъ предыдущихъ преобразованiяхъ сила R оставалась параллельной самой себѣ, мы заключаемъ:

Теорема XXIV. Силы, дѣйствующiя на точки подобно-измѣняемой системы, могутъ быть замѣнены одной силой и парой вращенiя, моментъ которой параллеленъ силѣ.

Это—обобщенiе соотвѣтствующей теоремы Пуансо *).

Точку ω назовемъ центральной точкой системы, прямую, вдоль которой дѣйствуетъ сила R_{ω},—центральной осью.

Теорема XXV **). Приведенiе системы къ центральной точкѣ единственно.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ существованiе двухъ центральныхъ точекъ ω и ω', причемъ R_ω и $((g))$—соотвѣтствующiе имъ элементы приведенiя системы силъ C. Эквиваленцiи:

$$C \equiv R_\omega + ((g)), \quad C \equiv R'_{\omega'} + ((g')),$$

даютъ:

$$R_\omega + ((g)) \equiv R'_{\omega'} + ((g')).$$

---

*) Poinsot. loc. cit. p. 79.

**) Вып. I, стр. 65, примѣч.

Изъ сказаннаго въ предыдущей главѣ вытекаетъ, что эта эквиваленція влечетъ за собой двѣ слѣдующхъ:

$$R_\omega \equiv R'_{\omega'}, \quad ((g)) \equiv ((g')).$$

Первая показываетъ, что точки ω и ω' совпадаютъ и что, кромѣ того, силы R_ω и $R'_{\omega'}$ одинаковы по величинѣ и направленію; изъ второй слѣдуетъ геометрическое равенство моментовъ g и g'. *Q. E. D.*

Назовемъ *винтомъ* совокупность силы R_ω и пары $((g))$, моментъ которой параллеленъ направленію силы. Точка ω есть *центръ* винта, прямая O, вдоль которой дѣйствуетъ сила R_ω,— винтовая *ось*, плоскость (ω), перпендикулярная къ O въ ω,— *центральная* или *нулевая* плоскость винта. Отношеніе $\frac{g}{R}$ момента пары къ величинѣ силы называется винтовымъ параметромъ. Назовемъ его чрезъ p. Винтъ параметра p, центръ котораго въ ω, осью служитъ прямая O, а слагающая сила есть R_ω, будемъ обозначать символомъ (R_ω, p_0).

Теорему XXIV можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Силы P, дѣйствующія на точки подобно-измѣняемой системы, могутъ быть замѣнены винтомъ, приложеннымъ къ нѣкоторой точкѣ. Слагающая сила винта равна, по величинѣ и направленію, замыкающей многоугольника, стороны котораго соотвѣтственно равны и параллельны силамъ P.

Изъ даннаго выше построенія слагающей пары винта слѣдуетъ, что моментъ этой пары геометрически равенъ ортогональной проекціи на направленіе замыкающей многоугольника момента вращенія системы силѣ въ любой точкѣ пространства. Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема XXVI *). Проекція на направленіе оси равно-

---

*) Вып. I, стр. 65, теор. XXVIII, сл.

дѣйствующаго винта момента вращенія системы силъ въ какой-нибудь точкѣ пространства есть величина постоянная, равная моменту слагающей пары винта.

Пусть (R_ω, p_0)—равнодѣйствующій винтъ. Найдемъ элементы приведенія послѣдняго къ какой-нибудь точкѣ a (ч. 10). Опустимъ для этого изъ a перпендикуляръ aa' на винтовую ось и перенесемъ силу R_ω въ a'. Тогда

$$R_\omega = R_{a'} + (\pi_a),$$

гдѣ (π_a) обозначаетъ пару растяженія $(R_0, \omega a')$. Чрезъ a проведемъ прямую, параллельную оси винта, и приложимъ въ a вдоль проведенной прямой двѣ равныя и прямо-противоположныя силы R'_a и R''_a, общая величина которыхъ равна величинѣ силы $R_{a'}$. Введенная пара эквивалентна нулю. Но теперь, вмѣсто одной силы $R_{a'}$, мы получили силу R'_a и пару вращенія $(R_{a'}, R''_a)$. Обозначимъ послѣднюю чрезъ $((g_1))$. На основаніи предыдущаго.

$$R_\omega = R'_a + (\pi_a) + ((g_1)).$$

Сложимъ теперь съ парой $((g_1))$ винтовую пару вращенія $((g_\omega))$, моментъ которой g дается формулой:

$$\alpha) \quad g = pR.$$

Моменты g и g_1 обѣихъ паръ взаимно-перпендикулярны. Въ самомъ дѣлѣ, первый параллеленъ винтовой оси, а второй перпендикуляренъ къ послѣдней, какъ это слѣдуетъ изъ построенія.

Построимъ при a прямыя ag_1 и ag, геометрически равныя моментамъ складываемыхъ паръ. Діагональ aM прямоугольника ag_1Mg будетъ моментомъ равнодѣйствующей пары $((M_a))$.

Все вышесказанное даетъ намъ:

$$(R_\omega, p_0) = R'_a + (\pi_a) + ((M_a)),$$

причемъ моментъ π_a и M_a опредѣляются формулами:

$$\beta)\quad \pi_a = R.\omega a',\ \ M_a^2 = g_1^2 + g^2,\ \ g_1 = R.aa'.$$

Если α—уголъ Mag, то

$$\gamma)\quad tg\alpha = \frac{g_1}{g} = \frac{aa'}{p},\quad M_a^2 = R^2(aa'^2 + p^2),$$

въ силу α) и β). Найденными формулами доказывается слѣдующія теоремы:

*Теорема XXVII**). Растяженія системы силъ, дѣйствующихъ на точки подобно-измѣняемой системы, одинаковы во всѣхъ точкахъ плоскости, параллельной центральной плоскости равнодѣйствующаго винта. Въ точкахъ центральной плоскости эти растяженія равны нулю.

*Теорема XXVIII***). Моменты вращенія геометрически одинаковы во всѣхъ точкахъ прямой, параллельной оси равнодѣйствующаго винта. Уголъ момента вращенія съ осью послѣдняго равенъ нулю лишь въ точкахъ оси и равенъ прямому въ безконечно-удаленныхъ точкахъ.

Эти теоремы—основныя. Прежде, чѣмъ перейти къ ихъ приложеніямъ, напомнимъ главные результаты аналитической теоріи интересующаго насъ вопроса***).

Пусть O — начало прямоугольныхъ координатъ x, y, z. P_A—одна изъ силъ системы C, X, Y, Z — слагающія силы P, x, y, z — координаты точки A. Если R_0, (Π_0) и $((M_0))$ — элементы приведенія системы силъ къ O, то

$$A)\quad C \equiv R_0 + (\Pi_0) + ((M_0)).$$

---

*) Вып. I, теор. XXV и XXV.

**) Ibid., стр. 68.

***) Ibid., стр. 72—80, форм. 1, 2, 2′, 3, 2″ и k.

Положимъ, что A, B, C—слагающія силы R, L, M, N—пары M_0. Тогда

$$B)\left\{\begin{array}{c} A=\Sigma X,\ B=\Sigma Y,\ C=\Sigma Z,\ R^2=A^2+B^2+C^2; \\ L=\Sigma(yZ-xY),\ M=\Sigma(zX-xZ),\ N=\Sigma(xY-yX); \\ M_0^2=L^2+M^2+N^2 \\ \Pi_0=\Sigma(xX+yY+zZ)=\Sigma P\rho cs(P,\rho), \end{array}\right.$$

гдѣ ρ — разстояніе точки приложенія A силы P_A отъ начала координатъ.

Уравненія центральныхъ плоскости и оси суть:

$$C)\quad Ax+By+Cz=\Pi_0,\ \frac{x-\xi}{A}=\frac{y-\eta}{B}=\frac{z-\zeta}{C},$$

гдѣ величины ξ, η, ζ опредѣляются формулами:

$$D)\quad R^2\xi=BN-CM,\ R^2\eta=CL-AN,\ R^2\zeta=AM-BL.$$

Для координатъ x_0, y_0, z_0—центральной точки ω и момента M слагающей пары равнодѣйствующаго винта будемъ имѣть:

$$E)\left\{\begin{array}{c} R^2x_0=AM_0+BN-CM,\ R^2y_0=BM_0+ \\ +CL-AN,\ R^2z_0=CM_0+AM-BL, \\ MR=AL+BM+CN. \end{array}\right.$$

Изъ A) вытекаетъ, что система C эквивалентна нулю, если одновременно:

$$R_0\equiv o,\ (\Pi_0)\equiv((M_0))\equiv o,$$

что даетъ слѣдующія условія равновѣсія:

$$\Sigma X=o,\ \Sigma Y=o,\ \Sigma Z=o,\ \Sigma(yZ-zY)=o,\ \Sigma(zX-xZ)=o,$$
$$\Sigma(xY-yX)=o,$$

$$\Sigma(xX+yY+zZ)=\Sigma P\rho cs(P,\rho)=o.$$

Эти условія были впервые даны Мэбіусомъ, какъ мы уже сказали въ введеніи.

Пусть ab — какая-нибудь прямая (черт. 11), R_a, (Π_a) и $((M_a))$ — элементы приведенія системы силъ C къ точкѣ a. По опредѣленію,

$$\alpha)\quad C\equiv R_a+(\Pi_a)+((M_a)).$$

Приведемъ систему C къ точкѣ b. Для этого опустимъ перпендикуляръ bb' на R_a и перенесемъ силу R_a въ b'. Тогда

$$\beta)\quad R_a=R_{b'}+(R_a,\ ab').$$

Затѣмъ чрезъ b проведемъ прямую, параллельную направленію силы R_a, и приложимъ въ b вдоль проведенной прямой двѣ равныхъ прямо-противоположныхъ силы R'_b и R''_b, общая величина которыхъ равна величинѣ силы R_a. Введенная пара силъ эквивалентна нулю; слѣдовательно,

$$\gamma)\quad R_{b'}\equiv R_{b'}+R'_b+R''_b\equiv R'_b+((R_{b'},\ b'b)),$$

такъ какъ силы $R_{b'}$ и R''_b, очевидно, составляютъ пару вращенія. На основаніи α), β) и γ),

$$C\equiv R'_b+(\Pi_a)+(R_a,\ ab')+((M_a))+((R_{b'},\ b'b)).$$

Совокупность паръ растяженій (Π_a) и (R_a, ab') эквивалентна одной парѣ (Π_b), моментъ которой Π_b есть алгебрическая сумма моментовъ первыхъ двухъ. Равнымъ образомъ

совокупность паръ вращенія $((M_{a'}))$ и $((R_{b'}, b'b))$ эквивалентна одной парѣ $((M_b))$, моментъ которой M_b есть геометрическая сумма моментовъ первыхъ двухъ. Итакъ

$$C \equiv R'_b + (\Pi_b) + ((M_b)).$$

Построимъ моментъ M_b. Пусть N_b—моментъ пары $((R_{b'}, b'b))$ и bb_1 — прямая, геометрически равная моменту M_a. Діагональ M_b параллелограмма bb_1MN есть искомый моментъ M_b.

Замѣтимъ, что моментъ N_b перпендикуляренъ къ плоскости bab' и, слѣдовательно, къ прямой ab. Отсюда мы заключаемъ, что проекція момента M_b на ab равна проекціи прямой bb_1. Но послѣдняя геометрически равна моменту M_a, откуда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Теорема XXIX. Моменты вращенія системы силъ C въ точкахъ прямой ab имѣютъ одинаковыя проекціи на ab.

Слѣдствіе *). Прямая, перпендикулярная къ моменту вращенія одной своей точки, перпендикулярна къ моментамъ вращенія всѣхъ своихъ точекъ.

Такую прямую мы назвали *лучемъ*. Итакъ система силъ, дѣйствующихъ на точки подобно-измѣняемой формулы, опредѣляетъ комплексъ лучей—прямыхъ, перпендикулярныхъ къ моментамъ вращенія всѣхъ своихъ точекъ.

Этотъ комплексъ былъ изслѣдованъ въ I выпускѣ (гл. X). Вотъ его главныя свойства: онъ—перваго порядка, а каждый лучъ есть касательная къ винтовой линіи, лежащей на прямомъ кругломъ цилиндрѣ, осью котораго служитъ ось равнодѣйствующаго винта.

Пусть (R_ω, p_0)— винтъ, эквивалентный системѣ силъ C. Назовемъ постоянную проекцію на прямую ab моментовъ вращенія ея точекъ *относительнымъ моментомъ винта* (R_ω, p_0) *и прямой* ab.

---

*) Вып. I, теор. XXXIV.

Найдемъ величину этого относительнаго момента.

Пусть mn—кратчайшее растяженіе винтовой оси O и прямой ab (ч. 12). Моментъ M_n вращенія винта въ точкѣ n опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

Въ точкѣ n строимъ прямую P_n, геометрически равную моменту Rp винтовой пары. Затѣмъ приводимъ перпендикуляръ Q_n къ плоскости (n, O) по ту сторону послѣдней, съ которой направленіе ωR винтовой силы кажется идущимъ въ сторону движенія часовой стрѣлки. Длина Qn равна $R.mn$. Построенныя прямыя суть, по предыдущему, (стр. 43) слагающія момента M_n вращенія винта въ точкѣ n. Замѣтимъ, что прямыя P_n и Q_n взаимно-перпендикулярны, причемъ первая параллельна винтовой оси. Такъ какъ mn есть общій перпендикуляръ къ прямымъ ab и O, то mn перпендикулярна, какъ къ плоскости (ab, P_n), такъ и къ плоскости $(P_n$ и $Q_n)$. Слѣдовательно, эти плоскости совпадаютъ. По извѣстной теоремѣ*), проекція на ab прямой M_n равна суммѣ проекцій на ab прямыхъ P_n и Q_n. Пусть α—уголъ между осью O и ab. Обозначимъ для краткости ab чрезъ (a), а относительный моментъ винта и прямой (a) чрезъ $2\eta_{oa}R$. На основаніи сказаннаго, получимъ:

$$2\eta_{oa}R = P_n cs\alpha + Q_n sn\alpha.$$

Внося въ эту формулу, вмѣсто P_n и Q_n, ихъ значенія и обозначая mn чрезъ d, найдемъ:

$$1) \quad 2\eta_{oa}R = R(pcs\alpha + dsn\alpha),$$

откуда

$$2) \quad 2\eta_{oa} = pcs\alpha + dsn\alpha.$$

Формула 1) показываетъ, что относительный моментъ пропорціоналенъ винтовой силѣ R. Величина $2\eta_{oa}$, какъ это видно

*) Salmon Fiedler. Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 1887 Th. I, S. 3.

изъ формулы 2), зависитъ лишь отъ винтоваго параметра, кратчайшаго разстоянія его оси отъ (a) и угла α между этими прямыми. $2\eta_{oa}$, очевидно, есть относительный моментъ того же винта (R_ω, p_0) и прямой (a) въ томъ случаѣ, когда винтовая сила R равна единицѣ.

Прямую (a) мы назвали лучемъ, если она перпендикулярна къ моментамъ вращеній всѣхъ своихъ точекъ. На основаніи предыдущей теоремы мы заключаемъ, что (a) будетъ лучемъ въ комплексѣ винта (R_ω, p_0), если $2\eta_{oa}=o$, т. е., если

$$pcs\alpha+dsn\alpha=o,$$

откуда

$$p=-dtg\alpha\ ^{*}).$$

ГЛАВА V.

Возможный коэффиціентъ двухъ винтовъ. Взаимные винты. Группы винтовъ. Винтовые координаты.

I. *О возможномъ коэффиціентѣ двухъ винтовъ.* Пусть (R_α, p_α) и (R'_β, p_β)—два данныхъ винта, d—кратчайшее разстояніе ихъ осей α и β, O — уголъ между послѣдними. Увеличимъ параметръ p_α перваго винта на величину параметра p_β втораго и возьмемъ въ этомъ предположеніи относительный моментъ $2\omega_{\alpha\beta} R$ новаго винта $(R_\alpha, p_\alpha+p_\beta)$ и оси β втораго винта. Мы получимъ, на основаніи предыдущаго,

$$\alpha)\quad 2\omega_{\alpha\beta} R=R[(p_\alpha+p_\beta)csO+dsnO].$$

---

*) Вып. I, стр. 90, теор. XLV. Тамъ было получено: $dtg\alpha'=+p$. Но обѣ формулы вѣрны, — такъ какъ углы α и α' дополняютъ другъ друга до 180^0. *Авт.*

Равнымъ образомъ, увеличимъ параметръ p_β втораго винта на величину p_α параметра перваго и возьмемъ въ этомъ предположеніи относительный моментъ $2\omega_{\beta\alpha} R'$ новаго винта $(R'_b, p_\beta+p_\alpha)$ и оси α перваго винта. Тогда получимъ:

$$\beta) \quad 2\omega_{\beta\alpha} R' = R'[(p_\alpha+p_\beta)csO+dsnO].$$

Формулы α) и β) даютъ:

$$1) \quad 2\omega_{\alpha\beta} = 2\omega_{\beta\alpha} = (p_\kappa+p_\beta)csO+sndO.$$

Мы видимъ, что $2\omega_{\alpha\beta}$ есть величина, вполнѣ симметричная относительно обоихъ винтовъ (R_a, p_α) и (R'_b, p_β). Въ силу сказаннаго въ предыдущей главѣ, $2\omega_{\alpha\beta}$ есть проекція на β момента вращенія въ какой-нибудь точкѣ прямой β, вызваннаго винтомъ параметра $p_\alpha+p_\beta$, лежащимъ на α, причемъ слагающая сила винта равна единицѣ. Равнымъ образомъ, $2\omega_{\alpha\beta}$ есть проекція на α момента вращенія въ какой-нибудь точкѣ прямой α, вызваннаго винтомъ параметра $p_\alpha+p_\beta$, лежащимъ на β, причемъ слагающая сила винта также равна единицѣ.

Вмѣстѣ съ Балемъ *), назовемъ величину $2\omega_{\alpha\beta}$ возможнымъ коэффиціентомъ винтовъ (R_a, p_α) и (R'_b, p_β); величины же $2\omega_{\alpha\beta} R$ и $2\omega_{\alpha\beta} R'$ я назову возможными относительными моментами послѣднихъ.

II. *О взаимныхъ винтахъ.* Два винта (R_a, p_α) и (R'_b, p_β) называются *взаимными*, если ихъ возможный коэффиціентъ равенъ нулю.

Два винта взаимны въ слѣдующихъ случаяхъ:

1. *Оси винтовъ параллельны или совпадаютъ.*

---

*) *Ball.* The Theory of Screws. Dublin, 1876, p. 13.

Klein назвалъ величину $2\omega_{\alpha\beta}$ *совмѣстнымъ инваріантомъ* двухъ комплексовъ.

Ср. Klein F. Math. Annalen. B. II, 1869, p. 198; ibid. p. 366.

Замѣтимъ, что этимъ авторамъ было извѣстно лишь аналитическое и механическое значеніе возможнаго коэффиціента. *Авт.*

Въ этомъ случаѣ сумма параметровъ должна равняться нулю.

2. *Оси винтовъ пересѣкаются.*

Въ этомъ случаѣ или сумма параметровъ равна нулю, или оси пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

3. *Оси винтовъ не лежатъ въ одной плоскости.*

Въ этомъ случаѣ, самомъ общемъ, условіе взаимности можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ: *два винта взаимны, если ось одного изъ нихъ есть лучъ комплекса, опредѣляемаго вторымъ винтомъ, параметръ котораго увеличенъ на параметръ перваго.*

Это прямо вытекаетъ изъ опредѣленія луча, даннаго въ предыдущей главѣ, и опредѣленія возможнаго коэффиціента двухъ винтовъ *).

Въ частномъ случаѣ, когда параметръ одного изъ двухъ взаимныхъ винтовъ равенъ нулю, ось этого винта есть лучъ комплекса, опредѣляемаго вторымъ. Обратно: лучи комплекса, опредѣляемаго даннымъ винтомъ (R_a, p_α), суть оси винтовъ нулеваго параметра, взаимныхъ съ винтомъ (R_a, p_α).

Теперь мы можемъ перейти къ изученію винтовыхъ группъ.

III. *Группы винтовъ.* Пусть (R_1, p_{α_1}), (R_2, p_{α_2}), . . (R_n, p_{α_n}) — n данныхъ винтовъ, центры которыхъ въ точкахъ $1, 2, \ldots n$, а осями служатъ прямыя $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Совокупность этихъ винтовъ представляетъ нѣкоторую систему силъ, дѣйствующихъ въ пространствѣ на точки подобно-измѣняемой фигуры. Мы видѣли въ предыдущей главѣ, что такая система силъ вообще эквивалентна нѣкоторому винту (ρ_ω, p_α). Итакъ

$$(\rho_\omega, p_\alpha) = \Sigma (R_i, p_{\alpha_i}).$$

*) Cp. Gravelius H. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Berlin 1889, p. 113.

Будемъ теперь мѣнять слагающія силы $R_1, R_2, ..$ данныхъ винтовъ, оставляя безъ измѣненія центры, оси и параметры послѣднихъ. Каждой системѣ значеній $R_1, R_2, .. R_n$ будетъ отвѣчать опредѣленный винтъ (ρ_ω, p_α). Совокупность всѣхъ винтовъ, полученныхъ такимъ образомъ, составляетъ группу винтовъ. Данные винты, называемые основными, входятъ въ послѣднюю, такъ какъ они отвѣчаютъ системамъ: $(R_1, o, o, ..)$, $(o, R_2, o, ..), .. (o, o .., o, R_n)$.

Если, кромѣ этихъ, нѣтъ другихъ системъ, которыя опредѣляли бы собою какой-нибудь изъ данныхъ n винтовъ, то послѣдніе независимы между собой, а группа будетъ n порядка.

Въ дальнѣйшемъ мы постоянно будемъ предполагать, что основные винты независимы между собой.

Найдемъ связь между какимъ-нибудь винтомъ (ρ_ω, p_α) группы и основными винтами. Для этого приведемъ каждый изъ послѣднихъ къ какой-нибудь точкѣ O пространства. Если $R_0^{(i)}$, $(\Pi_0^{(i)})$ и $((M_0^{(i)}))$ — элементы приведенія основнаго винта $(R_i, p_{\alpha i})$, ρ_0, (Π_0) и $((M_0))$ — аналогичныя величины, соотвѣтствующія винту (ρ_ω, p_α), то

$$(R_i, p_{\alpha i}) \equiv R_0^{(i)} + (\Pi_0^{(i)}) + ((M_0^{(i)}),$$

$$(\rho_\omega, p_\alpha) \equiv \rho_0 + (\Pi_0) + ((M_0)).$$

Но, по предположенію,

$$(\rho_\omega, p_\alpha) \equiv \Sigma(R_i, p_{\alpha i});$$

слѣдовательно,

$$\rho_0 + (\Pi_0) + ((M_0)) \equiv \Sigma R_0^{(i)} + \Sigma(\Pi_0^i) + \Sigma((M_0^i)),$$

откуда, какъ не разъ ужъ было замѣчено,

$$\gamma) \quad \rho_0 \equiv \Sigma R_0^{(i)}, \ (\Pi_0) \equiv \Sigma(\Pi_0^{(i)}), \ ((M_0)) \equiv \Sigma(M_0^{(i)}).$$

Первая изъ этихъ формулъ показываетъ, что ρ_0 есть за-

мыкающая многоугольника A, стороны котораго геометрически равны силамъ $R^{(i)}$ основныхъ винтовъ; изъ второй слѣдуетъ, что моментъ вращенія M_0 есть замыкающая многоугольника B, стороны котораго геометрически равны моментамъ $M_0^{(i)}$.

Проведемъ чрезъ O какую-нибудь прямую m. По извѣстной теоремѣ, проекція замыкающей многоугольника на прямую m равна суммѣ проекцій сторонъ многоугольника. Примѣняя это къ нашему случаю, получаемъ теорему:

Теорема XXX. Относительный моментъ винта (ρ_ω, p_α) группы и прямой m равенъ суммѣ моментовъ основныхъ винтовъ относительно той-же прямой.

Итакъ

$$\rho.\eta_{\alpha m} = \Sigma R^{(i)} \eta_{\alpha_i m}.$$

Слѣдствіе. Лучъ, общій комплексамъ всѣхъ основныхъ винтовъ, есть лучъ каждаго винта группы.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ всѣ $\eta_{\alpha_i m}$ равны нулю, откуда

$$\eta_{\alpha m} = 0,$$

т. е., прямая m есть лучъ комплекса, опредѣляемаго винта (ρ_ω, p_α).

Увеличимъ параметръ каждаго основнаго винта на нѣкоторую величину p. Это значитъ, что къ каждому винту мы прибавили пару вращенія $((pR^{(i)}))$, моментъ которой параллеленъ и пропорціоналенъ слагающей силѣ $R^{(i)}$ винта. Слѣдовательно, слагающая пара $((p_\alpha \rho))$ равнодѣйствующаго винта (ρ_ω, p_α) увеличится на сумму $\Sigma((pR_i))$.

Представимъ себѣ многоугольникъ C, стороны котораго геометрически равны моментамъ $p.R^{(i)}$. Такъ какъ стороны этого многоугольника соотвѣтственно параллельны и пропорціональны сторонамъ многоугольника A (см. выше), то замыкающія этихъ многоугольниковъ также параллельны и находятся въ отноше-

нiи сторонъ. Слѣдовательно, если μ моментъ пары вращенія, эквивалентной $\Sigma((pR_i))$, то

$$\mu = p.\rho;$$

кромѣ того, прямая μ параллельна ρ, т. е., оси α винта (ρ_ω, p_α).

Полученная формула доказываетъ слѣдующее предложенiе:

Теорема XXXI. Если параметры основныхъ винтовъ увеличатся на одну и туже величину, то параметръ равнодѣйствующаго винта увеличится на туже самую величину.

Итакъ, если

$$\Sigma(R_i, p_{\alpha_i}) \equiv (\rho_\omega, p_\alpha),$$

то

$$\Sigma(R_i, p_{\alpha_i} + p) \equiv (\rho_\omega, p_\alpha + p).$$

Пусть теперь (R_b, p_β) — какой-нибудь винтъ. Возьмемъ возможные моменты $2R^{(1)}\omega_{\alpha_1\beta}$, $2R^{(2)}\omega_{\alpha_2\beta}, \ldots 2R^{(n)}\omega_{\alpha_n\beta}$ основныхъ винтовъ относительно винта (R_b, p_β). Для этого, по опредѣленiю, нужно параметръ каждаго изъ основныхъ винтовъ увеличить на p_β и тогда взять моменты полученныхъ новыхъ винтовъ относительно прямой. На основанiе послѣднихъ двухъ теоремъ заключаемъ:

Теорема XXXII. Возможный моментъ винта (ρ_ω, p_α) группы относительно какого-нибудь винта (R_b, p_β) равенъ суммѣ возможныхъ моментовъ основныхъ винтовъ относительно того же винта (R_b, p_β).

Итакъ

$$2) \quad \rho\omega_{\alpha\beta} = \Sigma R^i.\omega_{\alpha_i\beta}.$$

Слѣдствiе I. Винтъ, взаимный съ каждымъ изъ основныхъ винтовъ, взаименъ съ каждымъ винтомъ группы.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ всѣ $\omega_{\alpha_i\beta}$ равны нулю, откуда

$$\omega_{\alpha\beta} = 0,$$

т. е., винты (ρ_ω, p_α) и (R_b, p_β) взаимны.

Пусть (R_m, p_μ) — какой-нибудь винтъ. Представимъ себѣ, что вдоль лучей комплекса, опредѣляемаго винтомъ, дѣйствуютъ силы P. Совокупность всѣхъ этихъ силъ эквивалентна нѣкоторому винту (ρ_ω, p_α). Каждую силу P мы можемъ разсматривать, какъ винтъ нулеваго параметра. Замѣчая, что каждый изъ послѣднихъ взаименъ съ (R_m, p_μ), мы заключаемъ, въ силу только что доказаннаго предложенія, что и винтъ (ρ_ω, p_α) взаименъ съ (R_m, p_μ). Итакъ мы получили теорему:

Теорема XXXIII. Совокупность силъ, дѣйствующихъ вдоль лучей комплекса винта (R_m, p_μ), эквивалентна винту, взаимному съ (R_m, p_μ).

Измѣнимъ слагающія силы $R^{(1)}, R^{(2)}, .. R^{(n)}$ основныхъ винтовъ въ одномъ и томъ же отношеніи k и разсмотримъ, что произойдетъ съ равнодѣйствующимъ винтомъ (ρ_ω, p_α). Для этого обратимся къ формуламъ γ), представляющимъ приведеніе послѣдняго къ какой-нибудь точкѣ O. Слагающая сила ρ_0 винта представляется, какъ мы видѣли, замыкающей многоугольника A, стороны котораго геометрически равны силамъ $R^{(1)}, .. R^{(n)}$. Слагающая ρ_0' новаго винта будемъ, слѣдовательно, замыкать многоугольникъ A', стороны котораго геометрически равны новымъ значеніямъ силъ $R^{(1)}, .. R^{(n)}$. Но эти новыя значенія, по предположенію, пропорціональны прежнимъ. Отсюда мы заключаемъ, что многоугольники A и A' подобны; слѣдовательно, силы ρ_0' и ρ_0 имѣютъ одинаковое направленіе, причемъ ρ_0' равна $k.\rho_0$. Далѣе, такъ какъ параметры и оси основныхъ винтовъ не измѣнялись, то слагающіе моменты $M_0^{(i)}$ измѣнятъ лишь свои длины, какъ это слѣдуетъ изъ формулъ γ) предыдущей главы (стр. 44). Кромѣ того, новыя значенія моментовъ $M_0^{(i)}$, въ силу тѣхъ же формулъ, будутъ равны прежнимъ, увеличеннымъ въ томъ же отношеніи k. Отсюда, какъ и выше, выводимъ, что новый моментъ M_0' имѣетъ съ M_0 одинаковое направленіе и равенъ $k.M_0$. Наконецъ, такъ какъ и центры основныхъ винтовъ остались тѣже, то отсюда вытекаетъ, что моменты $\Pi_0^{(i)}$ растяженій, вы-

зываемыхъ въ O основными винтами, увеличатся въ отношеніи k. Слѣдовательно, въ такомъ же отношеніи увеличится ихъ сумма $\Sigma\Pi_0^{(i)}$, равная Π_0.

Итакъ элементы приведенія къ O новаго винта отличаются отъ соотвѣтственныхъ элементовъ приведенія винта (ρ_ω, p_α) только тѣмъ, что первые больше вторыхъ въ k разъ. Отсюда, на основаніи формулъ γ) предыдущей главы, заключаемъ, что новый винтъ отличается отъ (ρ_ω, p_α) только тѣмъ, что его слагающая сила равна $k\rho$. Итакъ, если

$$\Sigma(R_i^{(i)}, p_{\alpha i}) \equiv (\rho_\omega, p_\alpha),$$

то

$$\Sigma(kR_i^{(i)}, p_{\alpha i}) \equiv (k\rho_\omega, p_\alpha).$$

Будемъ въ винтѣ (ρ_ω, p_α) обращать вниманіе только на его центръ, ось и параметръ. На основаніи предыдущаго можемъ сказать, что каждый винтъ группы n-го порядка опредѣляется $(n-1)$ произвольными величинами: отношеніями $(n-1)$ слагающихъ силъ основныхъ винтовъ къ послѣдней.

Мы видѣли, что винтъ, взаимный съ каждымъ изъ основныхъ винтовъ, взаименъ съ каждымъ винтомъ группы. Совокупность винтовъ, взаимныхъ со всѣми винтами группы n-го порядка, составляетъ новую группу, взаимную съ первой. Найдемъ порядокъ этой новой группы.

Для этого замѣтимъ, прежде всего, что въ опредѣленіи винта, взаимнаго съ даннымъ, центры ихъ и слагающія силы не играютъ никакой роли. Отсюда вытекаетъ, что винтъ, взаимный съ даннымъ, опредѣляется 5-ю величинами. Изъ нихъ 4 опредѣляетъ положеніе его оси, пятая — его параметръ. Но винтъ, взаимный со всѣми винтами группы n-го порядка, долженъ быть взаименъ съ n основными винтами. Слѣдовательно, между пятью величинами, опредѣляющими винтъ, существуетъ n зависимостей вида: $\omega_{\alpha\beta}=o$, и только $5-n$ изъ нихъ остаются произвольными. Но порядокъ винтовой группы, какъ мы

только что видѣли, на единицу больше числа произвольныхъ величинъ, крторыми можно располагать при опредѣленіи какого-нибудь винта группы. Итакъ *винты, взаимные съ данной группой n-го порядка, образуютъ группу порядка (6—n).*

IV. *О винтовыхъ координатахъ*)*. Пусть $(R^{(i)}_{\alpha_i}, p_{\alpha_i})$—одинъ изъ n—независимыхъ винтовъ, (ρ_α, p_α) — какой-нибудь винтъ группы, построенной на послѣднихъ, какъ основныхъ винтовъ. Назовемъ величины $R^{(1)}, R^{(2)}, .. R^{(n)}$ — координатами винта (ρ_α, p_α), основные винты—координатными винтами. Для опредѣленія этихъ величинъ поступимъ слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ какой-либо винтъ $(\rho'_{b'}, p'_\beta)$, не входящій въ группу.

Тогда, по предыдущему,

$$\rho\omega_{\alpha\beta} = \Sigma R^{(i)}\omega_{\alpha_i\beta}.$$

Беря, вмѣсто винта (β), еще $(n—1)$ любыхъ винтовъ (β′), (β″),..., получимъ еще $(n—1)$ уравненій такого-же вида, изъ которыхъ можно будетъ опредѣлить искомыя величины $R^{(i)}$.

Вмѣсто винтовъ β, возьмемъ n основныхъ винтовъ α_i. Замѣчая, что

$$\omega_{\alpha\alpha} = p_\alpha,$$

найдемъ:

$$\rho\omega_{\alpha\alpha_1} = R^{(1)}p_{\alpha_1} + R^{(2)}\omega_{\alpha_1\alpha_2} + .. + R^{(n)}\omega_{\alpha_1\alpha_n}$$

$$\rho\omega_{\alpha\alpha_2} = R^{(1)}\omega_{\alpha_1\alpha_2} + R^{(2)}p_{\alpha_2} + .. + R^{(n)}\omega_{\alpha_2\alpha_n}$$

$$\vdots$$

$$\rho\omega_{\alpha\alpha_n} = R^{(1)}\omega_{\alpha_1\alpha_n} + R^{(2)}\omega_{\alpha_2\alpha_n} + .. + R^{(n)}p_{\alpha_n}$$

Наконецъ, вмѣсто β, возьмемъ винтъ α. Тогда

$$\rho p_\alpha = R^{(1)}\omega_{\alpha_1\alpha} + R^{(2)}\omega_{\alpha_2\alpha} + .. + R^{(n)}\omega_{\alpha_n\alpha}.$$

---

*) *Примѣчаніе.* По независѣвшимъ отъ меня обстоятельствамъ я не могъ изложить теорію винтовыхъ координатъ въ предыдущемъ выпускѣ настоящаго труда. *Авт.*

Полученныя уравненія даютъ:

$$\rho^2 p_\alpha = \Sigma R^{(i)2} p_{\alpha_i} + 2\Sigma R^{(i)} R^{(k)} \omega_{\alpha_i \alpha_k}.$$

Такимъ образомъ слагающая сила равнодѣйствующаго винта выражена помощью координатъ. Можно прямо найти выраженіе этой силы помощью послѣднихъ. Для этого достаточно замѣтить, что ρ есть замыкающая многоугольника, стороны котораго геометрически равны $R^{(i)}$. Слѣдовательно,

$$\rho^2 = \Sigma R^{(i)2} + 2\Sigma R^{(i)} R^{(k)} cs(\alpha_i \alpha_k).$$

Разсмотримъ частный случай. Пусть $(R^{(1)}_{a_1}, p_{\alpha_1})$, $(R^{(2)}_{a_2}, p_{\alpha_2})$,.. $(R^{(6)}_{a_6}, p_{\alpha_6})$—шесть независимыхъ винтовъ, (ρ_a, p_α)—какой-нибудь седьмой винтъ. Въ слѣдующей главѣ будетъ показано, что всегда можно такъ подобрать величины $R^{(i)}$, чтобы винтъ $(\rho_{a'}, p_\alpha)$ группы, построенной на первыхъ 6-ти винтахъ, отличался отъ (ρ_a, p_α) только центромъ. Очевидно,

$$(\rho_a, p_\alpha) \equiv (\rho_{a'}, p_\alpha) + (\pi),$$

гдѣ моментъ π пары растяженія (π) равенъ $\pm \rho . aa'$. За координаты винта (ρ_a, p_α) примемъ 6-ть величинъ $R^{(i)}$ и величину π. Для упрощенія формулъ выберемъ координатные винты слѣдующимъ образомъ. Винтъ $(R^{(1)}_{a_1}, p_{\alpha_1})$ выбираемъ произвольно, винтъ $(R^{(2)}_{a_2}, p_{\alpha_2})$ взаименъ съ первымъ, винтъ $(R^{(3)}_{a_3}, p_{\alpha_3})$ — взаименъ съ первыми двумя и т. д., наконецъ винтъ $(R^{(6)}_{a_6}, p_{\alpha_6})$— взаименъ съ первыми 5-ю. Примемъ кромѣ того, величину ρ за единицу.

Тогда, такъ какъ $\omega_{\alpha_i \alpha_k} = o$, то предыдущія формулы примутъ слѣдующій видъ:

$$R^{(1)} = \frac{\omega_{\alpha\alpha_1}}{p_{\alpha_1}}, \quad R^{(2)} = \frac{\omega_{\alpha\alpha_2}}{p_{\alpha_2}}, \ \ldots \ R^{(6)} = \frac{\omega_{\alpha\alpha_6}}{p_{\alpha_6}}$$

$$p_\alpha = R^{(1)2} p_{\alpha_1} + R^{(2)2} p_{\alpha_2} + \ldots + R^{(6)2} p_{\alpha_6}.$$

$$1 = \Sigma R^{(i)2} + 2\Sigma R^{(i)} R^{(k)} cs(\alpha_i \alpha_k).$$

Что касается седьмой координаты π, то она, по предыдущему, равна растяженію, вызываемому въ a винтомъ $(\rho_{a'}, p_\alpha)$. Но, по предположенію,

$$(\rho_{a'}, p_\alpha) \equiv \Sigma(R^{(i)}_{a_i}, p_\alpha).$$

Слѣдовательно, въ силу теоремы XX,

$$\pi = \Sigma R^{(i)}.q_i,$$

гдѣ q_i — длина перпендикуляра, опущеннаго изъ a на прямую, вдоль которой дѣйствуетъ сила $R^{(i)}$, Σ — знакъ алгебрической суммы.

Мы получили координаты $R^{(i)}$ винта (ρ_a, p_α), сила котораго ρ равна единицѣ. Еще ρ не равна единицѣ, то координаты $R'^{(i)}$, въ силу равенства:

$$\Sigma(kR^{(i)}, p_{\alpha_i}) = (k\rho, p_\alpha),$$

будутъ:

$$R'^{(i)} = \rho. R^{(i)}.$$

Выразимъ помощью координатъ $R^{(i)}$ и $r^{(i)}$ двухъ винтовъ (ρ_a, p_α) и $(\rho'_{a'}, p'_{\alpha'})$ ихъ возможный коэффиціентъ $2\omega_{\alpha\alpha'}$. По предыдущему,

$$\omega_{\alpha\alpha'} = \Sigma R^{(i)} \omega_{\alpha_i\alpha'}.$$

Но, какъ мы только что видѣли,

$$\omega_{\alpha'\alpha_i} = r^{(i)} p_{\alpha_i}$$

слѣдовательно,

$$\omega_{\alpha\alpha'} = \Sigma R^{(i)} r^{(i)} p_{\alpha_i}.$$

Отсюда, замѣчая, что

$$\omega_{\alpha\alpha} = p_\alpha,$$

снова получаемъ:

$$p_\alpha = \Sigma R^{(i)2} p_{\alpha_i}.$$

Изъ предыдущаго вытекаетъ, что два винта взаимны, если

$$\Sigma R^{(i)} r^{(i)} p_{\alpha_i} = o.$$

Положимъ, что координаты $R^{(i)}$ какого-нибудь винта удовлетворяютъ линейному однородному уравненію вида:

$$\Sigma A_i R^{(i)} = o.$$

Полагая:

$$r_i = \frac{A_i}{p_{\alpha_i}},$$

найдемъ:

$$\Sigma R^{(i)} r^{(i)} p_{\alpha_i} = o,$$

т. е., винты $(R^{(1)}, .. R^{(i)})$ и $(r^{(1)}, .. r^{(i)})$ взаимны между собой. Отсюда мы заключаемъ, что, если координаты винта удовлетворяютъ n линейнымъ однороднымъ уравненіямъ, то этотъ винтъ взаименъ съ n винтами и, слѣдовательно, входитъ въ группу порядка $(6-n)$.

Всѣ результаты настоящей главы были получены Балемъ*) при помощи принципа Бернулли. Аналитически они были доказаны впервые г. Занчевскимъ**).

ГЛАВА VI.

Группы винтовъ различныхъ порядковъ.

Здѣсь мы сдѣлаемъ бѣлый обзоръ винтовыхъ группъ, пользуясь свойствами взаимныхъ винтовъ***).

---

*) Ball. The Theory of Screws. Dublin, 1876. Ch. IV и p. 40, 43 и 85. Cp. Gravelius. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Berlin, 1889. Kap. V. § 2—12.

**) Занчевскій. *Теорія винтовъ.* Одесса, 1889 г. Глава II, § 39, 41, 42.

***) Ball. l. cit. Ch. IX, § 79, Ch. II, § 16—21, Ch. X, § 86.

Группы винтовъ перваго и пятаго порядка. Пусть (R_a, p_α) — основный винтъ. Всѣ винты группы получатся, по опредѣленію, если мы будемъ мѣнять величину R. Отсюда мы заключаемъ слѣдующую теорему:

Теорема XXXIV. Винты группы перваго порядка отличаются другъ отъ друга только величиной слагающихъ силъ.

Группа C, взаимная съ группой перваго порядка, будетъ 5-го порядка, по сказанному въ предыдущей главѣ. Она состоитъ изъ винтовъ, взаимныхъ съ однимъ винтомъ (R_a, p_α). Легко прослѣдить распредѣленіе въ пространствѣ винтовъ группы C, если мы вспомнимъ, что ось винта параметра π, взаимнаго съ (R_a, p_α), есть лучъ комплекса, опредѣленнаго винтомъ $(R_a, (p+\pi)_\alpha)$. Это даетъ намъ теорему:

Теорема XXXV. Оси винтовъ одинаковаго параметра π, взаимныхъ съ группой A перваго порядка, образуютъ комплексъ перваго порядка, центральная ось котораго совпадаетъ съ общей осью всѣхъ винтовъ группы A. Параметръ комплекса равенъ $p+\pi$, гдѣ p—общій параметръ винтовъ группы A.

Пусть m — какая-нибудь точка, M_m — моментъ вращенія, вызываемаго въ m винтомъ $(R_a, (p+\pi))$. Проходящіе чрезъ m лучи комплекса, опредѣляемаго послѣднимъ, лежатъ въ плоскости, перпендикулярной въ m къ прямой M_m *). Кромѣ того, замѣтимъ, что всякій винтъ, лежащій на перпендикулярѣ $m\mu$, опущенномъ изъ m на ось винта (R_a, p_α), взаименъ съ послѣднимъ. Отсюда на основаніи предыдущаго заключаемъ:

Теорема XXXVI. Винты равнаго параметра π, проходящіе чрезъ точку m и взаимные съ винтомъ (R_a, p_α), лежатъ въ одной и той же плоскости (m). Плоскости m, соотвѣтствующія различнымъ параметрамъ π, образуютъ пучокъ, осью котораго служитъ перпендикуляръ $m\mu$, опущенный изъ точки m на ось α винта (R_a, p_α).

---

*) Вып. I, стр. 84 и стр. 86, теор. XXXIV, слѣдствіе.

Пусть (m)—какая-нибудь плоскость, m—полюсъ послѣдней въ комплексѣ, опредѣляемомъ винтомъ $(R_a, (p+\pi)_a)$. Чрезъ m проходятъ всѣ лучи, лежащіе въ (m), причемъ прямая, соединяющая m съ точкой, въ которой ось α встрѣчаетъ (m), перпендикулярна къ α*). Это даетъ намъ теорему:

Теорема XXXVII. Винты равнаго параметра π, лежащіе въ плоскости (m) и взаимные съ винтомъ (R_a, p_α), проходятъ чрезъ одну и ту же точку m. Точки m, соотвѣтствующія различнымъ параметрамъ π, лежатъ на прямой, встрѣчающей ось α подъ прямымъ угломъ**).

Мы получили, слѣдовательно, снова всѣ свойства винтовъ группы пятаго порядка. (Ср. выпускъ II, гл. VIII).

Группы 2-го и 4-го порядка. Группа винтовъ втораго порядка была изслѣдована во второмъ выпускѣ настоящаго труда (стр. 20—36). Напомнимъ ея главныя свойства.

I. Оси винтовъ группы встрѣчаютъ подъ прямымъ угломъ одну и ту же прямую A, называемую *директрисой.*

II. Чрезъ каждую точку a директрисы проходятъ вообще два различныхъ винта группы: Эти винты совпадаютъ въ двухъ точкахъ α и α' директрисы. Два винта, проходящіе чрезъ средину O отрѣзка $\alpha\alpha'$, взаимно перпендикулярны. Эти винты называются главными, ихъ параметры p_1 и p_2—главными параметрами.

Точка O—центръ группы.

III. Оси винтовъ группы служатъ производящими поверхности цилиндроида. Уравненіе послѣдней имѣетъ видъ:

$$z(x^2+y^2)=(p_1-p_2)xy,$$

если за оси x, y, z примемъ оси главныхъ винтовъ и директрису.

---

*) Ibid., теор. XXXV и теор. XLV, слѣдствіе II.

**) Оба эти предложенія совершенно иначе доказаны авторами выше приведенныхъ сочиненій.

Ср. Ball, l. cit., p. 85—86; Gravelius, l. cit., p. 249—250;

Ср. также Schell, l. cit., t. II, p. 230.

IV. Каждый винтъ (R, p) группы опредѣляется формулами:

$$z=(p_1-p_2)sn\theta cs\theta,\ \ p_\theta=p_1cs^2\theta+p_2sn^2\theta,$$

гдѣ z—координата точки a, въ которой ось винта встрѣчаетъ директрису; θ—уголъ, образуемый осью винта съ осью x.

Эти формулы даютъ для $\theta=\pm\theta_1$

$$z=\pm z_1,\ \ p_\theta=p_{-\theta}=k,$$

откуда вытекаетъ:

V. Между винтами группы существуютъ только два винта даннаго параметра k. Эти винты образуютъ одинаковые углы съ каждымъ изъ главныхъ винтовъ и встрѣчаютъ директрису въ точкахъ, одинаково удаленныхъ отъ центра группы.

VI. Между винтами цилиндроида всегда существуетъ одинъ, ось котораго перпендикулярна къ данной прямой B.

Чтобы убѣдиться въ справедливости этого предложенія, проведемъ чрезъ директрису A плоскость, параллельную прямой B. Нормаль α къ проведенной плоскости перпендикулярна къ A и B. Пусть θ_1—уголъ, образуемый прямой α съ осью x. Винтъ цилиндроида, соотвѣтствующій углу θ_1, параллеленъ α и, слѣдовательно, перпендикуляренъ къ B.

Теорема XXXVIII *). Прямая α, встрѣчающая два винта (λ) и (μ) цилиндроида, имѣющіе равные параметры, встрѣчаетъ третій винтъ подъ прямымъ угломъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть λ, μ—точки, въ которыхъ прямая α встрѣчаетъ два винта (λ) и (μ), причемъ

$$a)\quad p_\lambda=p_\mu.$$

Точки λ и μ прямой α принадлежатъ цилиндроиду. Но эта поверхность третьяго порядка; слѣдовательно, α встрѣчаетъ

---

*) Вып. II, стр. 32.

ее въ трехъ точкахъ. Пусть ν—третья точка встрѣчи прямой α съ цилиндроидомъ, (ν)—винтъ послѣдняго, проходящій чрезъ ν. Докажемъ, что прямыя α и (ν) взаимно-перпендикулярны. Для этого примемъ α за ось нѣкотораго винта (α), параметръ p_α котораго опредѣляется изъ условія:

$$b) \quad p_\alpha + p_\lambda = p_\alpha + p_\mu = o.$$

Такъ какъ (α) пересѣкается съ (λ) и (μ), то, въ силу условія (b),

$$\omega_{\alpha\lambda} = \omega_{\alpha\mu} = o$$

т. е., винтъ (α) взаименъ съ (λ) и (μ). Но въ такомъ случаѣ онъ взаименъ со всѣми винтами цилиндроида и, слѣдовательно,

$$\omega_{\alpha\nu} = o.$$

Такъ какъ оси винтовъ (α) и (ν) пересѣкаются, то это условіе имѣетъ видъ:

$$(p_\alpha + p_\nu) cs O = o,$$

гдѣ O—уголъ между осяму винтовъ (α) и (ν). Но равенство:

$$p_\alpha + p_\nu = o,$$

невозможно (V), слѣдовательно:

$$cs O = o, \ O = 90^0. \quad Q.\ E.\ D.$$

Слѣдствіе. Винтъ (α) параметра π, встрѣчающій два винта (λ) и (μ) цилиндроида, имѣющіе общій параметръ $-\pi$, взаименъ со всѣми винтами цилиндроида. Винтъ (α) встрѣчаетъ третій винтъ (ν) послѣдняго подъ прямымъ угломъ.

Слѣдствіе II. Поверхность цилиндроида можно образовать слѣдующимъ образомъ. Пусть λ, μ—двѣ прямыхъ, A—прямая, по которой измѣряется ихъ кратчайшее разстояніе, α—

прямая, встрѣчающая послѣднія. Прямая ν, по которой измѣряется кратчайшее разстояніе прямыхъ A и α, есть производящая цилиндроида.

Теорема XXXIX. Прямая α, встрѣчающая одинъ винтъ (ν) цилиндроида подъ прямымъ угломъ, встрѣчаетъ два другихъ винта (λ) и (μ), параметры которыхъ одинаковы.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть ν, λ и μ точки, въ которыхъ α встрѣчаетъ цилиндроидъ. Примемъ α за ось винта (α), параметръ p_α котораго опредѣлимъ изъ условія:

$$b') \quad p_\alpha + p_\lambda = o.$$

Такъ какъ (α) и (λ) пересѣкаются, то

$$\omega_{\alpha\lambda} = o.$$

Далѣе винты (α) и (ν) также взаимны, такъ какъ ихъ оси, по предположенію, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Отсюда мы выводимъ, что (α) взаименъ со всѣми винтами цилиндроида; слѣдовательно,

$$\omega_{\alpha\mu} = o.$$

Но оси α и μ пересѣкаются; слѣдовательно, полученное уравненіе имѣетъ видъ:

$$(p_\alpha + p_\mu) cs O = o,$$

гдѣ O—уголъ между (α) и (μ). Уголъ O вообще не равняется 90^0, такъ какъ въ этомъ случаѣ по α измѣрялось бы кратчайшее разстояніе прямыхъ ν и μ, т. е., α совпадала бы съ директрисой цилиндроида. Итакъ

$$p_\alpha + p_\mu = o,$$

откуда, по формулѣ (b'),

$$p_\alpha = p_\nu. \qquad Q. \ E. \ D.$$

Примѣчаніе. Доказанную теорему слѣдуетъ считать обратной по отношенію къ предыдущей теоремѣ.

Теорема XL. Винтъ (α), взаимный со всѣми винтами цилиндроида, встрѣчаетъ одинъ винтъ послѣдняго подъ прямымъ угломъ и два другихъ, имѣющихъ равные параметры—p_α.

Доказательство. Пусть λ, μ, ν—точки встрѣчи оси α съ цилиндроидомъ, (λ), (μ) и (ν)—винты послѣдняго, проходящіе чрезъ λ, μ и ν По предположенію,

$$\omega_{\alpha\lambda}=\omega_{\alpha\mu}=\omega_{\alpha\nu}=o.$$

Но въ данномъ случаѣ эти уравненія имѣютъ видъ:

$$b'')\quad (p_\alpha+p_\lambda)cs\alpha\lambda=o,\ (p_\alpha+p_\mu)cs\alpha\mu=o,\ (p_\alpha+p_\nu)cs\alpha\nu=o.$$

Изъ равенствъ: $(\alpha\lambda)=90^0$, $(\alpha\mu)=90$ и $(\alpha\nu)=90^0$ можетъ имѣть мѣсто или одно, или всѣ три. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы имѣли: $(\alpha\lambda)=(\alpha\mu)=90^0$, то прямая α совпала бы съ директрисой, откуда вытекало-бы: $(\alpha\nu)=90$. Далѣе изъ равенствъ: $p_\alpha+p_\lambda=o$, $p_\alpha+p_\mu=o$, $(p_\alpha+p_\nu)=o$ могутъ имѣть мѣсто только два. Въ самомъ дѣлѣ, изъ этихъ трехъ равенствъ вытекаетъ $p_\lambda=p_\mu=p_\nu$, что невозможно, такъ какъ существуютъ лишь два винта цилиндроида, имѣющіе одинаковый параметръ. Итакъ равенства $b'')$ влекутъ за собой:

$$\alpha\lambda=90^0,\ p_\alpha+p_\mu=o,\ p_\alpha+p_\nu=o,$$

откуда: $p_\mu=p_\nu=-p_\alpha$. *Q. E. D.*

Разсмотримъ теперь группу C винтовъ, взаимныхъ со всѣми винтами цилиндроида. По сказанному въ предыдущей главѣ, порядокъ группы C равенъ 4. Доказанная только что теорема даетъ:

Теорема XLI. Винты α равнаго параметра π, взаимные со всѣми винтами цилиндроида, встрѣчаютъ два винта (μ) и (ν) послѣдняго, общій параметръ которыхъ равенъ $-\pi$.

Слѣдствіе I. Чрезъ каждую точку A проходитъ лишь одинъ винтъ α даннаго параметра π.

Осью послѣдняго служитъ прямая, проходящая чрезъ A и встрѣчающая винты (μ) и (ν). Если A лежитъ на μ, то винтовъ (α) безчисленное множество. Осями ихъ служатъ всѣ прямыя плоскаго пучка (A, ν). Тоже имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда A лежитъ на ν.

Слѣдствіе II. Въ каждой плоскости (A) лежитъ лишь одинъ винтъ (α) даннаго параметра π. Осью его служитъ прямая, соединяющая точки встрѣчи съ (A) винтовъ (μ) и (ν). Если (μ) лежитъ въ (A), то винтовъ (α) безчисленное множество. Оси ихъ образуютъ линейный пучокъ, вершиной котораго служитъ точка встрѣчи плоскости (A) съ (ν). Тоже имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, если въ (A) лежитъ винтъ (ν).

Теорема XL даетъ еще слѣдующую:

Теорема XLII. Оси всѣхъ винтовъ группы C суть прямыя, перпендикулярныя къ производящимъ цилиндроида.

Мы видѣли (Вып. II, теор. 30), что перпендикуляры, опущенные изъ какой-нибудь точки A на всѣ производящія цилиндроида, суть производящія нѣкотораго конуса втораго порядка. Но всѣ эти перпендикуляры суть оси винтовъ (α) группы C, что даетъ намъ теорему:

Теорема XLIII. Оси винтовъ группы C, проходящія чрезъ данную точку A, суть производящія конуса (α) втораго порядка.

Примѣчаніе).* Если A есть точка одной изъ производящей (λ) цилиндроида, то конусъ (α) обращается въ двѣ плоскости. Изъ нихъ одна проходитъ чрезъ производящую (μ), параметръ которой равенъ параметру первой производящей, вторая—перпендикулярна къ (λ).

Пусть B—какая-нибудь прямая. Мы показали выше, что между винтами цилиндроида есть лишь одинъ (β), ось котораго

---

*) Ср. Зинчевскій. lib. cit. стр. 72. Этимъ авторомъ доказана лишь первая часть предложенія.

перпендикулярна къ B. Проведемъ чрезъ β плоскость, параллельную прямой B. Прямая α этой плоскости, перпендикулярная къ β, будетъ параллельна B. Но каждая изъ прямыхъ α есть, по предыдущему, ось винта группы C. Слѣдовательно, мы получили теорему:

Теорема XLIV. Винты (α) группы C, параллельные данной прямой B, лежатъ въ плоскости, проходящей чрезъ винтъ цилиндроида, перпендикулярный къ B.

Теорема XLV. Винты группы C, лежащіе въ одной и той же плоскости (A), обертываютъ параболу.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A какая-нибудь точка плоскости (A). Винты группы C, проходящіе чрезъ A, суть производящія конуса (α). Такъ какъ этотъ конусъ втораго порядка, то лишь двѣ его производящихъ лежатъ въ (A). Отсюда мы заключаемъ, что винты группы C, лежащіе въ (A), обертываютъ коническое сѣченіе, такъ какъ изъ каждой точки A можно провести лишь двѣ касательныхъ къ искомой оберткѣ. Пусть теперь B — какая-нибудь прямая, лежащая въ (A). По предыдущему, винты группы C, параллельные прямой B, лежатъ въ плоскости (β). Плоскость (β) встрѣчаетъ (A) по прямой α, которая служитъ осью винта (α) группы C. Прямая α есть касательная къ вышеупомянутому коническому сѣченію и, кромѣ того, параллельна прямой B. Итакъ параллельно данной прямой B можно провести лишь одну касательную къ коническому сѣченію; слѣдовательно, послѣднее есть парабола. *Q. E. D.*

Въ дополненіе къ сказанному о группѣ четвертаго порядка напомнимъ, что во второмъ выпускѣ (стр. 35) было дано построеніе цилиндроида, взаимнаго со всѣми винтами данной группы четвертаго порядка.

Группа третьяго порядка. Мы назвали винтъ (R_ω, p_α) входящимъ въ группу C *n-го* порядка, если

$$(R_\omega, p_\alpha) = \Sigma(R_i^{(i)}, p_{\alpha i}), \quad (i=1, 2, ..n)$$

причемъ основные винты $(R_i^{\rho}, p_{\alpha_i})$ независимы между собой. Но въ предыдущихъ изслѣдованіяхъ центръ и слагающая сила винта группы не играли никакой роли. Слѣдовательно, доказанныя теоремы будутъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, если, вмѣсто винта (R_ω, p_α), возьмемъ какой-нибудь винтъ $(R'_{\omega'}, p_\alpha)$, отличающійся отъ перваго только центромъ и слагающей силой. Вотъ почему мы не будемъ различать такихъ двухъ винтовъ и скажемъ, что *винтъ* $(R'_{\omega'}, p_\alpha)$ *также входитъ въ группу винтовъ* (R_ω, p_α).

Пусть теперь C_1—взаимная съ C группа винтовъ. Въ C_1 входятъ, по опредѣленію, всѣ винты, взаимные съ каждымъ винтомъ группы C. Такъ какъ условіе взаимности двухъ винтовъ зависитъ лишь отъ параметровъ послѣднихъ и относительнаго положенія ихъ осей, то отсюда слѣдуетъ, что въ винтахъ группы C_1 остаются неопредѣленными центры и слагающія силы. Если, какъ мы только что сказали, и въ винтахъ группы C не будемъ обращать вниманіе на центры и слагающія силы, то придемъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема XLVI. Винтъ (α), взаимный со всѣми винтами группы C_1, входитъ въ группу C. Въ самомъ дѣлѣ, пусть (β_1), (β_2),..(β_{6-n}) —$(6—n)$ основныхъ винтовъ группы C_1. По условію,

$$\omega_{\alpha\beta_1}=\omega_{\alpha\beta_2}=\,.\,.=\omega_{\alpha\beta_{6-n}}=0.$$

Этимъ условіямъ, кромѣ (α), удовлетворяютъ вообще безчисленное множество винтовъ, оси которыхъ образуютъ нѣкоторый, вполнѣ опредѣленный комплексъ (A). Каждой прямой послѣдняго соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный коэффиціентъ p_α—параметръ винта, лежащаго на этой прямой. Итакъ только прямыя комплекса (A) могутъ служить осями винтовъ (α). Но каждый винтъ (γ) группы C взаименъ съ C_1. Отсюда мы заключаемъ, что комплексъ осей винтовъ (γ) совпадаетъ съ (A), причемъ, если γ совпадаетъ съ какой-нибудь прямой α послѣдняго, то p_γ равняется коэффиціенту p_α послѣдней. Итакъ винты

(γ) и (α) отличаются только центрами и слагающими силами, т. е., (α) входитъ въ группу C. *Q. E. D.*

Разсмотримъ теперь тотъ частный случай, когда группа C—третьяго порядка. Взаимная съ C группа C_1 въ этомъ случаѣ тоже третьяго порядка. (Глава VI, стр. 49) Такимъ образомъ всѣ свойства одной изъ этихъ группъ принадлежатъ другой.

Положимъ, что (γ_1), (γ_2) и (γ_3) — три основныхъ винта первой группы. Построимъ цилиндроидъ (γ_1, γ_2) и пусть (γ_4)—одинъ изъ винтовъ послѣдняго. Каждый винтъ цилиндроида (γ_4, γ_3), очевидно, входитъ въ C. Каждому винту (γ_4) цилиндроида (γ_1, γ_2) отвѣчаетъ отдѣльный цилиндроидъ (γ_3, γ_4) винтовъ группы C. Но на цилиндроидѣ (γ_3, γ_4) лежатъ лишь два винта одинаковаго параметра. Отсюда мы заключаемъ:

Теорема XLVII. Между винтами группы третьяго порядка существуетъ безчисленное множество винтовъ равнаго параметра p. Оси этихъ винтовъ лежатъ на нѣкоторой поверхности.

Теорема XLVIII. Винты группы третьяго порядка, имѣющіе одинаковые параметры, суть производящія одного рода однополаго гиперболоида.

Доказательство. Положимъ, что (a), (b) и (c)—три винта параметра p, входящіе въ C. Ни одинъ изъ этихъ винтовъ не входитъ въ группу втораго порядка, построенную на двухъ остальныхъ, такъ какъ въ группѣ втораго порядка есть только два винта одинаковаго параметра. Отсюда мы заключаемъ, что винты (a), (b) и (c) независимы между собой. Проведемъ прямыя α, β и γ, пересѣкающія a, b и c, и примемъ эти прямыя за оси винтовъ (α), (β) и (γ) параметра—p. Два пересѣкающихся винта, сумма параметровъ которыхъ равна нулю, взаимны между собой. Слѣдовательно, винты (α), (β) и (γ) взаимны съ каждымъ изъ винтовъ (a), (b) и (c). Но послѣдніе независимы между собой; слѣдовательно, (α), (β) и (γ) взаимны со всѣми

винтами группы C, т. е., по опредѣленію, входятъ въ C_1. Пусть теперь d—прямая, встрѣчающаяся α, β и γ. Принимая d за ось винта параметра p, найдемъ, какъ и выше, что винтъ (d) взаименъ съ (α), (β) и (γ), т. е., взаименъ съ C_1*). Но такой винтъ (d) входитъ въ C (теор. XLVI). Итакъ каждый винтъ параметра p группы C встрѣчаетъ три прямыхъ α, β и γ. *Q. E. D.*

Слѣдствіе. Винты параметра—p группы C_1 суть производящія втораго рода гиперболоида винтовъ параметра p группы C.

Въ самомъ дѣлѣ, какая-нибудь производящая δ втораго рода встрѣчаетъ всѣ производящія перваго рода. Принимая δ за ось винта (δ) параметра—p, найдемъ, что (δ) взаименъ со всѣми винтами группы C, лежащими на производящихъ перваго рода. Итакъ винтъ (δ) взаименъ съ C и, слѣдовательно, входитъ въ C_1.

Разсмотримъ гиперболоидъ (A) винтовъ нулеваго параметра. Производящія перваго рода будемъ обозначать чрезъ a, втораго — чрезъ α. Замѣтимъ, что, если прямыя a суть оси винтовъ нулеваго параметра, входящихъ въ группу C, то прямая α суть оси винтовъ нулеваго параметра группы C_1.

Пусть O— центръ гиперболоида (A), Ox, Oy, Oz — направленія его осей. Уравненіе гиперболоида имѣетъ слѣдующій видъ:

$$A)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

гдѣ a, b, c — длины полуосей. По извѣстной теоремѣ, если O_1, O_2, O_3 — углы, образуемые съ осями производящей α, d_1, d_2, d_3—кратчайшія разстоянія послѣдней отъ осей, то

$$d_1 tgO_1=\pm\frac{bc}{a},\quad d_2 tgO_2=\pm\frac{ca}{b},\quad d_3 tgO_3=\mp\frac{ab}{c}\cdot$$

---

*) *Примѣчаніе.* Независимость винтовъ (α), (β) и (γ) доказывается точно также, какъ независимость винтовъ (a), (b) и (c). *Авт.*

Въ этихъ формулахъ берутся одновременно всѣ верхніе или всѣ нижніе знаки. Положимъ, что производящимъ α соотвѣтствуютъ верхніе знаки.

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ:

$$-\frac{bc}{a}\,csO_1+d_1snO_1=o,\quad -\frac{ca}{b}\,csO_2+d_2snO_2=o,$$

$$\frac{ab}{c}\,csO_3+d_3snO_3=o.$$

Слѣдовательно, если мы примемъ оси x, y, z за оси винтовъ, параметры которыхъ даются формулами:

$$A)\quad p_x=-\frac{bc}{a},\; p_y=-\frac{ca}{b},\; p_z=\frac{ab}{c},$$

то винты (p_x), (p_y) и (p_z) будутъ взаимны съ каждымъ винтомъ (α) группы C_1, такъ какъ винты (α) нулеваго параметра. Отсюда вытекаетъ, что винты (p_x), (p_y) и (p_z) входятъ въ группу C.

Мы получили такимъ образомъ теорему:

*Теорема XLIX**). Въ группѣ C третьяго порядка есть три винта, оси которыхъ, пересѣкаясь въ одной точкѣ, взаимно-перпендикулярны.

Винты (p_x), (p_y) и (p_z) называются *центральными*, а точка ихъ пересѣченія O *центральной* точкой группы C.

Слѣдствіе. Формулы $B)$ даютъ:

$$p_x p_y p_z=abc,\quad p_y p_z=-a^2,\quad p_z p_x=-b^2,\quad p_x p_y=c^2;$$

---

*) *Примѣчаніе.* Доказательство, предложенное здѣсь, значительно отличается отъ тѣхъ, которыя были даны до сихъ поръ.

Ср. Ball., l. cit. p. 119—120; Gravelius, l. cit. S. 289—290; Занчевскій, l. cit. стр. 59—601.

Ср. также выпускъ II, стр. 53—54. *Авт.*

слѣдовательно, уравненіе A) приметъ видъ:

$$A')\quad p_x x^2+p_y y^2+p_z z^2+p_x p_y p_z=o.$$

Теорема L. Всѣ гиперболоиды имѣютъ общій центръ и общее направленіе осей.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть (α)—винтъ параметра—p группы C_1. Этотъ винтъ, по предыдущему, взаименъ съ (p_x), (p_y), (p_z); слѣдовательно,

$$(p_x-p)csO_1+d_1snO_1=o,\quad (p_y-p)csO_2+d_2snO_2=o,$$
$$(p_z-p)csO_3+d_3snO_3=o,$$

гдѣ O_1, O_2 и O_3, d_1 d_2 и d_3—углы съ осями x, y, z и кратчайшія разстоянія отъ послѣднихъ прямой α.

Эти формулы даютъ:

$$d_1tgO_1=-(p_x-p),\quad d_2tgO_2=-(p_y-p),\quad d_3tgO_3=-(p_z-p).$$

Но по теоремѣ, на которую мы уже ссылались, этимъ условіямъ удовлетворяютъ производящія одного рода гиперболоида, оси котораго совпадаютъ съ x, y, z, а длины a_1, b_1 и c_1 полуосей опредѣляются изъ условій:

$$B')\quad \frac{b_1c_1}{a_1}=p-p_x,\quad \frac{c_1a_1}{b_1}=p-p_y,\ -\frac{a_1b_1}{c_1}=p-p_z.$$

Слѣдствіе. Изъ формулъ B') вытекаетъ:

$$(p-p_x)\ (p-p_y)\ (p-p_z)=-a_1b_1c_1$$
$$(p-p_y)\ (p-p_z)=-a_1^2,\quad (p-p_z)\ (p-p_x)=-b_1^2,$$
$$(p-p_x)\ (p-p_y)=c_1^2.$$

Но уравненіе гиперболоида винтовъ (α) имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}-\frac{z^2}{c_1^2}=1.$$

Исключая a_1, b_1 и c_1 помощью полученныхъ формулъ, мы приведемъ это уравненіе къ виду:

$$B'')\quad (p-p_x)x^2+(p-p_y)y^2+(p-p_z)z^2+$$
$$+(p-p_x)(p-p_y)(p-p_z)=o.$$

Слѣдствіе II. Чрезъ каждую точку (x, y, z) пространства проходятъ вообще три винта группы третьяго порядка.

Это прямо слѣдуетъ изъ послѣдняго уравненія. Считая въ немъ величины x, y и z данными, мы получаемъ кубическое уравненіе для опредѣленія p.

Слѣдствіе III. Параметръ винта группы C обратно-пропорціоналенъ квадрату параллельнаго діаметра гиперболоида (A).

Въ самомъ дѣлѣ, винтъ (α) параметра p лежитъ на гиперболоидѣ:

$$(p-p_x)x^2+(p-p_y)y^2+(p-p_z)z^2+(p-p_x)(p-p_y)(p-p_z)=o.$$

Ассимитотическій конусъ послѣдняго представляется уравненіемъ:

$$C)\quad (p-p_x)x^2+(p-p_y)y^2+(p-p_z)z^2=o.$$

Пусть α_1—производящая конуса, параллельная α. Прямая α_1 удовлетворяетъ послѣднему уравненію и, кромѣ того, встрѣчаетъ гиперболоидъ (A) въ нѣкоторой точкѣ m.

Координаты точки m должны, слѣдовательно, удовлетворять уравненіямъ $A')$ и $C)$.

Но второе изъ этихъ уравненій даетъ:

$$r^2=\frac{p_x x^2+p_y y^2+p_z z^2}{p},$$

гдѣ r—разстояніе точки m отъ центральной точки. Изъ уравненія $A')$ слѣдуетъ:

$$p_x x^2+p_y y^2+p_z z^2=-p_x p_y p_z,$$

откуда

$$r^2 = -\frac{p_x p_y p_z}{p} \text{ и } p = -\frac{p_x p_y p_z}{r^2}. \quad Q.\ E.\ D.$$

Доказанныя теоремы заключают основныя свойства группы третьяго порядка.

Въ заключеніе настоящей главы укажемъ на одно свойство группы шестаго порядка, которое мы раньше (стр. 58) допустили безъ доказательства. Прежде всего замѣтимъ, что вообще нѣтъ винтовъ, взаимныхъ со всѣми винтами группы шестаго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, одинъ такой винтъ (α) долженъ былъ бы удовлетворять шести условіямъ вида: $\omega_{\alpha\beta} = o$. Но въ эти условія входятъ лишь параметръ винта (α) и величины, опредѣляющія положенія его оси. Такъ какъ прямая опредѣляется 4 величинами, то, слѣдовательно, пять неизвѣстныхъ величинъ должны быть опредѣлены изъ 6 условныхъ уравненій: $\omega_{\alpha\beta} = o$, что вообще невозможно.

Докажемъ теперь, что всякій винтъ параметра p, осью котораго служитъ данная прямая α, входитъ въ группу шестаго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, каждый винтъ группы построенной на 6 независимыхъ винтахъ $(R_1^{(1)}, p_1)$, $(R_2^{(2)}, p_2)$, .. $(R_6^{(6)}, p_6)$, опредѣляется 5-ю отношеніями: $\frac{R_1^{(1)}}{R_6^{(6)}}, \frac{R_1^{(2)}}{R_6^{(6)}}, \ldots \frac{R_5^{(5)}}{R_6^{(6)}}$. Винтъ параметра p, лежащій на прямой α, также опредѣляется 5 величинами если на центръ винта мы не обращаемъ вниманія. Изъ этихъ 5 величинъ 4 опредѣляютъ положеніе винтовой оси, пятая — параметръ. Такъ какъ число неизвѣстныхъ равно числу произвольныхъ величинъ $\frac{R_i^{(i)}}{R_6^{(6)}}$, которыми можно располагать при опредѣленіи винта группы, то мы заключаемъ, что всегда можно такъ подобрать величины $R_i^{(i)}$, чтобы результирующій винтъ группы имѣлъ данный параметръ и данную ось α. $Q.\ E.\ D.$

ГЛАВА VII.

О возможномъ перемѣщеніи подобно-измѣняемой системы точекъ. Лучистое растяженіе. Общія свойства. Кинематическій винтъ. Работа силъ, приложенныхъ къ точкамъ подобно-измѣняемой системы.

Назовемъ *гомологичными* два положенія A и A' подобно-измѣняемой фигуры A. A и A' суть, по опредѣленію, двѣ подобныя фигуры. Два ихъ элемента α и α', представляющихъ положенія въ A и A' одного и того же элемента a фигуры A, также назовемъ *гомологичными*. Если α совпадаетъ съ α', то элементъ a назовемъ *двойнымъ* элементомъ фигуръ A и A'.

I. *О лучистомъ растяженіи.* Пусть A—какая-нибудь фигура, O—опредѣленная точка послѣдней. Соединимъ съ O всѣ точки α фигуры A и на прямыхъ $O\alpha$ построимъ точки α' такъ, чтобы

$$1)\qquad \frac{O\alpha'}{O\alpha}=E,$$

гдѣ E—нѣкоторое число, а отрѣзки $O\alpha$ и $O\alpha'$ имѣютъ одинаковое направленіе. Точки α', очевидно, образуютъ фигуру A', подобную фигурѣ A. O есть двойная точка, а всякая прямая $O\alpha\alpha'$—двойная прямая обѣихъ фигуръ. Такъ какъ фигуры A и A' подобны, то каждую изъ нихъ можемъ считать положеніемъ подобно-измѣняемой фигуры A, точки a которой изъ положенія α перешли въ положенія α', причемъ точка O фигуры неподвижна. Такое движеніе фигуры A назовемъ *лучистымъ растяженіемъ* (сжатіемъ), точку O — *центромъ* послѣдняго. Итакъ лучистымъ растяженіемъ называется такое движеніе подобно-измѣняемой фигуры A, при которомъ одна изъ ея точекъ, центръ растяженія, остается неподвижной, а всѣ остальныя точки движутся по прямымъ, соединяющимъ ихъ съ центромъ

растяженія. Отношеніе $\frac{\alpha\alpha'}{O\alpha}=\tau$ пути, проходимаго при этомъ какой-нибудь точкой α, къ первоначальному разстоянію этой точки отъ центра O растяженія (сжатія) назовемъ коэффиціентомъ растяженія (сжатія). Очевидно,

$$p=\frac{O\alpha'-O\alpha}{O\alpha}=E-1.$$

Пусть (α, α'), (β, β'), (γ, γ') — три пары гомологичныхъ точекъ фигуръ A и A'.

Изъ равенствъ:

$$\frac{1}{E}=\frac{O\alpha}{O\alpha'}=\frac{O\beta}{O\beta'}=\frac{O\gamma}{O\gamma'},$$

мы заключаемъ, что прямыя $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$, $\alpha\gamma$ и $\alpha\gamma'$, $\beta\gamma$ и $\gamma'\gamma'$ соотвѣтственно параллельны. Слѣдовательно, параллельны и плоскости $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$. Но эти прямыя и плоскости гомологичны. Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема LI. Если подобно-измѣняемая фигура испытываетъ лучистое растяженіе (сжатіе), то прямыя и плоскости фигуры движутся параллельно самимъ себѣ.

Слѣдствіе. Прямыя и плоскости, проходящія чрезъ центръ растяженія остаются неподвижными.

Эта теорема вполнѣ обрисовываетъ лучистое растяженіе.

II. *Общія свойства.* Разсмотримъ здѣсь соотношенія между двумя положеніями A и A' подобно-измѣняемой фигуры A.

Теорема LII. Если два положенія A и A' подобно-измѣняемой фигуры A имѣютъ двойную прямую L, то они имѣютъ двойную точку O на той же прямой.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α, β, γ, . . —точки прямой L, принадлежащія фигурѣ A. Такъ какъ L—двойная прямая, то гомологичныя точки α', β', γ' фигуры A' также лежатъ на L. Итакъ на прямой L лежатъ два ряда точекъ $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ и

(α', β', γ',..). Но эти ряды подобны; слѣдовательно, теорема доказана *).

Теорема LIII. Если два положенія A и A' подобно-измѣняемой фигуры A имѣютъ двойную точку O, то они имѣютъ одну двойную прямую L, проходящую чрезъ O.

Доказательство. Пусть A и A'—два положенія фигуры A, O—двойная точка фигуръ A и A', (α, α') — пара гомологичныхъ точекъ послѣднихъ. Подвергнемъ фигуру A въ положеніи A' лучистому растяженію (сжатію), за центръ котораго примемъ точку O, до тѣхъ поръ, пока растоянія $O\alpha''$ новыхъ положеній точекъ α' отъ O не станутъ равными разстояніямъ $O\alpha$ отъ той же точки O гомологичныхъ точекъ фигуры A. Точки α'' образуютъ фигуру A'', которая, очевидно, конгруэнтна фигурѣ A, причемъ O — общая точка фигуръ A и A''. Но двѣ конгруэнтныя фигуры, имѣющія общую точку, имѣютъ двойную прямую, проходящую чрезъ O **). Назовемъ ее чрезъ L. Съ L совпадаютъ, слѣдовательно, гомологичныя прямыя l и l'' фигуръ A и A''. Прямая l' фигуры A', гомологичная прямой l'' фигуры A'', гомологична и прямой l. Но прямыя l'' и l' совпадаютъ (теор. LI, слѣд.); слѣдовательно, совпадаютъ прямыя l и l', т. е., L есть двойная прямая фигуръ A и A' Q. E. D.

Перейдемъ теперь къ общему случаю.

Пусть A и A'—два положенія фигуры A, (α, α')—пара гомологичныхъ точекъ. Эти точки суть центры пучковъ гомологичныхъ прямыхъ l и l'. Перенесемъ фигуру A, какъ неизмѣняемую фигуру, параллельно самой себѣ такъ, чтобы точка α

*) *Ярошенко* Проэктивная геометрія, стр. 122.

Замѣчу, что, кромѣ O, ряды (α, β, γ,..), (α', β', γ',..) имѣютъ другую двойную точку, которая лежитъ въ безконечности.

**) *Chasles*. Sur le déplacement d'une figure de forme invariable dans l'espace. Comptes rendus hebd. des Séances de l'Académie des Sciences. Paris, 1860, T. LI.

совпала съ α'. Пусть новое положенiе фигуры A есть A''. Гомологичныя прямыя λ и λ'' послѣднихъ параллельны между собой. Но двѣ фигуры A' и A'', по только что доказанной теоремѣ, имѣютъ общую прямую L (l', l''). Слѣдовательно, если l—прямая фигуры A, гомологичная прямой l', то прямыя l и l' параллельны между собой.

Пусть теперь (β, β')—другая пара гомологичныхъ точекъ. Проведемъ чрезъ β прямую m, параллельную прямой l. Гомологичная m прямая m' фигуры A' проходитъ чрезъ β' и параллельна прямой l', такъ какъ къ подобно-измѣняемой фигурѣ прямыя остаются прямыми, а углы не измѣняются. Но прямыя l и l' параллельны; слѣдовательно, параллельны и прямыя m, m'.

Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема LIV. Если подобно-измѣняемая фигура А перешла изъ положенiя A въ A', то чрезъ каждую точку α фигуры A проходитъ опредѣленная прямая l, параллельная гомологичной прямой фигуры A'. Прямыя l, соотвѣтствующiя различнымъ точкамъ α фигуры A, параллельны между собой.

Пусть A и A'—два положенiя фигуры А, (α, α')—пара гомологичныхъ точекъ, (l, l')—параллельныя гомологичныя прямыя, проходящiя чрезъ α и α' соотвѣтственно. Проведемъ чрезъ l плоскость λ. Гомологичная λ плоскость λ' фигуры A' проходитъ чрезъ l. Точку плоскостей λ, проходящихъ чрезъ l, отвѣчаетъ въ A' пучекъ плоскостей λ', проходящихъ чрезъ l'. Уголъ (λ_1, λ_2), образуемый двумя плоскостями λ_1 и λ_2 перваго порядка, равенъ углу (λ_1', λ_2'), образуемому двумя гомологичными плоскостями втораго, такъ какъ въ подобно измѣняемой системѣ углы не измѣняются. Но оси l и l' этихъ пучковъ параллельны; слѣдовательно, гомологичныя плоскости пересѣкаются по производящимъ s прямого круглаго цилиндра σ, проходящаго чрезъ l и l'. Такъ какъ поверхность, подобная прямому круглому цилиндру, есть также прямой круглый цилиндръ, то, слѣдова-

тельно, цилиндру σ гомологиченъ въ A' прямой круглый цилиндръ σ'. Но σ проходитъ чрезъ l, слѣдовательно, σ' проходитъ чрезъ l'. Кромѣ того, по предыдущему, l' лежитъ на σ. Отсюда мы заключаемъ, что σ и σ' имѣютъ еще одну общую производящую s. Замѣчая, что плоскости (l, s) и (l', s) гомологичны, мы заключаемъ, что прямая s', гомологичная прямой s, должна лежать въ плоскости (l', s). Но эта прямая должна лежать и на цилиндрѣ σ' и, кромѣ того, не совпадаетъ съ l'; слѣдовательно, она совпадаетъ съ s.

Мы получили такимъ образомъ теорему *).

Теорема LV. Два положенія A и A' подобно-измѣняемой фигуры всегда имѣютъ двойную прямую s и, слѣдовательно, двойную точку O. (Теор. LII).

Прямую s назовемъ центральной прямой, точку O—центральной точкой фигуръ A и A'.

Проведемъ чрезъ s двѣ плоскости σ_1, σ_2. Гомологичныя имъ плоскости σ_1', σ_2' фигуры A' должны проходить чрезъ s такъ какъ s—двойная прямая. Уголъ (σ_1, σ_2) равенъ, по предыдущему, углу (σ_1', σ_2'). Прибавляя къ каждому изъ этихъ угловъ или вычитывая общій уголъ (σ_1', σ_2), найдемъ:

$$\angle(\sigma_1, \sigma_1') = \angle(\sigma_2, \sigma_2'),$$

что даетъ теорему:

Теорема LVI. Гомологичныя плоскости обѣихъ фигуръ, проходящія чрезъ центральную прямую, образуютъ между собой одинъ и тотъ же уголъ.

Назовемъ этотъ уголъ *угломъ вращенія* фигуръ A и A' и обозначимъ его чрезъ θ. На основаніи предыдущаго для того, чтобы перевести фигуру А изъ положенія A въ положе-

---

*) *Примѣчаніе.* Обращаю вниманіе на предложенное здѣсь доказательство. Оно легко можетъ быть приложено къ гомографическимъ фигурамъ. *Авт.*

ніе A', нужно фигуру, не измѣняя ея размѣровъ, повернуть вокругъ центральной прямой S на уголъ θ и затѣмъ подвергнуть лучистому растяженію (сжатію), центръ котораго въ центральной точкѣ O. Коэффиціентъ растяженія или сжатія равенъ отношенію $\frac{\alpha\alpha'}{O\alpha}$, если (α, α')—пара гомологичныхъ точекъ центральной прямой.

Для случая двухъ безконечно-близкихъ положеній подобно-измѣняемой фигуры получаемъ теорему:

Теорема LVII. Элементарное движеніе подобно-измѣняемой фигуры состоитъ изъ элементарнаго вращенія $d\vartheta$ вокругъ опредѣленной прямой S и элементарнаго лучистаго растяженія $d\tau$, центромъ котораго служитъ опредѣленная точка O прямой S.

III. *О кинематическомъ винтѣ.* Назовемъ центральнымъ винтомъ совокупность элементарнаго вращенія $d\vartheta$ вокругъ S и лучистаго растяженія (сжатія) $d\tau$, центромъ котораго служитъ опредѣленная точка O прямой S. Отношеніе $\frac{d\tau}{d\vartheta}$ назовемъ *параметромъ* p винта. Самый винтъ будетъ обозначать символомъ $(d\vartheta_s, p_0)$.

Условимся считать $d\vartheta$ положительной величиной, а $d\tau$— положительной въ случаѣ растяженія, отрицательной въ случаѣ сжатія. Тогда параметръ p будетъ положителенъ въ первомъ случаѣ, отрицателенъ во второмъ *).

Для того, чтобы геометрически представить винтъ $(d\vartheta_s, p_0)$, откладываемъ на оси S отрѣзокъ $O\omega$, равный $\frac{d\vartheta}{dt}$, и стрѣлкой

*) *Примѣчаніе.* За недостаткомъ мѣста я немогу изложить здѣсь теорію центральныхъ винтовъ и вынужденъ отослать читателя къ слѣдующему выпуску настоящаго труда. Ограничусь замѣчаніемъ, что свойства кинематическихъ и силовыхъ винтовъ подобно-измѣняемой системы тожественны. Такимъ образомъ относительно подобно-измѣняемой системы можно повторить слова Баля, сказанныя имъ въ примѣненіи къ твердому тѣлу: «.... законы сложенія кинематическихъ винтовъ (twist) и силовыхъ (wrench) тожественны». Ball, l. cit, p. 11, § 12. Cp. Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Jour. de Liouville, 1851 г. T. XVI, p. 22, примѣчаніе къ § 20.

указываемъ сторону вращенія $d\vartheta$, затѣмъ откладываемъ на той-же прямой S отрѣзокъ Op, равный параметру p винта. Отрѣзки $O\omega$ и Op имѣютъ одинаковое направленіе, если параметръ p положителенъ; — противоположное, если параметръ отрицателенъ.

Выведемъ теперь формулы для возможныхъ перемѣщеній точекъ подобно-измѣняемой фигуры. Замѣтимъ прежде всего, что на основаніи предыдущаго всякое возможное перемѣщеніе фигуры сводится къ опредѣленному центральному винту $(d\vartheta_s, p_0)$. Примемъ центръ O послѣдняго за начало прямоугольныхъ координатъ x, y, z, причемъ ось z направимъ по оси S винта. Тогда, если x, y, z — координаты точки α фигуры, φ — уголъ съ осью z, образуемый прямой $O\alpha = \rho$, ψ—уголъ, образуемый плоскостью $(S, O\alpha)$ съ осью x, то

$$A) \quad x = \rho sn\varphi cs\psi, \quad y = \rho sn\varphi sn\psi, \quad z = \rho cs\varphi.$$

На основаніи предыдущаго,

$$\delta\psi = \delta\vartheta, \ \delta\rho = \rho\delta\tau = \rho p\delta\vartheta, \ \delta\varphi = o:$$

слѣдовательно, формулы A) дадутъ:

$$B) \begin{cases} \delta x = sn\varphi cs\psi\delta\rho - \rho sn\varphi sn\psi\delta\psi = \rho sn\varphi\delta\vartheta(pcs\psi - sn\psi) \\ \delta y = sn\varphi sn\psi\delta\rho + \rho sn\varphi cs\psi\delta\psi = \rho sn\varphi\delta\vartheta(psn\psi + cs\psi) \\ \delta z = cs\varphi\delta\rho \qquad\qquad\qquad\qquad = \rho pcs\varphi\delta\vartheta \\ \delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \delta\rho^2 + \rho^2 sn^2\varphi\delta\psi^2 = \rho^2\delta\vartheta^2(p^2 + sn^2\varphi) \end{cases}$$

Послѣдняя изъ формулъ B) показываетъ, что элементъ δs пути точки α лежитъ въ касательной плоскости къ прямому круглому конусу, вершина котораго въ O, а осью служитъ ось z. При этомъ

$$C) \quad tg(\rho, \delta s) = \frac{\rho sn\varphi\delta\psi}{\delta\rho} = \frac{sn\varphi}{p}.$$

Формулы B) можно помощью формулъ A) представить въ слѣдующемъ, болѣе удобномъ видѣ:

$$B')\quad \delta x=(px-y)\delta\vartheta,\ \delta y=(py+x)\delta\vartheta,\ \delta z=pz\delta\vartheta.$$

Пусть α, β—двѣ точки фигуры. Обозначая $\alpha\beta$ чрезъ r, а cs'ы угловъ, образуемыхъ этой прямой съ осями координатъ чрезъ α, β, γ, найдемъ:

$$x-x'=\rho\alpha,\ y-y'=\rho\beta,\ z-z'=\rho\gamma,$$

гдѣ x', y', z'—координаты точки β. Формулы B') даютъ:

$$B'')\left\{\begin{aligned}&\delta x-\delta x'=[p(x-x')-(y-y')]\delta\vartheta=\rho(p\alpha-\beta)\delta\vartheta,\\&\delta y-\delta y'=[p(y-y')+(x-x')]\delta\vartheta=\rho(p\beta+\alpha)\delta\vartheta,\\&\delta z-\delta z'=p(z-z')\delta\vartheta=\rho p\gamma\delta\vartheta.\end{aligned}\right.$$

Вычислимъ теперь работу пары вращенія $((P,\alpha\beta))$, плечомъ которой служитъ отрѣзокъ $\alpha\beta$. Если X, Y, Z — слагающія силы P, дѣйствующей на точку α, то слагающія силы—P, дѣйствующей на β, будутъ: $-X,-Y,-Z$. Обозначая cs'ы угловъ, образуемыхъ съ осями координатъ направленіемъ силы P, чрезъ λ, μ, ν, имѣемъ:

$$X=P\lambda,\ \ Y=P\mu,\ \ Z=P\nu.$$

Кромѣ того, прямая $\alpha\beta$ перпендикулярна къ направленію силы P, слѣдовательно,

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=o.$$

Возможная работа $\delta\Pi$ пары $(P,\alpha\beta)$ представляется выраженіемъ:

$$\delta\Pi=X(\delta x-\delta x')+Y(\delta y-\delta y')+Z(\delta z-\delta z')$$

или

$$\delta\Pi = P\rho\delta\vartheta\{p(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)+(\alpha\mu-\beta\lambda)\},$$

что въ силу послѣдней формулы принимаетъ видъ:

$$\delta\Pi = P\rho\delta\vartheta(\alpha\mu-\beta\lambda).$$

Но, если M моментъ пары, l, m, n — cs'ы угловъ съ осями координатъ прямой M, то

$$M = P\rho,\ l\alpha+m\beta+n\gamma=o,\ l\lambda+m\mu+n\nu=o,$$

такъ какъ прямая M перпендикулярна къ плоскости пары. Изъ послѣднихъ формулъ выводимъ:

$$\frac{l}{\beta\nu-\gamma\mu}=\frac{m}{\gamma\lambda-\alpha\nu}=\frac{n}{\alpha\mu-\beta\lambda}=\frac{1}{h},$$

гдѣ

$$h^2=(\beta\nu-\gamma\mu)^2+(\gamma\lambda-\alpha\nu)^2+(\alpha\mu-\beta\lambda)^2=$$

$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ (\lambda^2+\mu^2+\nu^2)-(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)^2=1,$$

въ силу формулы: $\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=o.$

Итакъ

$$\alpha\mu-\beta\lambda=\pm n,$$

благодаря чему, предыдущее выраженіе для $\delta\Pi$ обратится въ слѣдующее:

$$D)\quad \delta\Pi=\pm Mn\delta\vartheta=N\delta\vartheta,$$

гдѣ N — слагающая момента M по оси вращенія z.

Формула $D)$ показываетъ, что работа пары вращенія вычисляется точно также, какъ работа пары Пуансо въ твердомъ тѣлѣ.

Слѣдствіе. Пара вращенія, моментъ которой перпендикуляренъ къ оси центральнаго винта, не производитъ никакой работы.

Вычислимъ теперь работу $\delta\Pi_1$ пары растяженія (P, ρ).

Въ первой главѣ мы видѣли, что

$$\delta\Pi_1 = P\delta\rho.$$

Замѣняя здѣсь $\delta\rho$ на $p\rho\delta\vartheta$ и замѣчая, что $P\rho$ есть моментъ M_1 пары, получимъ:

$$E) \quad \delta\Pi_1 = M_1 p\delta\vartheta.$$

Намъ остается вычислить работу $\delta\Pi_2$ силы P_α. Для этого воспользуемся формулами B').

Если X, Y, Z—слагающія силы P, x, y, z—координаты точки α, то

$$\delta\Pi_2 = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = p\delta\vartheta(Xx + Yy + Zz) + \delta\vartheta(xY - yX).$$

Эту формулу можно также получить, если приведемъ силу P_α къ центральной точкѣ, но этотъ выводъ сложнѣе.

Внося въ послѣднюю формулу, вмѣсто X, Y, Z ихъ выраженія помощью величины силы P и cs'овъ λ, μ, ν, образуемыхъ послѣдней съ осями, найдемъ:

$$F) \quad \delta\Pi_2 = P\delta\vartheta\{p(\lambda x + \mu y + \nu z) + (x\mu - y\lambda)\}.$$

Теперь мы можемъ вычислить работу силоваго винта (P_α, p_σ), центръ котораго въ α, осью служитъ прямая σ. Замѣчая, что моментъ винтовой пары равенъ Pp_σ, найдемъ для искомой работы $\delta\Pi_3$:

$$\delta\Pi_3 = \delta\Pi + \delta\Pi_2 = Pp_\sigma\nu\delta\vartheta + P\delta\vartheta\{p(\lambda x + \mu y + \nu z) + (x\mu - y\lambda)\},$$

$$G) \quad \delta\Pi_3 = P\delta\vartheta\{\nu p_\sigma + (\lambda x + \mu y + \nu z)p + (\mu x - \lambda y)\}\text{*)}.$$

---

*) *Примѣчаніе.* Это выраженіе работы силоваго винта значительно отличается отъ соотвѣтствующей работы винта, дѣйствующаго на твердое тѣло[1]).

[1]) Cp. Ball. l. cit. p. 12.

Изъ полученной формулы вытекаетъ, что винтъ (p_σ) не производитъ никакой работы по отношенію къ винту (p), если

$$H)\quad \nu p_\sigma + (\lambda x + \mu y + \nu z)p + (\mu x - \lambda y) = o.$$

Назовемъ такой винтъ (p_σ) *особымъ* по отношенію къ винту (p). Полученному условію не трудно дать геометрическое толкованіе. Для этого замѣтимъ, что уравненіе оси (σ) имѣетъ видъ:

$$\frac{\xi - x}{\lambda} = \frac{\eta - y}{\mu} = \frac{\zeta - z}{\nu}\ .$$

Проекція этой оси на плоскости (x, y) представлятся уравненіемъ:

$$\mu\xi - \lambda\eta = \mu x - \lambda y.$$

Кратчайшее разстояніе d этой проекціи отъ начала координатъ есть:

$$d = \frac{\mu x - \lambda y}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\mu x - \lambda y}{\sqrt{1 - \nu^2}} = \frac{\mu x - \lambda y}{snO},$$

если O—уголъ, cs'ъ котораго равенъ ν. Далѣе вводя:

$$x = \rho\alpha,\ \ y = \rho\beta,\ \ z = \rho\beta,$$

получимъ:

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \rho cs(\rho, \sigma).$$

Итакъ предыдущее условіе приметъ видъ:

$$p_\sigma csO + dsnO + p\rho cs(\rho, \sigma) = o.$$

Можно было-бы геометрически вывести это условіе. Но на этомъ останавливаться не будемъ и перейдемъ къ изслѣдованію формулы H. Представимъ ее для этого въ слѣдующихъ видахъ:

$$H') \quad \lambda(px-y)+\mu(py+x)+\nu(pz+p_\sigma)=o,$$

$$H'') \quad x(p\lambda+\mu)+y(p\mu-\lambda)+zp\nu+\nu p_\sigma=o,$$

къ которымъ надо прибавить условіе:

$$I) \quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

Изъ формулы H'') вытекаетъ.

Теорема LVIII. Центры параллельныхъ силовыхъ винтовъ равнаго параметра p_σ, особыхъ по отношенію къ кинематическому винту (p), лежатъ въ плоскости P.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ величины λ, μ, ν и p_σ постоянны.

Уравненіе плоскости P имѣетъ видъ:

$$1) \quad x(p\lambda+\mu)+y(p\mu-\lambda)+zp\nu+\nu p_\sigma=o.$$

Такъ какъ p_σ входитъ въ членъ, независящій отъ (x, y, z), то мы получаемъ теорему:

Теорема LIX. Плоскости P, соотвѣтствующія различнымъ параметрамъ p_σ, параллельны между собой. Параметры p_σ пропорціональны разстояніямъ d плоскостей P отъ центра кинематическаго винта.

Въ самомъ дѣлѣ, этотъ центръ есть начало координатъ. Изъ уравненія 1) для d получаемъ выраженіе:

$$d=\frac{\nu p_\sigma}{\sqrt{(p\lambda+\mu)^2+(p\mu-\lambda)^2+p^2\nu^2}}=\frac{\nu p_\sigma}{\sqrt{p^2+1-\nu^2}}$$

въ силу 1).

Каждому направленію (λ, μ, ν) силовыхъ винтовъ отвѣчаетъ отдѣльный пучекъ π параллельныхъ плоскостей P. Если (α, β, γ)—направленіе общей нормали N къ плоскостямъ P, то направленія (λ, μ, ν) и (α, β, γ) назовемъ *сопряженными*.

Между сопряженными направленіями имѣются слѣдующія соотношенія:

$$2)\quad p\lambda+\mu=R\alpha,\ p\mu-\lambda=R\beta,\ p\nu=R\gamma,$$

гдѣ R—нѣкоторый множитель. Возвышая эти уравненія въ квадратъ и сложивъ результаты, находимъ:

$$2')\quad p^2+1-\nu^2=R^2,$$

откуда

$$3)\quad R=\sqrt{1+p^2-\nu^2}.$$

Въ силу 2′) и послѣдней изъ формулъ 2) находимъ:

$$p^2R^2=p^2(1+p^2)-p^2\nu^2=p^2(1+p^2)-\gamma^2R^2,$$

откуда

$$3')\quad R=p\sqrt{\frac{1+p^2}{\gamma^2+p^2}}.$$

Умноживъ уравненія 2) на λ, μ и ν соотвѣтственно и сложивъ результаты, найдемъ:

$$p=R(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu)=Rcs(\sigma,N),$$

слѣдовательно,

$$4)\quad cs(\sigma,N)=\frac{p}{\sqrt{1+p^2-\nu^2}};\ tg(\sigma,N)=\frac{1}{p}\sqrt{1-\nu^2}.$$

Изъ 2) и 3) слѣдуетъ:

$$5)\quad \alpha=\frac{p\lambda+\mu}{\sqrt{1+p^2-\nu^2}},\ \beta=\frac{p\mu-\lambda}{\sqrt{1+p^2-\nu^2}},\ \gamma=\frac{p\nu}{\sqrt{1+p^2-\nu^2}}=$$

$$=\nu cs(\sigma,N).$$

Проведемъ чрезъ начало координатъ прямыя $S(\lambda,\mu,\nu)$ и

T (α, β, γ). Эти прямыя и ось z встрѣтятъ шаровую поверхность, центръ которой въ началѣ координатъ, въ точкахъ S, T и Z.

По извѣстной формулѣ

$$csZT = csZScsST + snZSsnSTcsS.$$

Но въ данномъ случаѣ

$$csZT=\gamma,\ csZS=\nu,\ \angle(S,T)=\angle(\sigma,N),$$

слѣдовательно, въ силу послѣдней изъ формулъ 5),

$$6)\quad csS=o,$$

что даетъ теорему:

Теорема LX. Плоскость, параллельная осямъ z и σ кинематическаго винта и особаго силоваго винта, перпендикулярна къ плоскости, параллельной оси σ послѣдняго и сопряженному съ σ направленію.

Вышеупомянутый сферическій треугольникъ STZ, уголъ S котораго равенъ прямому, даетъ:

$$tgST=snZStgZ$$

или въ силу 4)

$$\frac{\sqrt{1-\nu^2}}{p}=\sqrt{1-\nu^2}\,tgZ,$$

откуда

$$7)\quad cotZ=p.$$

Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема LXI. Плоскость, параллельная осямъ кинематическаго и особаго силоваго винта (p_σ), образуетъ постоянный уголъ Z съ плоскость, параллельной оси кинематическаго винта и направленію, сопряженному съ σ. $CotZ$ равенъ параметру p кинематическаго винта.

Каждому направленію (λ, μ, ν) особыхъ винтовъ (p_σ) отвѣчаетъ отдѣльный пучекъ параллельныхъ плоскостей P, а между ними одна плоскость P_σ, точки которой служатъ центрами винтовъ направленія (λ, μ, ν) и параметра p_σ. Замѣчая, что уравненіе 1)

$$x(p\lambda+\mu)+y(p\mu-\lambda)+zp\nu+\nu p_\sigma=o$$

удовлетворяется величинами

$$x=y=o,\ z=-\frac{p_\sigma}{p},$$

мы заключаемъ:

Теорема LXII. Плоскости P_σ, соотвѣтствующія одинаковому параметру p_σ и различнымъ направленіямъ (λ, μ, ν) особыхъ винтовъ, проходятъ чрезъ опредѣленную точку Σ оси кинематическаго винта.

Точку Σ назовемъ *полюсомъ* параметра p_σ.

По данному полюсу σ легко построить плоскость P_σ, соотвѣтствующую данному направленію (λ, μ, ν). Для этого чрезъ σ проводимъ прямую $\sigma\ (\lambda, \mu, \nu)$. Затѣмъ чрезъ ось кинематическаго винта проводимъ плоскость S, образующую съ плоскостью (z, σ) уголъ Z, *cot*'ъ котораго равенъ параметру кинематическаго винта. Плоскость R, проходящая чрезъ прямую σ и перпендикулярная къ плоскости (z, σ), встрѣтитъ плоскость S по нормали N къ искомой плоскости P_σ. Такъ какъ послѣдняя проходитъ чрезъ полюсъ σ, то она вполнѣ опредѣлена.

Положимъ, что прямая $\sigma\ (\lambda, \mu, \nu)$ перпендикулярна къ оси z кинематическаго винта. Тогда плоскость R будетъ перпендикулярна къ z; слѣдовательно, и прямая N перпендикулярна къ z. Отсюда мы заключаемъ, что въ этомъ случаѣ P_σ проходитъ чрезъ z. Замѣчая, что

$$tg(\sigma, P_\sigma) = cot(\sigma, N)$$

и что въ данномъ случаѣ

$$\nu = o,$$

мы въ силу второй изъ формулъ 4) получаемъ:

$$tg(\sigma, P_\sigma) = p,$$

чѣмъ доказывается слѣдующая теорема:

Теорема LXIII. Если силовой винтъ (p_σ), ось котораго перпендикулярна къ оси кинематическаго винта (p), будетъ особымъ по отношенію къ послѣднему, то tg'ъ угла, образуемаго съ осью перваго винта плоскостью, проходящей чрезъ его центръ и ось втораго винта, равенъ параметру послѣдняго.

Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ плоскости P_σ, сопряженныя съ направленіями винтовъ p_σ, проходятъ чрезъ ось кинематическаго винта, а параметръ p_σ можетъ быть произвольнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ разсматриваемомъ случаѣ, уравненіе плоскости P_σ и условіе H'') принимаютъ видъ:

$$x(p\lambda + \mu) + y(p\mu - \lambda) = o,$$

это—уравненіе плоскости, проходящей чрезъ ось z, и въ него, дѣйствительно, параметръ p не входитъ:

Положимъ, что прямая σ (λ, μ, ν) совпадаетъ съ осью z. Плоскость (z, σ) въ этомъ случаѣ становится неопредѣленной. Но нормаль N вполнѣ опредѣляетя предыдущимъ построеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ данномъ случаѣ обѣ плоскости R и S проходятъ чрезъ Z и не совпадаютъ одна съ другой, такъ какъ одна изъ нихъ перпендикулярна къ плоскости (z, σ), а другая образуетъ съ послѣдней уголъ, отличный отъ прямого. Отсюда мы заключаемъ, что прямая N совпадаетъ съ z; слѣдовательно, P_σ перпендикулярна къ z. Замѣчая, что въ этомъ случаѣ P_σ есть центральная плоскость винта (p_σ), мы заключаемъ:

Теорема LXIV. Если силовой винтъ (p_σ), ось котораго параллельна оси кинематическаго винта, будетъ особымъ по

отношенію къ послѣднему, то разстояніе центральныхъ плоскостей обоихъ винтовъ равно (по абсолютной величинѣ) отношенію $\frac{p_\sigma}{p}$ параметровъ винтовъ.

Пусть A (ξ, η, ζ)—какая-нибудь точка пространства. Изслѣдуемъ распредѣленіе особыхъ винтовъ (p_σ) проходящихъ чрезъ A.

Уравненія оси σ винта имѣютъ видъ:

$$\frac{\xi-x}{\lambda}=\frac{\eta-y}{\mu}=\frac{\zeta-z}{\nu},$$

гдѣ x, y, z—координаты центра. Исключая λ, μ и ν между этими уравненіями и H'), находимъ:

$$8)\quad (\xi-x)(px-y)+(\eta-y)(py+x)+(\zeta-z)(pz+p\sigma)=o$$

что можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$8')\quad p(x^2+y^2+z^2)-x(p\xi+\eta)-y(p\eta-\xi)-z(p\zeta-p\sigma)=p\sigma\zeta.$$

Это уравненіе шаровой поверхности S_A. Замѣтимъ, кромѣ того, что поверхность S_σ проходитъ чрезъ A и точку: o, o, $-\frac{p_\sigma}{p}$, т. е., чрезъ полюсъ Σ параметра p_σ. Это прямо слѣдуетъ изъ уравненія 8). Мы получили, слѣдовательно, теорему:

Теорема LXV. Существуетъ безчисленное множество силовыхъ винтовъ параметра p_σ, проходящихъ чрезъ точку A и особыхъ по отношенію къ данному кинематическому винту (p). Центры этихъ винтовъ лежатъ на шаровой поверхности S_A, проходящей чрезъ A и полюсъ параметра p_σ.

Слѣдствіе. Особые винты равнаго параметра p_σ, центромъ которыхъ служитъ A, лежатъ въ плоскости (A), касательной въ A къ шару S_A.

Уравненіе плоскости A), очевидно, есть уравненіе (8), если мы въ послѣднемъ будемъ считать перемѣнными ξ, η и ζ, а постоянными x, y, z, которыя въ этомъ случаѣ слѣдуетъ разсматривать, какъ координаты точки A, принимаемой за центръ особаго винта.

Координаты α, β, γ центра шара S_A опредѣляются изъ формулъ:

$$9) \quad 2p\alpha = p\xi + \eta, \quad 2p\beta = p\eta - \xi, \quad 2p\gamma = p\zeta - p\sigma.$$

Замѣчая, что α и β отъ p_σ и ζ не зависятъ, заключаемъ:

Теорема LXVI. Центры шаровъ S_A, соотвѣтствующихъ различнымъ параметрамъ p_σ, лежатъ на прямой L, параллельной оси кинематическаго винта (p). Прямыя L, соотвѣтствующія различнымъ точкамъ A прямой M, параллельной оси винта (p), совпадаютъ.

Слѣдствіе. По предыдущему, особые винты равнаго параметра p_σ, центръ которыхъ въ A, лежитъ въ плоскости (A), касательной къ шару S_A. На основаніи послѣдней теоремы заключаемъ:

Теоема LXVII. Плоскости (A), соотвѣтствующія различнымъ параметрамъ p_σ, обертываютъ прямую M_A, перпендикулярную въ A къ плоскости, проходящей чрезъ точку A и прямую L.

Эту прямую M_A назовемъ *осью* точки A. Ось M_A есть ось пучка плоскостей (A), въ каждой изъ которыхъ лежитъ бечисленное множество особыхъ винтовъ параметра p_σ, имѣющихъ центромъ точку A. Ось точки A на основаніи теоремы LXVI перпендикулярна къ оси кинематическаго винта (p). На основаніи той же теоремы заключаемъ:

Теорема LXVIII. Оси точекъ прямой, параллельной оси винта (p), параллельны между собой.

Такъ какъ ось M_A точки A лежитъ во всѣхъ плоскостяхъ (A), то, слѣдовательно, винтъ произвольнаго параметра,

ось котораго совпадаетъ съ M_A, а центромъ служитъ A, будетъ особымъ по отношенію къ кинематическому винту (p).

Пусть теперь (a)—какая-нибудь плоскость. На основаніи предыдущихъ изслѣдованій мы можемъ судить о распредѣленіи въ (a) особыхъ винтовъ даннаго параметра p_σ.

Такъ, центры параллельныхъ винтовъ лежатъ на прямой. Центры винтовъ пересѣкающихся въ одной и той же точкѣ A лежатъ на окружности, проходящей чрезъ A. Каждая точка A есть вообще центръ лишь одного винта. Только въ томъ случаѣ, когда ось точки A лежитъ въ (a), точка A есть центръ плоскаго пучка винтовъ равнаго параметра p_σ. Точку A въ этомъ случаѣ назовемъ *полюсомъ* плоскости (a) по отношенію къ параметру p_σ.

Легко доказать, что каждому параметру p_σ соотвѣтствуетъ въ (a) лишь одинъ полюсъ A. Для доказательства обратимся къ уравненію 8):

$$\alpha) \quad (\xi-x)(px-y)+(\eta-y)(py+x)+(\zeta-z)(pz+p\sigma)=0.$$

Выше было указано, что, если x, y, z—координаты центра A силоваго винта (p_σ), то это уравненіе представляетъ плоскость, въ которой лежатъ всѣ особые винты одного и того же параметра p_σ. Слѣдовательно, A—полюсъ плоскости α). Рѣшимъ обратный вопросъ. Дано уравненіе

$$\alpha') \quad A\xi+B\eta+C\zeta=D$$

плоскости α); требуется найти ея полюсъ A (x, y, z).

Для этого необходимо выразить, что уравненія α) и α') представляютъ одну и туже плоскость. Написавъ α) въ видѣ:

$$\xi(px-y)+\eta(py+x)+\zeta(pz+p\sigma)=p(x^2+y^2+z^2)+zp\sigma,$$

находимъ слѣдующія условія, при которыхъ точка (x, y, z)

будетъ полюсомъ плоскости α'):

$$\frac{px-y}{A}=\frac{py+x}{B}=\frac{pz+p\sigma}{C}=\frac{p(x^2+y^2+z^2)+zp\sigma}{D}$$

Но первыя три отношенія даютъ:

$$\frac{px-y}{A}=\frac{p(x^2+y^2+z^2)+zp\sigma}{Ax+By+Cz};$$

слѣдовательно,

$$Ax+By+Cz=D,$$

что само собой очевидно и могло быть написано сразу. Для опредѣленія точки x, y, z у насъ имѣются, слѣдовательно, уравненія:

$$\frac{px-y}{A}=\frac{py+x}{B}=\frac{pz+p\sigma}{C}; \quad Ax+By+Cz=D.$$

Замѣчая, что эти уравненія первой степени, мы заключаемъ, что дѣйствительно, существуетъ лишь одинъ полюсъ A плоскости α) по отношенію къ данному параметру p_σ.

Между координатами (x, y, z) полюса имѣются два соотношенія

$$\frac{px-y}{A}=\frac{py+x}{B}, \quad Ax+By+Cz=D,$$

не зависящія отъ параметра p_σ. Эти уравненія представляютъ прямую линію. Отсюда мы заключаемъ: полюсы плоскости α) по отношенію къ различнымъ параметрамъ лежатъ на прямой.

Этимъ мы заключимъ изслѣдованіе свойствъ силовыхъ винтовъ, по отношенію къ данному кинематическому винту. Это изслѣдованіе не можетъ претендовать на полноту и законченность, такъ какъ въ этомъ выпускѣ нашего труда мы имѣли

въ виду лишь коснуться соотношенiй, существующихъ между винтами силовыми и кинематическими. Только въ четвертомъ выпускѣ, посвященномъ кинематикѣ и динамикѣ подобно-измѣняемой системы, мы будемъ имѣть возможность обрисовать эти соотношенiя съ достаточно полнотой. Замѣчу лишь въ заключенiе, что свойства силовыхъ винтовъ, не производящихъ работы, значительно измѣняются при переходѣ отъ твердаго тѣла къ подобно-измѣняемой системѣ*).

1891 года 25-е Февраля.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ.

Poinsot. Éleménts de Statique. 8-me éd. Paris, 1842.

» Théorie nouvelle de la rotation des corps. Jour. de Liouville, 1851. T. XVI.

Ball. The Theory of screws. Dublin, 1876.

Chasles. Note sur les propriétes générales du système de deux corps semblables eutr'eux etc. Bulletin des sciences math. p. Férussac, Nov. 1830.

Gravelius. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Berlin 1889. Въ этомъ сочиненiи обработана геометрическая сторона теорiи Баля. Авторъ, какъ и мы, занимается вопросомъ о геометрическомъ представленiи возможнаго коэффицiента двухъ винтовъ и даетъ два рѣшенiя этого вопроса. (Кар. XX, S. 404 и 506). Эти рѣшенiя гораздо сложнѣе предложеннаго нами (Вып. III, гл. V, стр. 50), поэтому Gravelius не могъ извлечъ изъ нихъ никакихъ приложенiй къ теорiи винтовъ, тогда какъ намъ изъ нашего рѣшенiя удалось вывести всю теорiю винтовъ.

Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte 1879—1880.

*) Ср. Ball. l. cit. Ch. II, § 13 и 14, Ch. III, § 22 и 23, Ch. IX, § 80.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

ГОМОЙОГРАФЪ.

Здѣсь помѣщу описаніе сложнаго циркуля, въ которомъ три точки движутся такъ, что треугольникъ, вершинами котораго служатъ эти точки, остается подобнымъ самому себѣ. Этотъ приборъ можно назвать гомойографомъ*).

Существенную часть гомойографа составляютъ два ромба $ABCD$ и $AEFG$ (ч. 13), имѣющіе точку A общей вершиной. Вершины B и D перваго ромба соединены съ вершинами E и G втораго равными стержнями BE и DG. Кромѣ того, на DG построенъ треугольникъ DGH, въ которомъ

$$AD=DH,\ AG=GH.$$

Докажемъ, что углы треугольника CFH не измѣняются.

Прежде всего замѣтимъ, что треугольники ABE и AGD равны, откуда

$$\alpha)\ \angle BAE=\angle DAG.$$

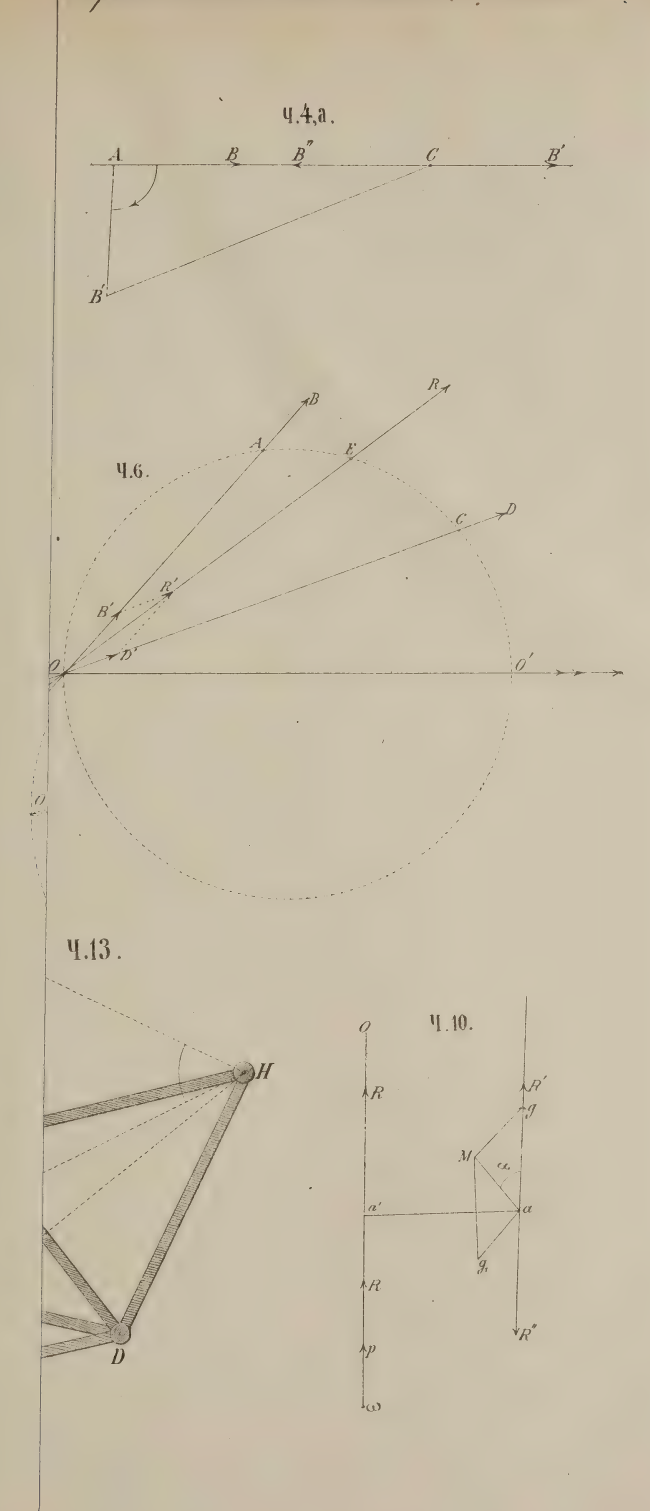
Но въ ромбѣ $EAGF$ діагональ AF есть равнодѣлящая угла EAG. Слѣдовательно, въ силу α) AF будетъ равнодѣ-

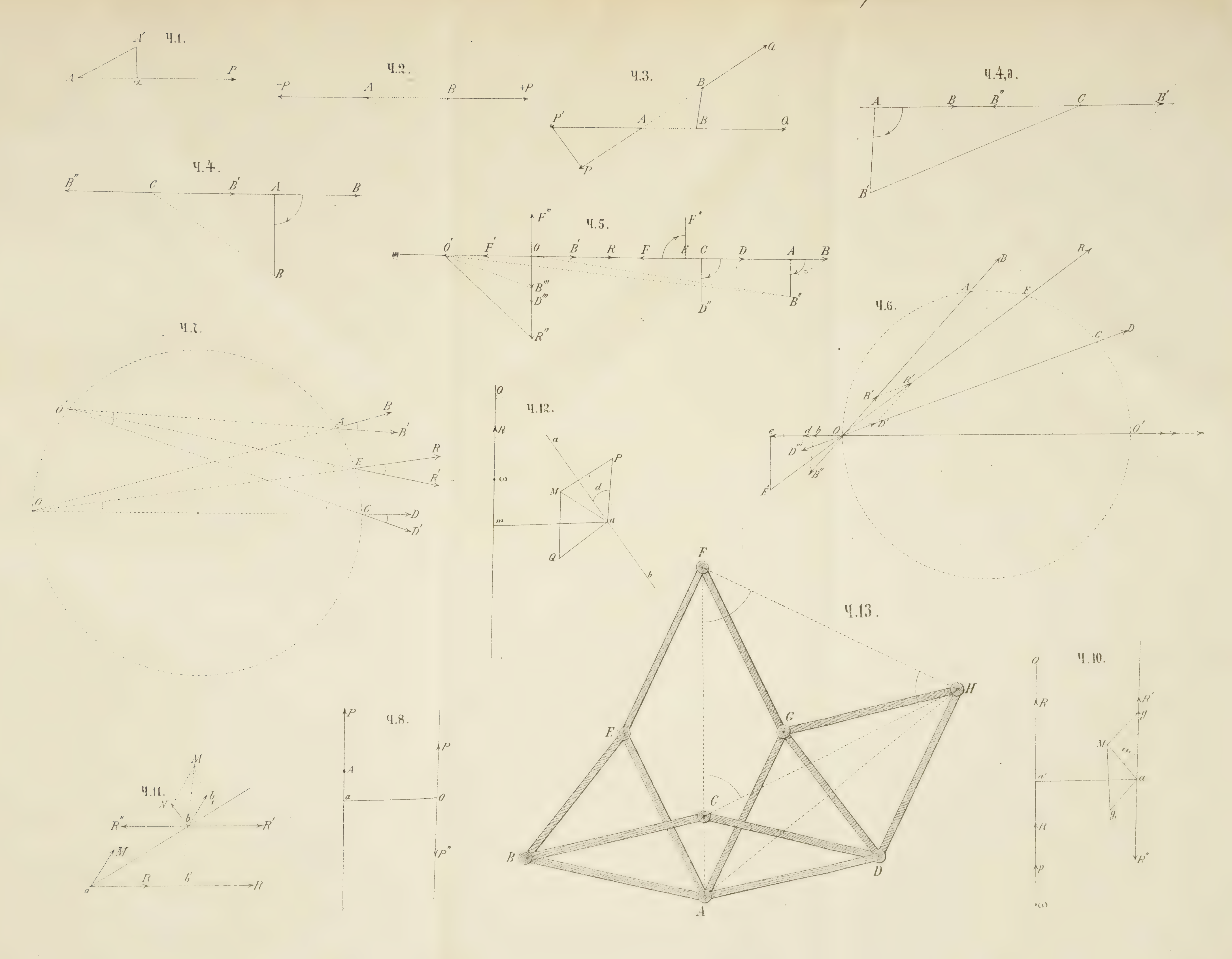
---

*) *Примѣчаніе.* Гомойографъ былъ мною построенъ въ 1887 году и тогда же его теорія была изложена на одномъ изъ засѣданій Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. *Авт.*

лящей угла BAD. Но равнодѣлящей послѣдняго служитъ діагональ AC втораго ромба. Слѣдовательно, прямыя AC и AF совпадаютъ. Точка C во все время движенія остается на окружности, центръ которой въ D, такъ какъ стержни AD, CD и HD равны. Замѣчая, что хорда AH этой окружности не измѣняетя, заключаемъ, что и уголъ ACH также не измѣняется. Но точки A,C и F лежатъ на прямой, слѣдовательно, не мѣняется и уголъ FCH. Точно также не измѣняется уголъ CFH, такъ какъ точка F остается на окружности, центръ которой въ G, радіусами служатъ равные стержни AG, FG и GH, а неизмѣняемой хордой линія AH. Но, если въ треугольнинѣ CFH остаются постоянными два угла, то и третій не измѣняется. Итакъ, дѣйствительно, въ описанномъ приборѣ измѣняемый треугольникъ CFH остается подобнымъ самому себѣ.

Одесса, Сентябрь 1887 годъ.


Ч.4,a.
A
B
B''
C
B'
B'
Ч.6.
B
R
A
E
C
D
R'
B'
D'
O
O'
O
Ч.13.
H
D
Ч.10.
O
R
R'
g
M
α
a'
a
g,
R
R''
p
ω


Ч.1.
Ч.2.
Ч.3.
Ч.4.
Ч.4,а.
Ч.5.
Ч.6.
Ч.7.
Ч.8.
Ч.10.
Ч.11.
Ч.12.
Ч.13.

О сжимаемости ртути и стекла.

ОПЫТНОЕ ИЗСЛѢДОВАНІЕ

Г. Г. Де-Метца.

Recherches expérimentales de la compressibilité du mercure et du verre,

par G. De-Metz.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Задача, которую мы преслѣдуемъ въ настоящей работѣ, состоитъ въ опредѣленіи числовой величины коэффиціента абсолютной сжимаемости ртути. Съ этою цѣлью мы одновременно изслѣдовали ее по двумъ принятымъ въ наукѣ методамъ—Regnault и Jamin'a—и еще по третьей, которую легко установить, исходя изъ уравненій Lamé, данныхъ въ его «Leçons sur l'élasticité des corps solides» и въ седьмомъ мемуарѣ Regnault: «De la compressibilité des liquides, et en particulier de celle du mercure». Сопоставленіе полученныхъ такимъ образомъ трехъ рядовъ чиселъ приводитъ насъ къ убѣжденію, что метода Jamin'a не вполнѣ согласна съ требованіями теоріи упругости, и что она, въ другомъ только видѣ, заключаетъ въ себѣ недостатки старой методы Canton'a. Теорія упругости указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ путь, по которому можно перейти отъ коэффиціента сжимаемости, получаемаго по методѣ Jamin'a, къ истинному коэффиціенту сжимаемости, и тѣмъ самымъ рѣшаетъ вопросъ ясно и опредѣленно. Такимъ образомъ, наше изслѣдованіе заключаетъ въ себѣ данныя, на основаніи которыхъ мы

можемъ подтвердить справедливость теоретическихъ формулъ Lamé и объединить экспериментальныя методы Canton'a, Regnault и Jamin'a. Такъ какъ, однако, формулы Lamé въ ихъ общемъ видѣ требуютъ знанія двухъ коэффиціентовъ упругости піезометра, то мы посвятили этому вопросу отдѣльное изслѣдованіе, причемъ подвергли піезометрическія трубы гнутію и крученію. Оказалось, что разница между вычисленіями, произведенными по полнымъ формуламъ и по упрощеннымъ, заключается всего въ предѣлахъ ошибокъ опыта, вслѣдствіе чего мы считаемъ возможнымъ пользоваться послѣдними, лишь бы піезометры были приготовлены изъ стекла.

Это изслѣдованіе было задумано и отчасти уже выполнено до появленія работы M. Amagat, затрогивающей тотъ же вопросъ; хотя методы наши значительно разнятся между собою, тѣмъ не менѣе мы приходимъ къ тождественнымъ результатамъ, и оба высказываемся въ пользу теоріи упругости.

Настоящая статья заключаетъ въ себѣ три главы. Въ первой — въ историческомъ порядкѣ вкратцѣ изложены изслѣдованія по сжимаемости жидкостей, причемъ главное вниманіе обращено на развитіе методъ; во второй — заключены результаты опредѣленія кубической сжимаемости стекла и приведены числовыя значенія, характеризующія постоянную Poisson'a различныхъ твердыхъ тѣлъ. Въ третьей — помѣщены результаты собственныхъ нашихъ изслѣдованій сжимаемости ртути и стекла.

Это изслѣдованіе было произведено въ физической лабораторіи Императорскаго Новороссійскаго университета, и мы считаемъ своимъ пріятнѣйшимъ долгомъ выразить здѣсь нашу глубокую признательность завѣдывающему сю профессору Θеодору Никифоровичу Шведову, который не только любезно предоставилъ въ наше распоряженіе необходимые инструменты и матеріалы, но съ живѣйшимъ участіемъ относился къ успѣхамъ этой работы и не отказывалъ намъ въ своемъ совѣтѣ.

Одесса, 25 февраля 1891 года.

ГЛАВА I.

Историческій очеркъ.

1. Первыя изслѣдованія по сжимаемости жидкостей относятся къ началу XVII столѣтія, когда Bacon [1]), въ 1620 г., заключивъ воду въ полый свинцовый шаръ, запаялъ отверстіе и сплюснулъ его сначала ударомъ молота, а затѣмъ подъ прессомъ до просачиванія воды черезъ его стѣнки. Bacon вынесъ изъ этого опыта убѣжденіе, что вода сжимаема, хотя и въ очень слабой степени; свое заключеніе онъ основывалъ на томъ, что объемъ деформированнаго шара меньше начальнаго, стало быть, начальный объемъ жидкости уменьшился на величину сжимаемости воды.

Въ 1667 году, члены извѣстной академіи del Cimento [2]) занялись этимъ вопросомъ и сдѣлали цѣлый рядъ опытовъ, которые привели ихъ къ отрицательному результату.

Сначала они выдули большой шаръ изъ стеклянной трубки и наполнили его водою; къ свободному концу капиллярной трубки они припаяли другой резервуаръ, также наполненный водою, а соединительную капиллярную трубку изогнули. Погрузивъ шаръ въ тающій ледъ и подогрѣвъ резервуаръ, они раз-

---

[1]) Bacon. Novum organum. Lib. II, cap. XLV; см. Violle. Cours de physique. Tome I, Seconde partie. Paris, 1884, p. 513.

[2]) Saggi di naturali sperienze fatte nell'Accademia del Cimento; cap. V, Firenze, 1667.

считывали замѣтить пониженіе уровня въ капиллярѣ, такъ какъ пары воды подогрѣваемаго сосуда должны были производить значительное давленіе; однако, ихъ ожиданіе не оправдалось.

Такую неудачу легко объяснить самою постановкою опыта: приборъ академиковъ былъ въ сущности дистилляторомъ, и пары воды резервуара при охлажденіи у стѣнокъ холоднаго капилляра производили увеличеніе начальнаго объема жидкости. Если бы между шаромъ и резервуаромъ былъ слой масла или ртути, то они нашли бы искомое явленіе [1]).

2. Послѣ первой неудачи они произвели второй опытъ сжимаемости воды въ Маріоттовой трубкѣ при давленіи ртутнаго столба въ 9.6 атмосферъ, но искомаго явленія опять-таки не замѣтили.

3. Наконецъ, они изготовили серебряный шаръ, наполнили его водою и отверстіе наглухо завинтили гайкою. Когда они подвергли его сильному давленію, то вода стала просачиваться наружу, и стѣнки его покрылись росою. Этотъ рядъ попытокъ привелъ академиковъ del Cimento къ заключенію, что вода несжимаема, къ заключенію невѣрному и обратному тому, къ которому гораздо раньше пришелъ Bacon.

4. Мнѣніе о несжимаемости жидкостей господствовало цѣлое столѣтіе, пока, въ 1761 году, John Canton [2]) не взялся вновь за этотъ вопросъ. Ему удалось не только показать, что вода и нѣкоторыя другія жидкости сжимаемы, но ему хотѣлось даже исключить вліяніе деформаціи самого сосуда. Онъ поступалъ слѣдующимъ образомъ: приготовивъ сосудъ на подобіе большаго термометра, онъ точно опредѣлилъ отношеніе объема одного дѣленія капилляра къ объему всего шара; наполнилъ

---

[1]) Возможно, что въ приборѣ было недостаточное давленіе, такъ какъ въ сообщающихся сосудахъ съ различными температурами упругая сила пара равна давленію, соотвѣтствующему низшей температурѣ.

[2]) Canton. Phil. Trans., 1761 и 1762.

его изучаемою жидкостью, прокипятилъ послѣднюю, чтобы освободить ее отъ воздуха, и запаялъ капилляръ совершенно такъ, какъ поступаютъ при приготовленіи термометра. Подобный сосудъ онъ помѣстилъ подъ колоколъ воздушнаго насоса, въ верхней части котораго было высверлено отверстіе для того, чтобы запаянный конецъ капилляра можно было выдвинуть за предѣлъ безвоздушнаго пространства въ окружающій воздухъ. Давъ установиться температурѣ и замѣтивъ уровень жидкости въ капиллярѣ, онъ отламывалъ оконечность послѣдняго, вслѣдствіе чего уровень падалъ на θ дѣленій. Онъ считалъ, что наблюдаемое пониженіе есть сумма двухъ эффектовъ: сжимаемости жидкости и упругаго расширенія сосуда; чтобы исключить послѣднее, онъ впускалъ воздухъ подъ колоколъ насоса, вслѣдствіе чего уровень жидкости въ сосудѣ поднимался на θ' дѣленій. Canton полагалъ, что истинная сжимаемость жидкости

$$\chi_a = \frac{\theta - \theta'}{PW_0}, \qquad (1)$$

гдѣ W_0 есть внутренній объемъ сосуда, а P—давленіе въ атмосферахъ.

Этою методою онъ нашелъ, что коэффиціентъ сжимаемости воды

$$\chi_a = 0.000046,$$

число довольно близкое къ установившемуся теперь въ наукѣ, хотя оно выражаетъ такъ называемую кажущуюся сжимаемость χ_a, а не абсолютную χ_r.

5. Опыты Canton'а прошли бы безслѣдно, если-бы въ 1819 г. за нихъ не взялся Jacob Perkins [1]), а въ 1823 г. извѣстный Oerstedt, изъ Копенгагена.

Perkins впервые даетъ названіе «піезометра» прибору, служащему для изученія сжимаемости жидкости, и его работы

[1]) Perkins. Phil. Trans., 1820.

интересны, какъ по значительности давленій, которымъ онъ подвергалъ жидкости, такъ и по разнообразію способовъ, которые онъ примѣнилъ къ рѣшенію вопроса; можно только пожалѣть, что они не отличались необходимою точностью. Онъ употреблялъ металлическіе піезометры, съ одного конца наглухо задѣланные, а съ другаго запертые цилиндрическимъ поршнемъ, ходившемъ на мягкомъ треніи въ кожанномъ кольцѣ (boîte à cuir); наполнивъ піезометръ водою и заперши его поршнемъ, онъ отмѣчалъ глубину погруженія поршня особымъ внѣшнимъ кожаннымъ кружкомъ, который на мягкомъ-же треніи скользилъ по внѣшней части поршня; въ началѣ опыта этотъ кружокъ плотно прилегалъ къ верхнему донышку сосуда. Затѣмъ онъ погружалъ піезометръ въ пушечный каналъ, также наполненный водою, закрывалъ всѣ отверстія, кромѣ того, черезъ которое передавалъ помпою давленіе внутрь канала, и производилъ сжатіе. Во время сжатія кружокъ перемѣщался по поршню на разстояніе, соотвѣтствовавшее величинѣ погруженія поршня. Зная всѣ размѣры сосуда и поршня, можно было опредѣлить сжимаемость воды, но, конечно, о большой точности результата здѣсь не могло быть и рѣчи.

Perkins придумалъ между прочимъ еще одинъ способъ доказательства и опредѣленія сжимаемости жидкостей, замѣнивъ измѣреніе объемовъ измѣреніемъ вѣсовъ. Онъ устроилъ цилиндрическій сосудъ, съ одной стороны закрытый наглухо, а съ другой—клапаномъ, открывавшимся внутрь его. Наполнивъ сосудъ водою, онъ взвѣшивалъ его и помѣщалъ въ пушечный каналъ. Подъ вліяніемъ большаго внѣшняго давленія и вслѣдствіе сжимаемости жидкости, клапанъ открывался внутрь, и часть жидкости переходила изъ пушечнаго канала въ сосудъ. Когда онъ его взвѣшивалъ вновь, то находилъ приращеніе вѣса. Изъ своихъ измѣреній Perkins нашелъ для воды

$$\chi_a = 0.000048$$ [1]).

[1]) Oerstedt, Ann. de chim. et de phys., 1823, t. 22, p. 196.

6. Болѣе точныя работы по интересующему насъ вопросу начались Oerstedt'омъ [1]), въ 1823 году. Подобно своимъ предшественникамъ, онъ также изучалъ сжимаемость воды, но только при малыхъ давленіяхъ отъ 0.33 до 6 атмосферъ и при одной и той же температурѣ. Приборъ его общеизвѣстенъ [2]); онъ употреблялъ первоначально латунный піезометръ съ весьма толстыми стѣнками, съ цѣлью избѣгнуть расширенія стѣнокъ (1823), а затѣмъ (1828)—стекляный, свинцовый и оловянный; онъ прикрѣплялъ піезометръ къ латунной пластинкѣ, на которой помѣщалъ термометръ и воздушный манометръ. Приготовленный такимъ образомъ піезометръ погружался въ крѣпкій стекляной цилиндръ, запаянный съ одного конца, а съ другаго оканчивавшійся металлическою оправою и водяною помпою. Цилиндръ былъ наполненъ водою, и чтобы она не смѣшивалась съ испытуемою водою піезометра, Oerstedt въ видѣ индекса впускалъ каплю ртути въ его капилляръ. Отсюда видно, что Oerstedt, подобно Perkins'у, производилъ одновременно внутреннее и внѣшнее сжатіе и опредѣлялъ, слѣдовательно, кажущуюся сжимаемость жидкости

$$\chi_a = \frac{\theta''}{PW_0}, \tag{2}$$

гдѣ θ'' есть кажущееся уменьшеніе первоначальнаго объема піезометра W_0 при двухстороннемъ давленіи P. Согласно воззрѣнію Lamé, между величинами θ и θ', наблюденными Canton'омъ, и величиною θ'', наблюденною Perkins'омъ и Oerstedt'омъ, существуетъ связь,

$$\theta' + \theta'' = \theta, \tag{3}$$

---

[1]) Oerstedt. Ann. de chim. et de phys., t. 21, 1822, p. 99; t. 22, 1823, p. 192; t. 38, 1828, p. 326.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de physique. Tome I, fasc. II, 1882, p. 121.

которая позволяетъ намъ вникнуть въ смыслъ ихъ измѣреній, а именно, что этими, на первый взглядъ, разными пріемами всѣ они измѣряли лишь кажущуюся сжимаемость χ_a и вовсе не исправляли своихъ результатовъ на кубическую сжимаемость k стѣнокъ піезометра. Изъ своихъ измѣреній Oerstedt нашелъ, что сжимаемость воды [1])

$$\chi_a = 0.000045$$

и показалъ, что она постоянна въ предѣлахъ давленій отъ 0.33 до 6 атмосферъ.

Oerstedt полагалъ, что кажущаяся сжимаемость χ_a близка къ дѣйствительной χ_v, если производить опыты съ тонко-стѣннымъ сосудомъ и подвергать его одновременно внутреннему и внѣшнему сжатію. Чтобы подтвердить эту мысль, онъ измѣрялъ сжимаемость воды въ стекляномъ и свинцовомъ піезометрахъ; найдя изъ этихъ опытовъ одно и то же число для коэффиціента сжимаемости воды, онъ считалъ свою мысль доказанной, а выводы теоріи упругости опровергнутыми [2]). Согласно дальнѣйшему развитію этого вопроса можно предположить, что измѣренія Oerstedt'a не были настолько точны, чтобы обнаружить разницу между кубическою сжимаемостью k стекла и свинца, разницу весьма малую по своей абсолютной величинѣ, такъ какъ

$$\text{стекло} \quad k = 0.0000020,$$

$$\text{свинецъ} \quad k = 0.0000059.$$

7. Despretz[3]), въ 1823 году, внесъ нѣкоторыя улучшенія въ экспериментальную сторону этого вопроса, замѣнивъ въ воз-

---

[1]) Oerstedt. Ann. de chim. et de phys., 1823, t. 22, p. 196.

[2]) Violle. Loc. cit., p. 519.

[3]) Despretz. C. R. XXI, 1845. Note sur des expériences exécutées en 1823.

душном манометрѣ воду—ртутью и ртутный индексъ надъ водою въ капиллярѣ піезометра—воздухомъ. Кромѣ того, онъ погружалъ піезометръ въ ванну постоянной температуры, но зато, подобно своимъ предшественникамъ, игнорировалъ поправку на деформацію стѣнокъ. Онъ доказывалъ, что сжимаемость не пропорціональна давленію, но это утвержденіе впослѣдствіи не оправдалось въ предѣлахъ его же давленій.

8. Въ 1837 году, Colladon et Sturm[1]), изъ Женевы, предприняли новую большую работу, посвященную сжимаемости жидкостей, причемъ интересно то обстоятельство, что они значительно приблизились къ истинному опредѣленію деформаціи піезометра. Съ этою цѣлью они опредѣлили коэффиціентъ линейнаго растяженія стеклянаго стержня и нашли, что $\alpha=0.0000011$. Отсюда они выводили величину кубической сжимаемости піезометра k, положивъ

$$k=3\alpha=0.0000033, \qquad (4)$$

что, однако, не вѣрно, такъ какъ, согласно теоріи упругости,

$$k=3\alpha(1-2\sigma), \qquad (5)$$

гдѣ σ есть отношеніе поперечнаго сокращенія β къ линейному растяженію α. Положивъ, согласно Poisson'y, $\frac{\beta}{\alpha}=\sigma=0.25$ для всякаго изотропнаго тѣла, находимъ

$$k=\frac{3\alpha}{2}=0.00000165. \qquad (6)$$

Что касается ихъ методы, то она цѣликомъ была заимствована у Oersted'a, съ тою лишь разницею, что ихъ манометръ былъ

---

[1]) Colladon et Sturm. Ann. de chim. et de phys., t. 36, 1827, pp. 113—159 и pp. 225—257.

воздушно-ртутный, и піезометръ погружался въ ванну постоянной температуры. Эта работа по своимъ достоинствамъ выдѣляется изъ ряда только что поименованныхъ, за что и была удостоена преміи Парижской Академіи Наукъ въ 1837 году.

Они нашли, что кажущаяся сжимаемость воды

$$\chi_a = 0.000048 \text{ при } 0^0,$$

а истинная

$$\chi_a = 0.0000513 \text{ при } 0^0.$$

Это число слишкомъ велико, такъ какъ k было ими вычислено невѣрно; если-же взять

$$k = 0.00000165,$$

то

$$\chi_v = 0.0000496 \text{ при } 0^0.$$

Меня особенно интересуетъ работа Colladon et Sturm'a, потомучто они первые опредѣляли сжимаемость ртути и нашли:

$$\chi_a = 0.00000173 \text{ при } 0^0,$$

откуда

$$\chi_v = 0.00000503 \text{ при } 0^0 \text{ и } k = 3\alpha,$$

а въ дѣйствительности

$$\chi_v = 0.00000338 \text{ при } 0^0 \text{ и } k = \frac{3\alpha}{2}.$$

Относительно числа $\chi_a = 0.00000173$ слѣдуетъ замѣтить, что оно вычислено Colladon et Sturm'омъ только изъ большихъ давленій. Я передѣлалъ вычисленія ихъ опытовъ по таблицамъ pp. 137—138 ихъ мемуара и нашелъ болѣе точное число

$$\chi_a = 0.00000187 \text{ при } 0^0,$$

и тогда

$$\chi_v = 0.00000517 \text{ при } 0^0 \text{ и } k = 3\alpha,$$

или

$$\chi_v = 0.00000352 \text{ при } 0^0 \text{ и } k = \frac{3\alpha}{2}.$$

Послѣднее число тождественно съ числомъ Regnault

$$\chi_v = 0.00000352,$$

равно какъ и коэффиціентъ сжимаемости воды

$$\chi_v = 0.0000496$$

очень близокъ къ тому же коэффиціенту Grassi

$$\chi_v = 0.0000502.$$

Приведенныхъ сравненій вполнѣ достаточно, чтобы указать на степень точности наблюденій Colladon et Sturm'a. Остается пожалѣть, что многочисленный матеріалъ ихъ наблюденій, обнимающій: ртуть при 0°, воду безъ воздуха при 0°, воду съ воздухомъ при 0°, алкоголь, сѣрный эѳиръ, насыщенный растворъ амміака, эѳиры: азотной, уксусной, хлористоводородной кислотъ; уксусную кислоту, сѣрную концент. кислоту, азотную кислоту, терпентинъ,—забытъ въ настоящее время; они оперировали съ давленіями до 40 атмосферъ и нашли, что сжимаемость воды пропорціональна давленію.

9. Въ 1843 году, Aimé[1]) предпринялъ рядъ опытовъ, основанныхъ на особомъ пріемѣ вычисленія сжимаемости жидкаго тѣла, хотя піезометръ по прежнему подвергался одновременно внутреннему и внѣшнему давленіямъ, которыя получались при погруженіи его въ море на значительную глубину. Своему піезометру Aimé далъ названіе appareil à déversement; онъ состоялъ изъ стеклянной камеры *a*, къ которой съ одной стороны была припаяна изогнутая капиллярная трубка *bc*, какъ показано на фиг. 1-й. Передъ наполненіемъ камеры *a* изучаемою жидкостью конецъ ея *d* былъ открытъ, и черезъ него происходило наполненіе жидкостью, послѣ чего конецъ *d* запаивался.

---

[1]) Aimé. Ann. de chim. et de phys., 1843, (3) t. 8, p. 257.

Другой открытый конецъ c служилъ для наполненія капилляра bc ртутью и для передачи давленія внутрь камеры. Когда жидкость сжималась, то въ камеру a изливалась часть ртути изъ трубки bc, и объемъ влившейся ртути представлялъ въ точности сжатіе заключенной въ камерѣ a жидкости. Вычисленіе коэффиціента сжимаемости Aimé сводилъ на расширеніе жидкости, причемъ поступалъ слѣдующимъ образомъ. Онъ опредѣлялъ прежде всего температуру камеры a, при которой ртуть капилляра bc касалась оконечности его b, положимъ 15° С., наносилъ на трубкѣ bc произвольную черточку h и погружалъ камеру a въ теплую ванну такой температуры, положимъ 30°С., чтобы жидкость, заключенная въ камерѣ, расширившись, оттолкнула уровень ртути отъ b до h. Опустивъ этотъ приборъ въ море, онъ замѣчалъ, что подъ вліяніемъ давленія часть ртути вливалась въ камеру a, потому что послѣ извлеченія его изъ воды уровень при 15° С. уже не приходился въ точкѣ b, а стоялъ нѣсколько ниже, у точки g. Чтобы свести задачу сжимаемости жидкости на задачу расширенія, онъ опредѣлялъ вновь ту температуру, при которой уровень ртути переходилъ отъ точки g до штриха h; эта температура, очевидно, должна была быть теперь меньше 30° С., положимъ 22° С. Отсюда легко вычислить, какому числу градусовъ С соотвѣтствовало данное сжатіе; именно сжатіе $bg=bh-gh$; но bh эквивалентно расширенію (30^0-15^0), а $gh-(22^0-15^0)$, слѣдовательно, искомое сжатіе выразится расширеніемъ числа градусовъ

$$(30^0-15^0)-(22^0-15^0)=bg. \qquad (7)$$

При этомъ мы предполагали, что температура моря была 15° С., а если бы она была 12°. 6, какъ въ опытахъ Aimé, то приведенное число градусовъ нужно было бы уменьшить на (15°—12°. 6), такъ что вообще

$$bg=(30-15^0)-(22-15^0)-(15^0-12.6),$$

или проще

$$bg=(30^0-15^0)-(22^0-12^0.6)=5^0.6\ C. \qquad (7')$$

За единицу объема онъ принималъ объемъ камеры при 12°. 6 С., а давленіе въ его опытахъ мѣнялось отъ 86 атм. до 220 атм. Онъ воспользовался изслѣдованіемъ Colladon et Sturm'a, чтобы поправить свои наблюденія на кубическую сжимаемость стекла, причемъ впервые вычислилъ k по формулѣ теоріи упругости; онъ положилъ $k=0.00000165$; противъ этого числа, однако, можно возразить, такъ какъ неизвѣстно—обладало-ли стекло Colladon et Sturm'a тѣми-же упругими свойствами. Онъ изучилъ сжимаемость: воды, алкоголя 32%, 40%; кислотъ: щавелевой, уксусной, сѣрной, хлористо-водородной, раствора амміака, морской воды, сѣрно-кислаго натрія, нефти, терпентина, ртути. Сообщу коэффиціенты сжимаемости, найденные имъ для воды и ртути:

вода $\chi_v=0.0000502$ при 12°. 6 С.,

ртуть $\chi_v=0.0000040$ при 12°. 6 С.;

послѣднее число получено изъ 3-хъ опытовъ, въ которыхъ давленіе мѣнялось въ предѣлахъ 97, 160, 112 атм.

10. Въ 1847 году, по тому же вопросу опубликовалъ работу Regnault, отнесшійся къ дѣлу со свойственными ему обстоятельностью и точностью. Онъ изучилъ всего двѣ жидкости: воду и ртуть, но самые опыты были предприняты съ цѣлью провѣрить формулы теоріи упругости, основанной на нѣкоторыхъ гипотезахъ относительно взаимодѣйствія молекулъ однороднаго и изотропнаго твердаго тѣла. Главнымъ образомъ, его интересовалъ вопросъ непосредственнаго опредѣленія кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра k, а не косвеннаго, какъ напримѣръ изъ вытяженія сплошнаго стержня, хотя бы изготовленнаго одновременно и изъ той же самой массы, изъ которой и труба піезометра.

Regnault не считалъ даже строгимъ опредѣленіе коэффиціента k, сдѣланное изъ предварительныхъ опытовъ съ трубою, которая служила затѣмъ для приготовленія піезометра, такъ какъ, по его мнѣнію, необходимо допустить совершенную однородность стекляной массы, чтобы дальнѣйшая обработка трубы не нарушила первоначальнаго ея упругаго состоянія. Онъ приводитъ далѣе рядъ чиселъ, характеризующихъ Юнговъ модуль стекла, и оказывается, что значенія его колеблются между

$$E=10000\frac{kgr}{mm^2} \quad \text{и} \quad E=5477\frac{kgr}{mm^2},$$

соотвѣтственно чему колебанія коэффиціента растяженія α происходятъ (на 1 атм.) въ предѣлахъ

$$\alpha=10.3\times10^{-7} \quad \text{и} \quad \alpha=18.8\times10^{-7},$$

а коэффиціентовъ $k=\frac{3\alpha}{2}$ въ предѣлахъ

$$k=15.4\times10^{-7} \quad \text{и} \quad k=28.2\times10^{-7}.$$

Эти числа ясно указываютъ на то, что различныя стекла обладаютъ различными упругими свойствами, и что, слѣдовательно, матеріалъ каждаго піезометра долженъ изучаться индивидуально.

Съ этою цѣлью Regnault предложилъ свою методу, согласно которой наблюдатель опредѣляетъ кажущуюся сжимаемость жидкости χ_a по видимому пониженію уровня жидкости въ капиллярѣ піезометра $0''$, подвергаемому внутреннему и внѣшнему одновременному сжатію; а затѣмъ къ этой величинѣ χ_a

---

[1]) Regnault. Relation des expériences.... Mémoires de l'Institut de France. Tome XXI, 1817, p. 429—464.

придаетъ кубическую сжимаемость стѣнокъ піезометра k, такъ что истинная сжимаемость

$$\chi_v = \chi_a + k. \tag{8}$$

Величину k Regnault опредѣлялъ помощью слѣдущаго простаго опыта: онъ подвергалъ піезометръ одному внѣшнему давленію, подобно Canton'у, отчего уровень жидкости въ капиллярѣ піезометра поднимался на θ' дѣленій. По величинѣ θ' легко опредѣлить кубическую сжимаемость k, на основаніи формулъ, которыя Lamé [1]), по просьбѣ Regnault, вывелъ для полаго цилиндра съ плоскими основаніями, для шара и для цилиндра съ полусферическими основаніями. Эти формулы будутъ мною выведены въ другомъ мѣстѣ настоящаго изслѣдованія, пока замѣчу только, что онѣ требуютъ тождества

$$\theta = \theta' + \theta'', \tag{3}$$

въ которомъ θ есть видимое пониженіе жидкости въ капиллярѣ піезометра при одномъ внутреннемъ давленіи, а θ и θ'' суть уже извѣстныя намъ перемѣщенія жидкости. Это тождество въ опытахъ Regnault всегда было провѣряемо, и оно вполнѣ подтвердилось. Однако, относительно формулъ Lamé слѣдуетъ замѣтить, что онѣ выведены въ предположеніи справедливости закона Poisson'а, предположеніи, которое впослѣдствіи не оправдалось.

Regnault имѣлъ слѣдующіе піезометры при изученіи воды: шаръ красной мѣди, латунный шаръ и стекляный цилиндръ съ полусферическими основаніями; при изученіи ртути только стекляный. Давленіе онъ мѣнялъ отъ 2 до 10 атмосферъ и производилъ опыты, вѣроятно, при комнатной температурѣ, такъ какъ никакихъ указаній на этотъ счетъ въ его мемуарѣ нѣтъ. Онъ нашелъ слѣдующія числа для истинной сжимаемости воды.

---

[1]) Regnault. Mémoires de l'Institut de France. Tome XXI, 1847, p. 438—442.

Піезометръ красной мѣди $\chi_v = 0.00004771$

Піезометръ латунный $\chi_v = 0.00004829$

Піезометръ стекляный $\chi_v = 0.00004668$.

Хотя эти числа довольно близки между собою, однако, Regnault не считаетъ этого согласія достаточнымъ для оправданія теоріи. Мнѣ кажется, что ему можно сдѣлать серьезное возраженіе — не объясняется-ли прежде всего эта разница разностью температуръ, при которыхъ имѣли мѣсто его опыты, такъ какъ изъ позднѣйшихъ измѣреній Grassi и другихъ лицъ стало извѣстнымъ, что въ предѣлахъ отъ 10°.8 С. до 17° С., т. е. въ предѣлахъ колебаній комнатной температуры, сжимаемость воды измѣняется отъ $\chi_v = 0.000048$ до $\chi_v = 0.000046$. Хотя съ другой стороны, дѣйствительно, часть ошибокъ можно отнести на счетъ формулъ Lamé, основанныхъ на невѣрномъ законѣ Poisson'a; именно, новѣйшія изслѣдованія [1]) даютъ Poisson'овской постоянной значеніе

$\sigma = 0.330$ для латуни

$\sigma = 0.335$ для мѣди

$\sigma = 0.235$ для стекла.

Поправивъ формулы на новое значеніе σ, можно нѣсколько (на 0.0000005) приблизить коэффиціенты истинной сжимаемости воды въ мѣдномъ и латунномъ шарахъ къ коэффиціенту истинной сжимаемости въ стекляномъ піезометрѣ.

Ртуть была изслѣдована Regnault только въ одномъ стекляномъ піезометрѣ, въ томъ же самомъ, который служилъ для воды, и получилось число

$$\chi_v = 0.00000352,$$

[1]) См. таблицу постоянныхъ Poisson'a, гл. II.

которое Grassi относитъ, вѣроятно со словъ Regnault, къ 0°. Это число совершенно тождественно съ числомъ Colladon et Sturm'a, поправленнымъ мною.

11. Въ 1851 году, Grassi[1]) опубликовалъ большую работу по сжимаемости различныхъ жидкостей. Въ его работѣ, въ смыслѣ методы, новаго нѣтъ ничего, такъ какъ онъ продолжалъ, по порученію Regnault, работу Regnault. Только вмѣсто формулъ Lamé, основанныхъ на законѣ Poisson'a, онъ употребилъ формулы Wertheim'a[2]), отличающіяся отъ предъидущихъ тѣмъ, что Wertheim на основаніи своихъ весьма разнообразныхъ опытовъ считаетъ $\sigma = 0.33$. Grassi употреблялъ только стеклянные піезометры, числомъ 5; давленія его не превышали 10 атмосферъ.

Наиболѣе обстоятельно Grassi изслѣдовалъ сжимаемость воды въ зависимости отъ давленія и температуры, причемъ нашелъ, что сжимаемость ея возрастаетъ съ паденіемъ температуры, именно въ одномъ и томъ же піезометрѣ A

$$\chi_v = 0.0000502 \text{ при } 0^\circ,$$

$$\chi_v = 0.0000455 \text{ при } 25.9^\circ \text{ C.},$$

$$\chi_v = 0.0000440 \text{ при } 53.3^\circ \text{ C.}$$

Кромѣ воды, Grassi изслѣдовалъ: обыкновенный эѳиръ, абсолютный алкоголь, древесный спиртъ, хлороформъ, растворы хлористаго кальція, хлористаго натрія, іодистаго калія, азотнокислаго натрія, углекислаго натрія, искусственную морскую воду, растворы сѣрной кислоты. Изъ нихъ сжимаемость алкоголя, эѳира и хлороформа возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры.

---

[1]) Grassi. Ann. de chim. et de phys., (3) 31, 1851, p. 437—478.

[2]) Wertheim. Ann. de chim. et de phys., (3) t. 23, 1848, p. 52.

Я долженъ здѣсь возстановить одно недоразумѣніе, состоящее въ томъ, что иногда приписываютъ Grassi опредѣленіе коэффиціента сжимаемости ртути

$$\chi_v = 0.00000295 \text{ при } 0^{\circ},$$

однако, самъ Grassi никогда подобныхъ опредѣленій не дѣлалъ, а перечислилъ тольто опыты Regnault по формуламъ Wertheim'a.

12. Въ 1868 году, вопросъ вступилъ въ новую фазу, такъ какъ Jamin предложилъ, на первый взглядъ, совершенно иную опытную методу для изслѣдованія сжимаемости жидкихъ тѣлъ. Онъ стремился свести всѣ измѣренія къ одному только опыту, чтобы вовсе не имѣть соприкосновенія съ теоріей, которая, во-первыхъ, какъ мы видѣли, требуетъ знанія для каждаго піезометра постоянной Poisson'a, а во вторыхъ—извѣстныхъ представленій о молекулярномъ строеніи твердаго тѣла. Съ этою цѣлью, онъ предложилъ сжимать жидкость только одностороннимъ внутреннимъ давленіемъ, отчего въ капиллярѣ піезометра уровень жидкости падалъ на θ. Послѣднее перемѣщеніе можно разсматривать какъ совокупность двухъ эффектовъ: абсолютной сжимаемости жидкости χ_v и упругаго расширенія піезометра Θ_0, т. е.

$$\theta = \chi_v + \Theta_0; \tag{9}$$

слѣдовательно, для опредѣленія χ_v необходимо имѣть опытную величину Θ_0. Для этого Jamin заключилъ піезометръ въ закрытый сосудъ, наполненный ртутью и оканчивавшійся вверху капиллярною трубкою, названною имъ — поправочною — «tube correcteur». При расширеніи стѣнокъ піезометра уровень ртути въ поправочной трубкѣ перемѣщается въ сторону кажущагося возрастанія внѣшняго объема; назовемъ это перемѣщеніе γ. Тогда, согласно Jamin'y, слѣдуетъ написать:

[1]) Jamin. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 66, 1868, p. 1104.

$$\theta = \chi_v + \gamma, \tag{10}$$

откуда

$$\chi_v = \theta - \gamma. \tag{11}$$

Изъ только что сказаннаго ясно, что χ_v опредѣляется исключительно изъ опыта, но вопросъ только въ томъ, справедливо-ли равенство

$$\Theta_0 = \gamma? \tag{12}$$

Какъ мы увидимъ впослѣдствіи [1]), Jamin въ этомъ предположеніи ошибся, ибо Θ_0 не равняется γ, что легко доказать, исходя изъ уравненій теоріи упругости и подтвердить опытомъ справедливость послѣдняго заключенія. Небезъинтересно будетъ замѣтить, что кажущаяся простота методы Jamin'a подкупала въ ея пользу, и если-бы опыты съ сжимаемостью ртути не привели къ числу

$$\chi_v = 0.00000187 \text{ при } 15^0 \text{ C.},$$

отличающемуся на половину отъ чиселъ Colladon et Sturm'a, Aimé и Regnault, то она, вѣроятно, удержалась-бы прочно на своемъ мѣстѣ.

13. Найдя методу, Jamin поручилъ Amaury et Descamps [2]) произвести помощью ея изслѣдованіе. Опытное выполненіе соотвѣтствовало теоретической простотѣ, и авторы не только не опредѣлили постоянныхъ упругости своихъ піезометровъ, но даже не упомянули о качествѣ стекла — обыкновенное-ли оно, или-же хрустальное; кромѣ окончательныхъ чиселъ, они не сообщили никакихъ необходимыхъ подробностей, которыя позволяли-бы судить о достоинствахъ и недостаткахъ методы. Я полагаю, что въ этомъ обстоятельствѣ можно искать объясненія того факта, что эта метода осталась въ теченіи послѣднихъ

---

[1]) См. главу III, §§ 13 и 14.

[2]) Amaury et Descamps. Comptes rendus. T. 68, 1869, p. 1564.

двадцати лѣтъ безъ приложенія и дальнѣйшей разработки. Descamps[1]) приводитъ слѣдующій рядъ тѣлъ, изслѣдованныхъ имъ самимъ и Amaury:

вода $\chi_v = 0.0000490$ при 0^0 C.

вода $\chi_v = 0.0000440$ при 25^0 C.

ртуть $\chi_v = 0.00000187$ при 15^0 C.,

кромѣ того еще 15 жидкостей: растворъ амміака, хлористо-водородная кислота, растворъ хлористаго аммонія, растворы хлористаго калія ($5^0/_0$, $10^0/_0$, $15^0/_0$, $20^0/_0$, $25^0/_0$, $30^0/_0$), уксусная кристаллизующаяся кислота, алкоголь метиловый, алкоголь безводный, алкоголь 90^0, алкоголь амиловый, чистый сѣрнистый углеродъ, эссенціи терпентина, лимонныя эссенціи, кристаллизующійся бензинъ, хлороформъ, сѣрный эѳиръ[2]).

14. Въ недавнее время появились въ печати замѣчанія противъ этой методы. Schumann[3]) справедливо указывалъ на ея необработанность въ экспериментальномъ отношеніи, такъ какъ Amaury et Descamps не привели достаточныхъ данныхъ для сужденія о ея точности, а Ch. Ed. Guillaume[4]) доказывалъ, что коэффиціентъ

$$\chi_v = \theta - \gamma \tag{11}$$

слишкомъ малъ, и именно на величину кубической сжимаемости стѣнокъ деформированнаго сосуда k, т. е.

$$\chi_v = \theta - \gamma + k. \tag{13}$$

---

[1]) Descamps. Étude de la compressibilité des liquides. Thèses de doctorat. Paris, 1872, p. 1—35.

[2]) Ibidem, p. 24.

[3]) Schumann. Wied. Ann., Bd. 31, p. 15, 1887.

[4]) Ch. Ed. Guillaume. Archives des sciences physiques. (3) T. 17, 1887, p. 155 и p. 177.

Принявъ для k величину

$$k = 0.00000211,$$

Guillaume [1]) исправилъ коэффиціенты сжимаемости ртути и воды:

$$\text{ртуть} \quad \chi_v = 0.0000039 \text{ при } 15^0 \text{ C.},$$

$$\text{вода} \left\{ \begin{array}{l} \chi_v = 0.0000504 \text{ при } 0^0, \\ \chi_v = 0.0000454 \text{ при } 25^0. \end{array} \right.$$

15. Въ позапрошломъ году, я [2]) произвелъ по этой методѣ изслѣдованіе сжимаемости нѣкоторыхъ маселъ и коллоидовъ и опубликовалъ полученные мною результаты. Такъ какъ въ то время я былъ занятъ не столько теоретической постановкою вопроса, сколько полученіемъ ряда чиселъ для выясненія связи между упругостью названныхъ жидкостей и оптическимъ эффектомъ проф. A. Kundt'a [3]), то и я не изслѣдовалъ упругихъ свойствъ своихъ піезометровъ, а удовлетворился тѣмъ, что получилъ для воды

$$\left. \begin{array}{l} \chi_v = 0.00004766 \text{ піезометръ } A \\ \chi_v = 0.00004720 \text{ піезометръ } B \end{array} \right\} \text{ при } t = 12^0.58 \text{ C.}$$

Для той-же температуры Grassi [4]) далъ

$$\chi_v = 0.00004779,$$

---

[1]) Ibidem, p. 189.

[2]) Г. Де-Метцъ. Опытное изслѣдованіе механическихъ свойствъ маселъ и коллоидовъ. Записки Мат. отд. Новорос. Общ. Еств., т. 9, стр. 139, 1889. Тоже короче: Труды VIII съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей. Спб. 1890, отдѣлъ II, стр. 42 и Wied. Ann., Bd. 41, 1890, p. 663.

[3]) Kundt. Wied. Ann., Bd. 13, 1881, p. 110.

[4]) Grassi, loc. cit., p. 477.

Röntgen und Schneider[1])

$$\chi_v = 0.00004735.$$

Кромѣ воды, я изучилъ сжимаемость маселъ: рициннаго, льнянаго, рыбьяго жира, миндальнаго, оливковаго, оливковаго съ примѣсью 5.5% и 6.9% жидкаго параффина, оливковаго съ бензоломъ (пополамъ); коллоидовъ: студенистой желатины, гумми аравійскаго въ водѣ, нестуденистой желатины, канадскаго бальзама въ бензолѣ, коллодіума duplex; жидкаго параффина, кристаллизующагося бензола, глицерина, раствора метафосфорной кислоты въ водѣ, раствора сахара въ водѣ и жидкаго стекла (Natronwasserglas). Давленіе не превосходило 9.5 атмосферъ, а температуры колебались около 12°—15° С.

Я старался рядомъ чиселъ оправдать методу Jamin'a; имѣя значительный рядъ чиселъ, характеризующій показанія поправочной трубы, я составилъ изъ нихъ слѣдующую таблицу[2]):

Колебанія показаній γ_1 и γ_2 поправочной трубки.

	$\gamma_1 m.m.^3$	*M. F.*	*W. F.*	$\gamma_2 m.m.^3$	*M. F.*	*W. F.*
Піезометръ *A*	7.613	0.124	0.084	7.668	0.137	0.089
» *B*	7.059	0.119	0.080	7.076	0.125	0.084

Здѣсь γ_1 и γ_2 представляютъ показанія при возрастаніи давленія отъ 0 до 9.5 атм. (γ_1) и при паденіи давленія отъ 9.5 до 0 атм. (γ_2). Числа этой таблицы, равно какъ и все изслѣдованіе, произведенное этою методою, привело меня къ за-

---

[1]) Röntgen und Schneider. Wied. Ann., Bd. 33, p. 660, 1888.

[2]) G. de-Metz. Wied. Ann. Bd. 41, p. 663, 1890.

ключенію, что для сильно сжимающихся жидкостей, она даетъ числа постоянныя и весьма близкія къ принимаемымъ за истинныя. Это согласіе должно, впрочемъ, вытекать изъ замѣчанія Guillaume'а, который предлагаетъ увеличивать коэффиціенты сжимаемости жидкости, полученные по методѣ Jamin'а, на величину кубической сжимаемости стекла k. Если остановиться на значеніи $k=0.0000021$, то по отношенію къ водѣ ошибка выразится 4%, по отношенію къ алкоголю 2%, а по отношенію къ сѣрнистому эѳиру всего 1.3%. Принимая во вниманіе простоту методы, этимъ результатомъ во многихъ случаяхъ можно удовлетвориться.

16. Въ 1872 году, появилась работа Cailletet [1]), особенность которой заключается въ употребленіи необыкновенно большихъ давленій, до 705 атмосферъ, измѣрявшихся манометромъ Deshoffe'а.

Опытъ производился въ слѣдующей формѣ: въ стальной сосудъ, налитый ртутью, въ которомъ при насосѣ Cailletet [2]) обыкновенно помѣщаютъ трубки съ сжимаемымъ газомъ, онъ вставлялъ стекляный піезометръ такъ, чтобы, при сжатіи наполнявшей его жидкости, ртуть могла подниматься внутрь піезометра по вызолоченной трубкѣ. Измѣреніе кажущагося уменьшенія объема Cailletet производилъ особымъ пріемомъ, основанномъ на разложеніи ртутью золота, которымъ покрыты стѣнки піезометра. Поправки на кубическую сжимаемость піезометра, подвергавшагося одновременно внутреннему и внѣшнему давленіямъ, Cailletet не дѣлалъ; онъ изслѣдовалъ воду, эѳиръ, алкоголь и сѣрнистый углеродъ и нашелъ для воды, напримѣръ:

$$\chi_a = 0.00000451 \text{ при } 750 \text{ атм. и } 8^0\,\mathrm{C.},$$

такъ что если принять

$$k = 0.00000225,$$

[1]) Cailletet. Comptes rendus, t. 75, p. 77, 1872.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de physique. Tome I, fas. I, p. 129, 1882.

то

$$\chi_v = 0.0000473 \text{ при } 705 \text{ атм. } 8^0 \text{ C.},$$

а по Grassi,

$$\chi_v = 0.0000487 \text{ при } 10 \text{ атм. и } 8^0 \text{ C.}$$

Сравненіе этихъ чиселъ показываетъ, что вода сжимается пропорціонально давленію. Съ другими упомянутыми жидкостями получился подобный же результатъ, что приводитъ къ вѣроятному заключенію, что сжимаемость испытанныхъ жидкостей постоянна на значительномъ протяженіи скалы давленій.

17. Въ теченіи 1871—1873 гг. Dupré и Page[1]) обнародовали двѣ статьи, въ которыхъ между прочимъ они изслѣдовали сжимаемость воды, спирта и ихъ смѣсей. Ихъ метода была метода Regnault-Grassi, а къ величинѣ кажущейся сжимаемости жидкости χ_a они придавали коэффиціентъ кубической сжимаемости стекла

$$k = 0.0000020.$$

Такимъ образомъ, они получили слѣдующія числа для воды

$$\chi_v = 0.00004774 \text{ при } t = 9^0 \text{ C.}^2),$$

$$\chi_v = 0.00004741 \text{ при } t = 16.8^0 \text{ C.}^3).$$

Они впервые показали на смѣсяхъ воды и метиловаго алкоголя, что сжимаемость смѣси нельзя вычислять изъ сжимаемости составныхъ частей; оказалось, что для упомянутыхъ растворовъ разность между вычисленною сжимаемостью и на-

---

[1]) Dupré und Page. Pogg. Ann., Erg. Bd. V, p. 221, 1871; Dupré. Pogg. Ann., Bd. 148, p. 236, 1873.

[2]) и [3]) Loc. cit., p. 240. Эти статьи появились въ 1869 г. въ Philos. Transactions и въ 1872 г. въ Proc. Royal Society.

блюденною возрастаетъ съ возрастанiемъ процентнаго содержанiя алкоголя и достигаетъ maximum'a при 50% состава смѣси.

18. Въ 1877 году, Amagat [1]) помѣстилъ работу по вопросу объ измѣненiи сжимаемости въ зависимости отъ температуры въ предѣлахъ отъ 11° С. до 100° С. Онъ искалъ, что дѣлается съ сжимаемостью такой жидкости, какъ напримѣръ эѳиръ хлористоводородной кислоты, который искусственно удерживался значительнымъ давленiемъ при температурѣ 100° С. въ жидкомъ состоянiи. Эта работа интересна не только по экспериментальному матерiалу, но главнымъ образомъ по оправданiю нѣкоторыхъ формулъ механической теорiи тепла. Въ ней выясняется также зависимость сжимаемости отъ давленiя, которое мѣнялось отъ 4 до 37 атмосферъ.

Онъ изучилъ эѳиры: хлористоводородной кислоты, бромистоводородной кислоты, обыкновенный, метиловый эѳиръ уксусной кислоты, этиловый эѳиръ уксусной кислоты, алкоголи: обыкновенный, метиловый и амиловый; углеродистые водороды: водородистый амиленъ, водородистый гексиленъ, водородистый гептиленъ и бензинъ; ацетонъ; хлороформъ, сѣрнистый углеродъ.

Его метода состояла въ томъ, что онъ подвергалъ пiезометръ только одному внутреннему давленiю, вслѣдствiе чего получалъ слишкомъ большiе коэффицiенты кажущейся сжимаемости

$$\chi = \frac{\theta}{P_0 W_0}. \qquad (14)$$

Чтобы перейти къ истинной сжимаемости и найти поправку на упругое расширенiе пiезометра Θ_0, Amagat дѣлалъ сравнительные опыты съ водою. Получивъ свой коэффицiентъ χ и вычтя изъ него истинный χ_e, взятый изъ наблюденiй Grassi, онъ находилъ поправку

[1]) Amagat. Annales de chim. et de phys. (5) 11, p. 520, 1877.

$$\Theta_0 = \chi - \chi_v, \quad (15)$$

которою затѣмъ и пользовался во всѣхъ опытахъ, считая ее постоянной въ предѣлахъ отъ комнатной температуры до 100° С.

Онъ погружалъ піезометръ въ ванну, температуру которой, отъ 11° С. до 100° С., регулировалъ соотвѣтственнымъ притокомъ газа къ горящему рожку, а манометръ онъ употреблялъ воздушный. Точность измѣреній удостовѣрялась по сравненію коэффиціентовъ сжимаемости воды, полученныхъ двумя піезометрами *A* и *B* въ началѣ и въ концѣ изслѣдованія.

Amagat обращаетъ вниманіе на фактъ, что нѣкоторыя жидкости приходятъ подъ вліяніемъ давленія въ стаціонарное состояніе только черезъ 15 минутъ; таковъ, напримѣръ, эѳиръ хлористоводородной кислоты. Кромѣ того, онъ замѣтилъ, что вліяніе воздуха, раствореннаго въ жидкостяхъ, не играетъ той роли, которую ему часто приписываютъ; онъ нашелъ, что алкоголь, эѳиръ и ацетонъ даютъ одни и тѣ же коэффиціенты сжимаемости — прогнать-ли изъ нихъ воздухъ кипяченіемъ или нѣтъ.

19. Въ 1883 году, Quincke [1]) искалъ соотношеніе между сжимаемостью жидкостей и измѣненіемъ показателя преломленія сжимаемыхъ жидкостей. Такъ какъ онъ оперировалъ надъ еще неизслѣдованными жидкостями и при малыхъ давленіяхъ, всего около 0.5 атмосферы, то онъ сдѣлалъ самостоятельное опредѣленіе коэффиціентовъ сжимаемости слѣдующихъ тѣлъ: глицерина, маселъ — сурѣпнаго, миндальнаго и оливковаго, воды, сѣрнистаго углерода, терпентина, бензола изъ бензойной кислоты, бензола, петролеума, алкоголя и эѳира. Его метода была общепринятая: шарообразный піезометръ помѣщался подъ колоколъ воздушнаго насоса, откуда выкачивался воздухъ до 0.5 атмосферы, вслѣдствіе чего жидкость поднималась въ

---

[1]) G. Quincke, Wied. Ann., Bd. 19, p. 401, 1883.

капиллярѣ; затѣмъ впускался воздухъ, піезометръ испытывалъ приращеніе давленія внутри и извнѣ, и жидкость сжималась на 0''. Quincke не опредѣлилъ коэффиціента кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра, а вычислилъ его по сравненію своихъ коэффиціентовъ кажущейся сжимаемости воды съ абсолютными числами Grassi. Благодаря этому и ничтожности давленія, его результаты не представляютъ особаго интереса. Коэффиціентъ сжимаемости k, вычисленный такимъ способомъ, достигаетъ у него значеній:

$$\text{стекло} \begin{cases} k=0.00000246 & \text{піезометръ тюрингенскій,} \\ k=0.00000467 & \text{піезометръ хрустальный,} \\ k=0.00000337 & \text{піезометръ тюрингенскій.} \end{cases}$$

Послѣднія два числа слишкомъ велики, согласно опредѣленіямъ Regnault, Grassi, новѣйшимъ Amagat и моимъ [1]).

Quincke констатируетъ интересный фактъ увеличенія сжимаемости глицерина съ уменьшеніемъ температуры; такимъ образомъ, не одна вода слѣдуетъ этому закону.

20. Въ 1883 году, появилась статья Drecker'a [2]) по вопросу о внутренней работѣ расширенія смѣсей сравнительно съ внутренней работой ихъ составныхъ частей, для разрѣшенія котораго ему пришлось между прочимъ изслѣдовать сжимаемость воды, алкоголя, сѣрнистаго углерода, хлороформа и ихъ смѣсей. Особенность его методы состоитъ въ томъ, что его піезометръ имѣлъ двѣ капиллярныя трубки съ одного конца для облегченія манипуляцій чистки, наполненія и т. д.; онъ подвергалъ піезометръ внутреннему и внѣшнему давленію до семи атмосферъ и, чтобы перейти отъ наблюденій кажущейся сжи-

---

[1]) См. таблицу кубической сжимаемости стекла, глава II, § 16.

[2]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 20, p. 870, 1883.

маемости къ истинной, прибавлялъ на основаніи опытовъ Regnault

$$k = 0.00000185.$$

Наполненіе піезометра жидкостью происходило при обыкновенной температурѣ, а не при кипѣніи, изъ боязни измѣнить процентное отношеніе составныхъ частей смѣси; это отступленіе Drecker считаетъ оправдываемымъ только что описанными опытами Amagat съ эѳиромъ, ацетономъ и алкоголемъ. Для воды онъ нашелъ

$$\chi_v = 0.0000478 \text{ при } 12^0.8 \text{ C.},$$

число весьма близкое къ числамъ Grassi. При этомъ онъ впервые наблюдаетъ полное измѣненіе объема сжимаемой жидкости D_t и мгновенное D_m, между которыми, на основаніи формулы W. Thomson'a

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q = \frac{A\,T v_0\,\alpha_t}{c_p}, \tag{16}$$

онъ устанавливаетъ соотношеніе

$$\chi_a = D_t = D_m + \frac{\alpha\tau}{1+25\alpha}. \tag{17}$$

Въ этихъ выраженіяхъ dt есть приращеніе тепла, которое испытываетъ тѣло въ адіабатическомъ процессѣ, если его сжать на dp; $T = 273 + t$ есть абсолютная температура, α_0 — коэффиціентъ расширенія, v_0 — начальный объемъ, c_p удѣльная теплота при постоянномъ давленіи, $A = \frac{1}{424}$ тепловой эквивалентъ единицы работы; τ измѣненіе температуры тѣла, сжатаго на одну атмосферу; кажущаяся сжимаемость $\chi_a = D_t$. Рядъ опытовъ, произведенныхъ при $t = 25^0$ C., вполнѣ оправдалъ формулу (17).

Интересно поэтому отмѣтить величину τ и связанныя съ нею измѣненія объема $\frac{\alpha\tau}{1+25\alpha}$, вычисленныя для нѣкоторыхъ жидкостей изъ этихъ опытовъ.

	τ^0 C.	$\frac{\alpha\tau}{1+25\alpha}$
Алкоголь.......	0.01620	0.0000175
Сѣрнист. углер.	0.02812	0.0000333
Хлороформъ....	0.02696	0.0000344
Вода.........	0.00185	0.0000469

Эта таблица показываетъ, что различныя жидкости нагрѣваются при сжатіи неодинаково, и что вода нагрѣвается значительно слабѣе остальныхъ приведенныхъ здѣсь жидкостей. Число Drecker'а меньше числа Regnault, равнаго $0^0.02$ C. на 10 атм., которое было получено путемъ прямыхъ измѣреній. При изслѣдованіи смѣсей Drecker подтвердилъ наблюденія Dupré и Page'а касательно разногласія между вычисленною сжимаемостью смѣси по сжимаемости составныхъ ея частей и непосредственно наблюденною; разности бываютъ то положительныя, то отрицательныя. Наконецъ, онъ помѣстилъ рядъ чиселъ, характеризующихъ отношенія $\frac{c_v}{c_p}$ удѣльной теплоты при постоянномъ объемѣ къ удѣльной теплотѣ при постоянномъ давленіи; вотъ нѣсколько чиселъ:

	$\frac{c_v}{c_p}$
Вода.........	1.010
Алкоголь.......	1.183
Хлороформъ....	1.472
Сѣрнист. углер.	1.525

21. Въ 1884 году, Pagliani e Vicentini (Il Nuovo Cimento (3) t. 16, 1884, pp. 27 и 161) прослѣдили сжимаемость воды отъ 0° до 100° C., употребивъ стеклянные пiэзометры, и подобно Amagat, только внутреннее давленiе, которое мѣнялось отъ 1 атм. до 4.5 атм. Переходъ отъ наблюдаемой сжимаемости къ истинной они дѣлали на основанiи сравненiя своихъ измѣренiй съ истинными коэффицiентами χ_v Grassi. Называя черезъ Θ_0 полное упругое расширенiе внутренняго объема W_0 пiэзометра, они нашли

$$\frac{\theta}{P_0 W_0} - \chi_v = \Theta_0, \tag{18}$$

причемъ для пiэзометра A и B, при 0°, оказалось:

$$\Theta_0 = 0.0000361 \ (A),$$

$$\Theta_0 = 0.0000308 \ (B).$$

Чтобы при помощи этихъ значенiй перевести всѣ свои наблюденiя въ абсолютные коэффицiенты сжимаемости χ_v, они допустили, что коэффицiентъ Θ_0 не зависитъ отъ температуры, согласно чему, выразили свои наблюденiя въ слѣдующей таблицѣ (3).

Таблица I коэффицiентовъ сжимаемости воды.

1.	2.	3.	4.	5.
T	$\frac{\theta}{P_0 W_0}$	χ_v	Θ_0	χ_v
0° C.	$0.0_4 811$	$0.0_4 503$ (C)	$0.0_4 308$	$0.0_4 503$
0—3.5	806	498	309	497
8—10	785	477	312	472
15.59	766	458	316	450
31.06	748	440	323	425
40.31	736	428	328	408
49.31	736	428	333	403
57.04	729	421	337	392
61.15	728	420	339	389
66.25	730	422	341	389
77.36	745	437	347	398
99.20	767	459	358	409

Этими наблюденіями они констатировали minimum сжимаемости воды около 63° С. и, вопреки Grassi, отсутствіе maximum'а около 4° С.; такъ что сжимаемость воды правильно убываетъ отъ 0° до 63°С., начиная откуда возрастаетъ и при 100°С. достигаетъ той величины, которую она имѣетъ приблизительно при 15.5° С. Результаты своихъ наблюденій они изобразили графически, причемъ ходъ ихъ кривыхъ очень правиленъ для каждаго піезометра въ отдѣльности, но кривыя расположены далеко другъ отъ друга, что и доказываетъ мысль о невозможности сравнивать даже коэффиценты χ_a, не зная коэффиціента k, отъ котораго, какъ видно изъ уравненій Lamé, зависитъ коэффиціентъ Θ_0.

Желая поэтому придать прочность своимъ измѣреніямъ, они нашли по методѣ Jamin'a, помощью поправочной трубки, измѣненія γ внѣшняго объема піезометра W_1 при 0° С. и при 100°С. и опредѣлили коэффиценты

$$\Theta_1 = \frac{\gamma}{W_1} \frac{760}{P_0} \tag{19}$$

для обоихъ піезометровъ, которые оказались:

$$\Theta_1 = 289 \times 10^{-7} \text{ при } 0^\circ \text{ С.,}$$

$$\Theta_1 = 336 \times 10^{-7} \text{ при } 99^\circ.4 \text{ С.}$$

Замѣнивъ найденное отношеніе коэффиціентовъ

$$\frac{\Theta_{1\,(0)}}{\Theta_{1\,(100)}}$$

отношеніемъ

$$\frac{\Theta_{0\,(0)}}{\Theta_{0\,(100)}},$$

въ которомъ $\Theta_{0\,(0)}$ вычислено, какъ уже указано въ ур. (18),

они получили для піезометра B

$$\theta_{0(0)} = 0.0000308 \text{ при } 0^{\circ}C.$$

$$\theta_{0(100)} = 0.0000358 \text{ при } 100^{\circ}C.$$

Изъ этихъ чиселъ они составили 4-ю и 5-ю колонны предъидущей таблицы и числа послѣдней колонны перевели въ кривую C.

Какъ легко усмотрѣть, колонна 3-я значительно разнится отъ колонны 5-й, и хотя характеръ соотвѣтственныхъ кривыхъ почти тотъ же самый, тѣмъ не менѣе однако—абсолютный ихъ ходъ различенъ, а это обстоятельство и указываетъ на необходимость точнаго знанія коэффиціентовъ θ_0.

22. Pagliani e Palazzo [1]) пробовали изслѣдовать ту зависимость сжимаемости отъ температуры на смѣси воды и алкоголя и нашли: что съ примѣсью спирта къ водѣ до 19% коэффиціентъ сжимаемости смѣси убываетъ съ возрастаніемъ температуры; что при высшихъ концентраціяхъ сжимаемость смѣси возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры; что каждой смѣси соотвѣтствуетъ температура, при которой коэффиціентъ сжимаемости достигаетъ своего minimum'а, послѣ котораго онъ вновь растетъ. Температура наименьшей сжимаемости смѣси всегда ниже, чѣмъ чистой воды, и притомъ настолько ниже, насколько выше процентное содержаніе алкоголя.

23. Съ 1886 года появился рядъ работъ, предметъ изученія которыхъ составляетъ сжимаемость не простыхъ жидкостей, но растворовъ солей. Въ числѣ первыхъ работъ по времени находится изслѣдованіе Röntgen'а и Schneider'а [2]), которые задались широкою цѣлью изучить одновременно различныя

---

[1]) Pagliani e Palazzo. Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Bd. 8, 1884, p. 795; также Pagliani. Beiblätter. Bd. 14, 1890. p. 94.

[2]) Röntgen und Schneider. Wied. Ann. Bd. 29, 1886, p. 165.

свойства растворовъ, причемъ они пользовались въ своихъ изслѣдованіяхъ по различнымъ вопросамъ растворами, приготовленными разъ навсегда и послѣ того тщательно сохраненными. Они желали изучить: поверхностное натяженіе, сжимаемость, внутреннее треніе, упругость паровъ и т. д., и остановили свое вниманіе на водныхъ растворахъ: іодистыхъ, бромистыхъ, хлористыхъ, азотнокислыхъ, сѣрнокислыхъ и углекислыхъ соединеніяхъ водорода, аммонія, литія, калія и натрія, а также ихъ гидратовъ. Изъ этого ряда были исключены іодистоводородная кислота и углекислый аммоній вслѣдствіе ихъ непрочности, а углекислый литій вслѣдствіе его слабой растворимости; всѣхъ такихъ растворовъ было приготовлено около 80. Концентрацію растворовъ они опредѣляли не процентнымъ содержаніемъ соли, а нѣсколько иначе; они сравнивали между собою такіе растворы, которые содержали въ опредѣленномъ числѣ молекулъ воды постоянное число молекулъ растворенной соли.

Ихъ метода была общепринятая Canton-Oersted'а, слѣдовательно, они опредѣляли не истинную, а кажущуюся сжимаемость. При этомъ они поступали слѣдующимъ образомъ: назвавъ черезъ χ_a'' и χ_a''' кажущуюся сжимаемость воды и раствора, они опредѣляли коэффиціентъ относительной кажущейся сжимаемости

$$\chi_{r,a}=\frac{\chi_a'''}{\chi_a''}\,, \tag{20}$$

отнеся всѣ свои измѣренія къ водѣ при 18° С. Они пользовались двумя стеклянными піезометрами № I и № II, къ которымъ капилляры были пришлифованы; самые капилляры были весьма тщательно прокамбрированы по методѣ Thiessen-Neumann'а. Оба піезометра одновременно находились въ приборѣ Oersted'а, причемъ піезометръ № I служилъ въ качествѣ манометра; кромѣ него, они имѣли ртутный манометръ до 8 атмосферъ. Наблюденія производились черезъ 15 минутъ, чтобы температура была строго стаціонарна; термоэлектрическое измѣреніе

тепла, развиваемаго сжатіемъ, не привело къ точному заключенію о величинѣ нагрѣванія.

Они также задались цѣлью выяснить, каково вліяніе смачиванія стѣнокъ капилляра изслѣдуемою жидкостью. Оказалось, что колонна различныхъ растворовъ въ 1 cm. длины укорачивалась при перемѣщеніи на 1 cm. на 0.012 cm.

Вообще Röntgen'у и Schneider'у слѣдуетъ отдать справедливость и признать ихъ изслѣдованіе тщательно выполненнымъ; они старались выяснить роль каждой ошибки въ отдѣльности, вслѣдствіе чего и считаютъ свои результаты точными до единицы третьей значущей десятичной цыфры.

Не ограничившись опредѣленіемъ относительной сжимаемости, Röntgen und Schneider занялись также и абсолютной. Въ виду этого, они сначала нашли коэффиціентъ кажущейся сжимаемости воды

$$\chi_a = 0.0000438 \text{ при } 17^0.84 \text{ C.},$$

а чтобы перейти отсюда къ истинной сжимаемости χ_v, они придали поправку на кубическую сжимаемость стекла, взявъ по Buchanan'у[1])

$$k = 0.00000292 \text{ при } 13^0 \text{ C.},$$

такъ что

$$\chi_v = 0.0000467 \text{ при } 18^0 \text{ C.}^2),$$

по Grassi

$$\chi_v = 0.0000460 \text{ при } 18^0 \text{ C.}$$

Послѣ этого относительную кажущуюся сжимаемость $\chi_{r,a}$ изученныхъ ими растворовъ, легко было выразить въ абсолютныхъ числахъ при помощи соотношенія

$$\chi_v''' = \chi_a''' + k = \chi_a'' \chi_{r,a} + k = 0.0000438\, \chi_{r,a} + 0.00000292. \quad (21)$$

---

[1]) Buchanan. Proc. Roy. Soc. Edinb., Vol. 10, 1878, p. 697—698.

[2]) Они достигли бы большаго согласія, если-бы положили для простаго стекла k=0.0000022; коэффиціентъ Buchanan'а, очевидно, принадлежитъ хрусталю.

24. Однако, Röntgen и Schneider[1]) не удовлетворились этимъ результатомъ и занялись спеціальнымъ изученіемъ сжимаемости воды. Приборы остались прежніе, только теперь былъ введенъ въ употребленіе ртутный манометръ въ 610 cm. длины, показанія котораго приводились къ 0° и къ 45° широты. Вода была изслѣдована при 0°, 9° и 17°.95 C., причемъ всѣ термометры, разновѣски и мѣры длины были сравнены съ эталонами Normalaichungscommission въ Берлинѣ.

Результаты ихъ измѣреній можно выразить въ слѣдующей таблицѣ:

χ_a	t
0.00004910	0° C.
0.00004602	9
0.00004413	17.95

Сравнивая эти числа съ числами Grassi и Pagliani e Vicentini, они приходятъ къ заключенію:

1) Никакого maximum'а сжимаемости около 4° C. нѣтъ, вопреки утвержденію Grassi.

2) Нанесши наблюденія Grassi на координатную сѣть, видно, что его наблюденія заключали случайныя ошибки, такъ какъ полученная кривая не имѣетъ правильнаго хода.

3) Ихъ кривая идетъ правильно, и ходъ ея согласенъ съ ходомъ кривой Pagliani e Vicentini, хотя убываніе коэффиціента χ_v съ возрастаніемъ температуръ у нихъ медленнѣе, чѣмъ у Pagliani-Vicentini[2]). Кромѣ этихъ трехъ кривыхъ, они

---

[1]) Röntgen und Schneider. Wied. Ann., Bd. 33, 1888, p. 644.

[2]) Такъ какъ $\chi_a = \chi_v - k$, а коэффиціентъ k различныхъ стеколъ различенъ, то ходъ кривыхъ при различныхъ сортахъ стекла піезометровъ и не можетъ быть одинаковъ.

вычертили еще одну по наблюденіямъ Dr Zehnder'a[1]), основаннымъ на уравненіи Gladstone-Landolt'a

$$\frac{n-1}{d} = const.,$$

въ которомъ n есть показатель преломленія среды, а d—ея плотность; ходъ этой послѣдней совершенно тождественъ съ ходомъ ихъ кривой.

Переходъ отъ коэффиціентовъ χ_a къ коэффиціентамъ χ_v они сдѣлали въ этотъ разъ на основаніи своихъ измѣреній кубической сжимаемости каменной соли; путемъ вычисленій они опредѣлили, что сжимаемость стѣнокъ ихъ піезометра

$$k = 0.0000021.$$

Такимъ образомъ ихъ наблюденія резюмируются слѣдующей таблицею:

χ_v	t
0.0000512	0° C.
0.0000481	9
0.0000462	17.95

Эти числа вполнѣ согласуются съ числами Grassi.

Они, между прочимъ, еще изслѣдовали сжимаемость воды, прокипяченной и содержащей воздухъ, и нашли, что въ сжимаемости такихъ образцовъ нѣтъ той значительной разницы, о которой упоминаютъ Colladon et Sturm[2]).

25. Въ непосредственной связи съ работами Röntgen'a и Schneider'a по идеѣ и по времени находятся изслѣдованія Braun'a, Max Schumann'a и Drecker'a, къ изложенію которыхъ мы теперь и перейдемъ.

---

[1]) Zehnder. Wied. Ann., Bd. 34, 1888, p. 115 etc.

[2]) По вопросу о сжимаемости жидкостей, содержащихъ газы, см. Isambert. Comptes rendus. T. 105, 1887, p. 375 и p. 1173.

Braun[1]) изслѣдовалъ вопросъ о растворимости твердыхъ тѣлъ и о сопровождающихъ ее измѣненіяхъ объема и энергіи, для рѣшенія котораго ему необходимо было произвести спеціальное изслѣдованіе сжимаемости нѣкоторыхъ солей и ихъ растворовъ[2]).

Заключивъ растворъ въ дилатометръ съ пришлифованнымъ капилляромъ, онъ кипятилъ его для освобожденія отъ воздуха, а затѣмъ помѣщалъ въ приборъ Oerstedt'а. Коэффиціентъ k Braun опредѣлилъ, какъ разность между коэффиціентами сжимаемости воды $\chi_v - \chi_a$, причемъ принималъ $\chi_v = 0.000051$ при 1^0 С., а χ_a наблюдалъ непосредственно. Опредѣленіе сжимаемости твердыхъ солей было произведено слѣдующимъ образомъ: онъ наполнялъ дилатометръ концентрированнымъ растворомъ данной соли при высокой температурѣ, около 33^0 С., вслѣдствіе чего при охлажденіи его до 0^0 на дно сосуда осаждалась кристаллическая соль; такимъ пріемомъ ему удавалось довести наполненіе твердою солью до половины дилатометра. Сжимаемость соли ему приходилось вычислять: по сжимаемости раствора, по удѣльнымъ вѣсамъ раствора и твердой соли, по вѣсамъ раствора и соли, и онъ получилъ слѣдующіе результаты при $t = 1^0$ С.

Названіе соли	Сжимаемость соли	Сжимаемость нас. раствора
Хлористый аммоній	0.0000049	0.000038
Квасцы..........	0.0000019	0.000046
Хлористый натрій..	0.0000014	0.000027
Глауберова соль ..	0.0000071	0.000042

[1]) Braun. Wied. Ann., Bd. 30, 1887, p. 250.
[2]) Braun. Loc. cit., p. 264.

Röntgen и Schneider[1]) подобнымъ-же пріемомъ опредѣляли кубическую сжимаемость твердой соли хлористаго натрія и нашли

$$\chi_v = 5.2 \times 10^{-6}.$$

Такъ какъ это число значительно разнится отъ числа 1.4×10^{-6} Braun'а, то для контроля они вычислили кубическую сжимаемость этой соли изъ наблюденныхъ Voigt'омъ модулей гнутія и крученія и нашли

$$k = 4.2 \times 10^{-6}.$$

Эти два числа говорятъ противъ измѣреній Braun'а, въ чемъ онъ и самъ соглашается[2]).

26. По способу Quincke и въ его лабораторіи Max Schumann[3]) продолжалъ изслѣдованіе сжимаемости жидкостей, остановивъ свое вниманіе на водныхъ растворахъ хлоридовъ натрія, калія, кальція, аммонія, барія и стронція. Метода, средства и даже часть піезометровъ были взяты изъ предъидущихъ изслѣдованій Quincke (см. § 19), вотъ почему въ этой работѣ мы не встрѣчаемъ ничего новаго въ смыслѣ методы. Піезометры были изготовлены Geissler'омъ изъ тюрингенскаго стекла, а коэффиціенты кубической сжимаемости найдены по разности

$$\chi_v - \chi_a = k, \tag{22}$$

въ которой χ_v взято изъ опытовъ Grassi по сжимаемости воды, а χ_a найдено авторомъ для всѣхъ піезометровъ при 0^0; такимъ образомъ, оказалось для піезометра

---

[1]) Röntgen & Schneider. Wied. Ann., Bd. 31, 1887, p. 1003 и Bd. 34 1888, p. 551.

[2]) Braun. Wied. Ann., Bd. 33, 1888, 239.

[3]) Max Schumann. Wied. Ann., Bd. 31, 1887, p. 14.

№ I $k = 0.00000135$,

№ II $k = 0.00000090$,

№ III $k = 0.00000342$,

№ IV $k = -0.00000084$.

Сжимаемость стекла, однако, въ такихъ предѣлахъ на самомъ дѣлѣ не колеблется; новѣйшія изслѣдованія [1]) показали, что для французскаго обыкновеннаго стекла

$$k = 0.00000221,$$

для хрусталя

$$k = 0.00000274,$$

для нѣмецкаго стекла

$$k = 0.00000244.$$

Вслѣдствіе этого, я не считаю возможнымъ допускать такія значенія, какъ $k = 0.90 \times 10^{-6}$ и тѣмъ менѣе $k = -0.84 \times 10^{-6}$. Эти числа показываютъ, что коэффиціентъ χ_a Schumann'a слишкомъ великъ сравнительно съ коэффиціентами Grassi; въ этомъ отношеніи наблюденія Quincke безупречнѣе, и въ нихъ видна обратная разница, т. е. коэффиціентъ χ_a маловатъ. Нужно полагать, что въ этой неточности и лежитъ причина разногласія между нѣкоторыми выводами Schumann'a и выводами Röntgen & Schneider'a и Drecker'a. Наблюденія были произведены при 0^0 и комнатной температурѣ, а давленія были очень малыя, всего въ 100—500 m.m. ртутнаго столба.

Вотъ заключенія, къ которымъ приходитъ Schumann.

1) Сжимаемость воднаго раствора одного и того же хлорида и при одной и той же температурѣ тѣмъ меньше, чѣмъ больше концентрація раствора.

---

[1]) См. таблицу V кубической сжимаемости стекла, гл. II, § 16.

2) Малыя количества примѣшиваемыхъ къ водѣ солей измѣняютъ ея сжимаемость весьма различно; измѣненіе зависитъ не только отъ количества и рода соли, но и отъ температуры.

3) Слабые растворы хлористаго калія и хлористаго кальція при 15° С., хлористаго аммонія и хлористаго стронція при 0°—обладаютъ большею сжимаемостью нежели вода при тѣхъ же температурахъ. Поэтому всегда возможно найти растворъ этихъ солей, который обладаетъ такою же сжимаемостью, какою обладаетъ вода при той же температурѣ.

4) Всѣ разжиженные растворы солей повторяютъ аномалію воды; при 0° они сжимаются сильнѣе, чѣмъ при болѣе высокихъ температурахъ.

5) Растворы хлористаго аммонія, хлористаго калія и, вѣроятно, хлористаго барія при всякой концентраціи обладаютъ свойствомъ — уменьшать свою сжимаемость съ возрастаніемъ температуры.

6) Растворы хлористаго натрія, хлористаго кальція и хлористаго стронція, начиная съ нѣкоторой концентраціи для различныхъ солей весьма различной, напоминаютъ большинство жидкостей, т. е. ихъ сжимаемость возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры; при этомъ въ болѣе концентрированныхъ растворахъ хлористаго натрія и хлористаго стронція вліяніе температуры не зависитъ отъ концентраціи.

7) Та степень концентраціи, начиная съ которой растворы трехъ упомянутыхъ солей обладаютъ нормальнымъ свойствомъ сжимаемости (возрастаніе ея съ возрастаніемъ температуры), даетъ для каждой изъ нихъ такой растворъ, сжимаемость котораго не зависитъ отъ температуры. Это свойство жидкостей устанавливается впервые.

8) Между сжимаемостью и плотностью изученныхъ тѣлъ нельзя установить какой-либо простой зависимости.

27. Въ 1888 году, Drecker[1]) опубликовалъ дальнѣйшія

---

[1]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 34, 1888, p. 952.

свои изслѣдованія по сжимаемости жидкостей (см. § 20), остановивъ на этотъ разъ свое вниманіе также на растворахъ хлористаго калія и хлористаго кальція. Онъ приготовилъ по семи растворовъ каждой соли различнаго процентнаго содержанія, причемъ наполнялъ теперь піезометръ при кипѣніи, такъ какъ при холодномъ способѣ наполненія всегда обнаруживалось присутствіе воздуха; вопреки ожиданію, кипѣніе весьма ничтожно измѣняло концентрацію раствора, приблизительно 0.1 gr. на 250 gr.; кромѣ того, для контроля процентное содержаніе опредѣлялось титрованіемъ. Давленіе до 5 атмосферъ измѣрялось болѣе чувствительнымъ воздушнымъ манометромъ; предѣлы отклоненій его измѣреній не превышали 0.4%; вычисленіе коэффиціента сжимаемости χ_a было всецѣло основано на формулѣ (17), согласно которой онъ наблюдалъ лишь мгновенныя измѣненія объема D_m. Изъ этихъ опытовъ онъ нашелъ для воды

$$\chi_a = 0.0000443 \text{ при } 17{,}84^0 \text{ C.},$$

а по Röntgen'у и Schneider'у

$$\chi_a = 0.0000438 \text{ при } 17{,}84^0 \text{ C.}$$

Переходъ отъ коэффиціента χ_a къ коэффиціенту χ_v сдѣланъ при помощи взятаго у Regnault числа

$$k = 0.0000018.$$

Подобная же разница въ 1.5% обнаружилась при сравненіи коэффиціентовъ сжимаемости растворовъ, которую Drecker справедливо приписываетъ различной сжимаемости піезометровъ. Съ наблюденіями Schumann'a такого согласія нѣтъ, и разности—то положительныя, то отрицательныя,—иногда достигаютъ 10%. Результаты этого изслѣдованія стоятъ въ противорѣчіи съ нѣкоторыми выводами Schumann'a: во-первыхъ, Drecker отрицаетъ открытую Schumann'омъ аномалію разжи-

женныхъ растворовъ хлористаго калія и хлористаго кальція, состоящую въ томъ, что при 15° С. они обладаютъ большею сжимаемостью, чѣмъ чистая вода. Эта аномалія отрицается также Röntgen & Schneider'омъ[1]); а во-вторыхъ, онъ не признаетъ того, чтобы сжимаемость растворовъ хлористаго аммонія, хлористаго кальція и, вѣроятно, хлористаго барія, уменьшалась съ возрастаніемъ температуры.

Зато онъ вполнѣ подтверждаетъ выводы Röntgen'а и Schneider'а.

На основаніи своихъ измѣреній Drecker высказываетъ слѣдующія положенія:

1) Сжимаемость растворовъ хлористаго калія и хлористаго кальція всегда меньше сжимаемости воды.

2) Уменьшеніе сжимаемости, однако, не пропорціонально содержанію соли.

3) Сжимаемость этихъ растворовъ до опредѣленной концентраціи убываетъ съ возрастающей температурой аналогично водѣ, а послѣ нея возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры, подобно спирту, эѳиру и т. д. Такая степень концентраціи для растворовъ хлористаго калія равна 16%, а для хлористаго кальція — 20%, и сжимаемость этихъ растворовъ не зависитъ отъ температуры.

28. Въ этотъ періодъ времени Röntgen и Schneider[2]) опубликовали еще одинъ мемуаръ, въ которомъ сдѣлали возраженія Schumann'у:

1) Слабые растворы (2.52% и 3.86%) хлористаго калія и хлористаго кальція имѣютъ, согласно Schumann'у, при 15° С. большую сжимаемость, чѣмъ вода при той же температурѣ; послѣ провѣрки этотъ выводъ оказался ошибочнымъ.

2) Они не признали также того согласія, которое усматривалъ Schumann между своими измѣреніями и ихъ, такъ какъ

---

[1]) Röntgen und Schneider. Wied. Ann., Bd. 31, p. 1000, 1887.

[2]) Ibidem.

уклоненія иногда достигаютъ 10%; о столь значительныхъ уклоненіяхъ упоминаетъ и Drecker.

29. Начиная съ 1883 и до 1888, профессоръ Tait опубликовалъ рядъ мелкихъ замѣтокъ по сжимаемости нѣкоторыхъ жидкостей и въ частности воды и ртути [1]). Общій результатъ этихъ изслѣдованій данъ въ Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie, Bd. XIII, p. 442, за 1889 годъ. Подобно Aimé, Tait погружалъ свой піезометръ въ море на значительную глубину, такъ что давленія достигали 150—450 атм; онъ измѣрялъ ихъ помощью поршневыхъ манометровъ Amagat (manomètre à piston libre). Регистрированіе уровня жидкости въ піезометрѣ совершалось различными способами: разложеніемъ серебра на стѣнкахъ капилляра, помощью электрическаго тока и подвижныхъ указателей, какъ въ термометрахъ Sixt-Casella à maximum и minimum. Для перехода отъ кажущейся сжимаемости χ_a къ истинной χ_v, онъ измѣрилъ кубическую сжимаемость стѣнокъ піезометра помощью опыта, въ которомъ стеклянный стержень укорачивался подъ дѣйствіемъ всесторонняго гидростатическаго давленія, и нашелъ для хрусталя

$$k = 0.0000026,$$

а коэффиціентъ сжимаемости ртути

$$\chi_v = 0.0000036.$$

Tait подробно изслѣдовалъ сжимаемость воды, взятой изъ источника, при разныхъ давленіяхъ p (выраженныхъ въ тоннахъ; тонна = 150 атм.) и при разныхъ температурахъ t и установилъ связь между ними въ формѣ слѣдующаго уравненія:

$$\chi_v = 10^{-7}(520 - 17p + p^2) - 10^{-9}(355 + 5p)t + 10^{-9}(3 + p)t^2 \quad (23)$$

---

[1]) Краткіе разборы его работъ помѣщены въ Beiblätter, Bd. 8, p. 12, p. 439; Bd. 9, p. 374; Bd. 10, p. 149.

Это уравненіе показываетъ, что сжимаемость падаетъ съ возрастаніемъ температуры и давленія; minimum сжимаемости воды лежитъ около 60° С. при малыхъ давленіяхъ, а при большихъ давленіяхъ онъ перемѣщается ниже.

Pagliani[1]) провѣрилъ эту формулу въ зависимости отъ температуры, т. е.

$$\chi_v = 10^{-7}(520 - 3.55t + 0.03t^2) \qquad (24)$$

и вполнѣ оправдалъ ее; онъ нашелъ[2]):

Таблица II сжимаемости воды.

t	$\chi_v \times 10^7$ наб.	$\chi_v \times 10^7$ выч.
0	521	520
10	489	487.5
20	463	461
30	442	440.5
40	427	426
50	416	417.5
60	408	415
70	409	418.5
80	415	—
90	421	—
100	430	—

[1]) Числа второй колонны исправлены на основаніи опытовъ Amagat (С. R. 104, 1887).

[2]) Pagliani. Beiblätter. Bd. 14, 1890, p. 93.

Для морской воды Tait далъ уравненіе

$$\chi_v = 10^{-7}(481 - 21.25p + 2.25p^2) - 10^{-9}(355 + 5p)t + 10^{-9}(3 + p)t^2, \quad (25)$$

согласно которому minimum χ_v при атмосферномъ давленіи лежитъ около 56° С.

Кромѣ того, онъ изслѣдовалъ еще четыре раствора хлористаго натрія.

Изъ своихъ опытовъ надъ сжимаемостью воды и опытовъ Despretz надъ отношеніемъ плотности воды при 0° и 4° С. Tait вычислилъ пониженіе точки maximum'а плотности въ зависимости отъ давленія и нашелъ, что при давленіи въ 150 атмосферъ она должна понижаться на 3°.17 С., изъ опыта-же оказалось всего 3° С.; при давленіи въ 327 атмос. точки maximum плотности и замерзанія совпадаютъ на дѣленіи—2.4° С.[1]).

30. Въ 1887 году, Amagat[2]) независимо отъ Tait'а опубликовалъ изслѣдованіе о сжимаемости воды, но предѣлы его давленій были значительно больше, около 3200 атм.[3]), и температура мѣнялась также въ большихъ предѣлахъ отъ 0° до 50° С. Онъ нашелъ, что maximum плотности при давленіи въ 200 атмос. перемѣстился до дѣленія 0°.5 С., т. е. на 3.5° С. ниже, что согласуется съ вычисленіемъ и наблюденіями Tait'а.

При 700 атмосферахъ давленія maximum опустился ниже нуля—результатъ, также указанный Tait'омъ.

Amagat показалъ далѣе, что при значительныхъ давленіяхъ уменьшеніе коэффиціента сжимаемости воды съ возраста-

---

¹) Къ сожалѣнію, я не знаю оригинальныхъ статей Tait'а, напечатанныхъ въ Repport of the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger. Phys. and Chemistry 2, part IV, p. 76. London-Edinburgh and Dublin, 1888, котораго нѣтъ въ библіотекѣ Императорскаго Новороссійскаго университета.

²) Comptes Rendus. T. 104, 1887, p. 1159.

³) Давленія измѣрялись манометромъ à piston libre Amagat

ніемъ температуры сглаживается, и при давленіи въ 3000 атм. вода уже входитъ въ нормальный рядъ остальныхъ жидкостей; всѣ пертурбаціи онъ приписываетъ существованію maximum'a плотности. Уменьшеніе коэффиціента сжимаемости постепенно замедляется также съ повышеніемъ температуры, и какъ показали опыты Pagliani e Vicentini, окончательно останавливается за 60° С.

Кромѣ воды, Amagat[1]) еще изслѣдовалъ въ тѣхъ же предѣлахъ давленій и температуръ обыкновенный эѳиръ, алкоголи: этиловый, метиловый, пропиловый, аллиловый; ацетонъ; хлористый, бромистый, іодистый этилы; сѣрнистый углеродъ, хлористый фосфоръ. Коэффиціентовъ сжимаемости онъ не даетъ, такъ какъ пока ему неизвѣстны коэффиціенты упругости піезометровъ.

31. Въ 1888 году, De-Heen[2]) въ своемъ сочиненіи по сравнительной физикѣ и теоріи жидкостей отводитъ мѣсто сжимаемости жидкостей, причемъ интересуется, главнымъ образомъ, измѣненіемъ сжимаемости съ измѣненіемъ температуры. Онъ изучилъ слѣдующія жидкости: ксиленъ, толуенъ, бензойнокислый бутилъ, бензойнокислый амилъ, валеріяновокислый метилъ,—этилъ,—бутилъ и—амилъ, бромистый этиленъ, хлористый этиленъ, хлористый углеродъ (C_2Cl_4), маслянокислый метилъ,—этилъ,—бутилъ и—алилъ, въ предѣлахъ температуръ 10° С.—100° С. и давленія 5.25 атм. Піезометръ наполнялся всегда при кипѣніи жидкости въ пустотѣ и подвергался только одному внутреннему давленію; чтобы опредѣлить величину поправки $\Theta_{0(10)}$ и $\Theta_{0(100)}$, онъ воспользовался коэффиціентами сжимаемости воды χ_v при 10° С. и при 100° С. Pagliani e Vicentini (§ 21, колонна 5-я таблицы I).

32. Въ 1889 году, Amagat[3]) опубликовалъ весьма ин-

---

[1]) Amagat. Comptes rendus. T. 105, 1887, p. 1120.

[2]) De-Heen. Recherches touchant la physique comparée et la théorie des liquides. Paris—Louvain, 1888, chap. III, p. 49.

[3]) Amagat. Journal de Physique, (2) t. 8, 1889, p. 197; также Annales de chim. et de phys., (6) t. 22, 1891, p. 137.

тересный мемуаръ по сжимаемости ртути. Онъ изслѣдовалъ ея сжимаемость въ 7-ми цилиндрическихъ пiезометрахъ съ плоскими донышками, каждый длиною въ 1 m., съ цѣлью найти упругiя ихъ свойства, такъ какъ ему необходимо было исправить свои опыты по сжимаемости газовъ и жидкостей. Метода его была по существу — методой Regnault, но онъ расположилъ свои опыты такимъ образомъ, что могъ оперировать также и по методѣ Jamin'a. Давленiе было доведено всего до 7-ми атмосферъ, а температура поддерживалась постоянно при 4° C., такъ какъ во внѣшнемъ резервуарѣ у него была налита вода, а расширенiе воды при maximum'ѣ ея плотности почти равно нулю.

Опыты Amagat замѣчательны по той тщательности, съ которою онъ изслѣдовалъ упругiя свойства своихъ пiезометровъ, чего нельзя сказать о цѣломъ рядѣ предъидущихъ работъ.

Онъ остановился на опредѣленiи кубической сжимаемости

$$k=3\alpha(1-2\sigma)=\frac{3dU_0}{U_0P} \tag{26}$$

по способу, указанному Regnault и осуществленному когда-то Wertheim'омъ [1]). Способъ этотъ состоитъ въ вытяженiи пiезометра, наполненнаго жидкостью, dU_0 есть кажущееся увеличенiе объема жидкости U_0 при растяженiи грузомъ P. Такъ какъ въ это уравненiе входятъ двѣ неизвѣстныя: коэффицiентъ вытяженiя α и постоянная Poisson'a σ, то для полученiя втораго соотношенiя между α и σ онъ производилъ еще одинъ опытъ, въ которомъ онъ нажималъ пiезометръ съ силою P_1 съ одной внѣшней стороны, какъ это дѣлалъ Regnault, тогда

$$dU'_0=\alpha\frac{R_1^2}{R_1^2-R_0^2}(5-4\sigma)\,P_1U_0. \tag{27}$$

---

[1]) Wertheim. Annales de chim. et de phys., (3) t. 23, 1848, p. 52.

Въ послѣднемъ уравненіи dU'_0 есть кажущееся увеличеніе объема жидкости, заключенной въ томъ-же піезометрѣ; R_1 и R_0 суть его внутренній и внѣшній радіусы, а остальныя величины уже извѣстны. На основаніи послѣднихъ двухъ уравненій онъ опредѣлялъ коэффиціентъ k. Трубы для его піезометровъ были заказаны на хрустальномъ заводѣ Guilbert-Martin, въ Saint-Denis, а самые піезометры приготовлены изъ нихъ у Alvergniat à Paris.

Вотъ результаты его измѣреній:

Таблица III коэффиціентовъ сжимаемости стекла и ртути.

		σ	α	k	χ_a	χ_v
стекло	1	0.2476	$0.0_5 1434$	$0.0_5 2202$	$0.0_5 1696$	$0.0_5 3898$
	2	0.2450	1437	2200	1680	3880
	3	0.2428	1419	2190	1744	3934
среднее		0.2451	$0.0_5 1430$	$0.0_5 2197$	$0.0_5 1707$	$0.0_5 3904$
хрусталь	1	0.2538	$0.0_5 1604$	$0.0_5 2369$	$0.0_5 1547$	$0.0_5 3916$
	2	0.2481	1603	2423	1502	3925
	3	0.2534	1624	2403	1470	3937
	4	0.2443	1580	2424	1530	3954
среднее		0.2499	$0.0_5 1602$	$0.0_5 2405$	$0.0_5 1512$	3933

Отсюда окончательное значеніе истиннаго коэффиціента сжимаемости ртути есть

$$\chi_r = 0.000003918 \text{ при } 4^0 \text{ C.}$$

33. Наконецъ, мнѣ остается указать на связь между работою Amagat и моею, изложенію которой я посвящаю третью главу этого труда.

Я занимался вопросомъ о сжимаемости маселъ и коллоидовъ зимою, въ 1888—1889 годахъ, и когда не только вся работа по сжимаемости ртути была мною обдумана, но отчасти уже и выполнена, я узналъ о прекрасной работѣ Amagat. Не считавъ для себя возможнымъ бросить начатую работу, предварительные результаты которой хорошо сходились съ числами Amagat, я рѣшилъ продолжать ее. При этомъ —

во-первыхъ, я оперировалъ одновременно по тремъ методамъ: Regnault, Jamin'a и собственной;

во-вторыхъ, поставилъ себѣ цѣлью связать методу Jamin'a съ теоріей упругости и привести число Jamin'a (§ 13) къ числамъ Regnault, Tait'a и Amagat;

въ третьихъ, опредѣлилъ кубическую сжимаемость непосредственно по Regnault, считая $\sigma = 0.25$, и, кромѣ того, по формулѣ $k = 3(1-2\sigma)/E$, сдѣлавъ рядъ опытовъ гнутія и крученія піезометрическихъ трубъ.

Получивъ результаты согласные съ теоріей упругости и съ числами Amagat, я рѣшился обнародовать это изслѣдованіе, которое, насколько мнѣ кажется, уясняетъ, какъ связь между отдѣльными экспериментальными методами, такъ и ихъ отношеніе къ теоріи упругости.

ГЛАВА II.

Опредѣленіе кубической сжимаемости стекляныхъ стѣнокъ піезометра.

1. Обзоръ работъ, изложенныхъ въ предъидущей главѣ, привелъ насъ къ убѣжденію, что невозможно получить коэффиціента абсолютной сжимаемости жидкости χ_{ω}, если тѣмъ или инымъ путемъ не опредѣлить коэффиціента кубической сжимаемости k стѣнокъ піезометра; поэтому теперь мы займемся разборомъ тѣхъ методъ, помощью которыхъ этотъ коэффиціентъ можетъ быть опредѣленъ.

2. Мы видѣли сверхъ того, что до Regnault не было строгой методы опредѣленія коэффиціента кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра, а потому мы прямо начнемъ съ его методы, которая важна по своей непосредственности, такъ какъ она позволяетъ опредѣлить коэффиціентъ k того именно піезометра, въ которомъ сжимается изучаемая жидкость, и такъ какъ Lamé точно основалъ ее на уравненіяхъ теоріи упругости. Lamé далъ уравненіе, носящее названіе полнаго упругаго расширенія, по которому легко опредѣлить измѣненія, испытываемыя піезометромъ, когда его подвергаютъ дѣйствію внутренняго или внѣшняго давленія, или же одновременному дѣйствію того и другаго. Предположимъ, что нашъ піезометръ построенъ изъ изотропнаго вещества и представляетъ собою полый цилиндръ, оканчивающійся полусферическими донышками, и пусть будутъ:

k — кубическая сжимаемость его стѣнокъ;

R_1— радiусъ внѣшней его стѣнки;

R_0— радiусъ внутренней его стѣнки;

$U_0=\pi R_0^2 H$—объемъ его внутренней цилиндрической части;

$V_0=\frac{4}{3}\pi R_0^3$—объемъ его внутренней сферической части;

$W_0=U_0+V_0$—его полный внутреннiй объемъ;

$M=\frac{R_0^2}{R_1^2-R_0^2}$ и $N=\frac{R_0^3}{R_1^3-R_0^3}$;

P_1—внѣшнее давленiе, выраженное въ атмосферахъ;

P_0—внутреннее давленiе, выраженное также въ атмосферахъ;

λ и μ—двѣ постоянныя строенiя тѣла (constantes de constitution), въ функцiи которыхъ Lamé выражаетъ коэффицiенты упругости, такъ что модуль Юнга

$$E=\mu\frac{(3\lambda+2\mu)}{\mu+\lambda}, \tag{1}$$

постоянная Poisson'а

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}, \tag{2}$$

а кубическая сжимаемость

$$k=\frac{3}{3\lambda+2\mu}; \tag{3}$$

Θ—полное упругое расширенiе объема W_0, когда оболочка пiезометра испытываетъ дѣйствительныя давленiя P_1 и P_0.

Lamé доказалъ, что

$$\begin{aligned}\Theta=kU_0\{P_0M-P_1(M+1)+\frac{3\lambda+2\mu}{3\mu}(P_0-P_1)(M+1)\}+\\+kV_0\{P_0N-P_1(N+1)+\frac{3\lambda+2\mu}{4\mu}(P_0-P_1)(N+1)\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Это уравненіе выражаетъ полное упругое расширеніе піезометра, которымъ мы будемъ часто пользоваться. Lamé[1]) написалъ его въ упрощенной формѣ:

$$\Theta = kU_0\{P_0M - P_1(M+1) + \frac{5}{3}(P_0 - P_1)(M+1)\} + \\ + kV_0\{P_0N - P_1(N+1) + \frac{5}{4}(P_0 - P_1)(N+1)\}, \quad (4')$$

которая получается изъ предъидущей при условіи

$$\lambda = \mu, \quad (5)$$

эквивалентномъ

$$\sigma = 0.25.$$

Такое значеніе постоянной Poisson'а приписывали первоначально Navier, Poisson, а затѣмъ Barré de St.-Venant и Cornu.

3. Примѣнимъ это уравненіе къ опредѣленію коэффиціента кубической сжимаемости k по способу Regnault, причемъ назовемъ черезъ θ' то кажущееся увеличеніе объема W_0, которое мы наблюдаемъ въ капиллярѣ піезометра, подверженнаго одному внѣшнему давленію P_1.

Въ такомъ случаѣ $P_0 = 0$, и ур. (4) превращается въ:

$$\theta' = kU_0\{P_1(M+1) + \frac{3\lambda+2\mu}{3\mu}P_1(M+1)\} + \\ + kV_0\{P_1(N+1) + \frac{3\lambda+2\mu}{4\mu}P_1(N+1)\},$$

откуда

$$P_1 k = \frac{\theta'}{(M+1)U_0\frac{3\lambda+5\mu}{3\mu} + (N+1)V_0\frac{3\lambda+6\mu}{4\mu}}, \quad (6)$$

---

[1]) Regnault. Loc. cit., p. 441.

а при $\lambda=\mu$

$$P_1 k = \frac{\theta'}{\frac{8}{3}(M+1)U_0 + \frac{9}{4}(N+1)V_0}. \qquad (6')$$

Такимъ образомъ, чтобы опредѣлить кубическую сжимаемость k пiезометра изъ послѣдняго уравненiя достаточно одного описаннаго опыта и предварительнаго знанiя размѣровъ сосуда, отъ которыхъ зависятъ величины M, N, U_0, V_0. Однако, строгое опредѣленiе коэффицiента k можетъ быть сдѣлано лишь по уравненiю (6), для вычисленiя котораго необходимо знать абсолютное значенiе постоянныхъ Lamé λ и μ, другими словами модуль Юнга и постоянную Poisson'а, съ которыми онѣ связаны ур. (1) и ур. (2). По этому способу коэффицiентъ кубической сжимаемости k былъ обстоятельно опредѣленъ самимъ Regnault [1]), затѣмъ Wertheim'омъ [2]) и Grassi [3]). Разница между этими измѣренiями состоитъ лишь въ томъ, что Regnault пользовался при вычисленiи своихъ опытовъ уравненiемъ (6'), а Wertheim [4]), занявшись обстоятельнымъ опредѣленiемъ абсолютной величины σ, замѣнилъ его новымъ, которое легко получить изъ ур. (6), положивъ въ немъ

$$\lambda = 2\mu, \qquad (7)$$

что соотвѣтствуетъ $\sigma = 0.33$.

Въ такомъ случаѣ уравненiе (6') принимаетъ слѣдующiй видъ:

$$P_1 k = \frac{\theta'}{\frac{11}{3}(M+1)U_0 + \frac{12}{4}(N+1)V_0},$$

---

[1]) Regnault. Loc. cit., pp. 446, 450, 454, 461, таблицы №№ I, II, III, IV.

[2]) Wertheim. Annales de chim. et de phys., (3) t. 23, 1848, таблицы XII, XIII и XIV, pp. 90—94.

[3]) Grassi. Loc. cit., p. 448 etc.

[4]) Wertheim. См., кромѣ упомянутаго мемуара, еще: Annales de chim. et de phys., (3) t. 25, 1849, p. 209.

или

$$P_1 k = \frac{3\theta'}{11(M+1)U_0 + 9(N+1)V_0} \qquad (6'')$$

Вотъ по этому-то уравненію Grassi и произвелъ вычисленіе кубической сжимаемости своихъ пяти піезометровъ.

Въ послѣднее время по способу Regnault были сдѣланы опредѣленія кубической сжимаемости стекла Amagat [1]) и мною.

4. Кромѣ этого способа, можно остановиться еще на другомъ, который также дается теоріей упругости, согласно которой [2])

$$k = 3\alpha(1-2\sigma), \qquad (8)$$

или

$$k = \frac{3(1-2\sigma)}{E}, \qquad (9)$$

гдѣ E есть модуль Юнга.

Отсюда легко видѣть, что кубическую сжимаемость k можно вычислить, если извѣстны — модуль Юнга E и постоянная Poisson'а σ.

5. Модуль Юнга легче всего опредѣлить по растяженію α стержня или піезометрической трубы. Однако, если, повидимому, этотъ способъ и очень простъ, то на самомъ дѣлѣ слѣдуетъ его избѣгать, такъ какъ измѣряемое растяженіе есть величина слишкомъ малая и вліяніе ошибокъ, неизбѣжно сопровождающихъ ея измѣреніе, слишкомъ велико. Мнѣ кажется, что разногласіе, существующее между работами Wertheim'а и новѣйшими изслѣдованіями касательно сущности постоянной Poisson'а, отчасти объясняется выборомъ именно этой методы опредѣленія модуля Юнга.

---

[1]) Amagat. Journal de physique, (2) t. 8, 1889, p. 197; Annales de chim. et de phys., (6) t. 22, 1891, p. 101.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de physique. T. I, fas. II, 1882, p. 147.

Слѣдуетъ замѣтить, что въ настоящее время ее мало-помалу оставляютъ; Amagat, много занимавшійся изученіемъ упругости твердыхъ тѣлъ, считаетъ, напримѣръ, совершенно невозможнымъ примѣненіе этой методы къ стеклянымъ стержнямъ и трубамъ, вслѣдствіе неправильности ихъ формы. Однако, онъ допускаетъ ея приложеніе къ металлическимъ стержнямъ, правильно обработаннымъ на токарномъ станкѣ; онъ [1]) даже самъ воспользовался ею, но въ значительно усовершенствованной формѣ, а именно, онъ очень остроумно примѣнилъ къ измѣренію удлиненія двойной сферометръ, а для опредѣленія момента соприкосновенія обоихъ винтовъ сферометра съ двумя особыми стойками прибора—два гальванометра.

6. Модуль Юнга съ бо́льшею точностью измѣряется по прогибанію стержня или трубы. Основываясь на этомъ принципѣ, опыту придаютъ три разныя формы:

a) стержень закрѣпляютъ неподвижно обоими концами, а прогибающій грузъ помѣщаютъ по серединѣ;

b) стержень закрѣпляютъ неподвижно однимъ концомъ, а грузъ вѣшаютъ на свободномъ концѣ;

c) стержень свободно лежитъ концами на призмахъ, а прогибающій грузъ помѣщается по серединѣ;

d) иногда непосредственно измѣряютъ прогибаніе, иногда-же только уголъ гнутія.

Соотвѣтственно этимъ типичнымъ случаямъ употребляютъ различныя формулы, которыя даются во всѣхъ учебникахъ теоріи упругости [2]) для случаевъ, когда поперечныя сѣченія испытуемыхъ тѣлъ суть—квадратъ, прямоугольникъ, эллипсъ и кругъ, а болѣе сложныя задачи разобраны въ извѣстномъ мемуарѣ Barré de Saint-Venant [3])—«sur la fléxion des prismes».

---

[1]) Amagat. Journal de physique. (2) t. 8, 1889, p. 200.

[2]) Violle. Cours de physique. Tome I, Première partie. Paris, 1883, p. 443 etc.

[3]) Barré de Saint-Venant. Journal de Liouville. (2) t. 1, 1856.

7. Чтобы опредѣлить постоянную Poisson'a прибѣгаютъ къ различнымъ способамъ. Прежде всего замѣтимъ, что между модулемъ Юнга E, постоянной Lamé μ и постоянною Poisson'a σ существуетъ слѣдующая связь [1])

$$\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}, \tag{10}$$

и, стало-быть, опредѣленіе σ дѣлается помощью модуля Юнга E и постоянной μ, именуемой также модулемъ твердости. При этомъ модуль Юнга находятъ изъ гнутія стержней и трубъ, а модуль твердости изъ ихъ крученія.

Выборъ формулы, помощью которой можно было-бы опредѣлить μ, зависитъ отъ расположенія опыта и формы поперечнаго сѣченія стержней и трубъ [2]). Kirchhoff [3]) даже предложилъ одновременно подвергать испытуемыя тѣла гнутію и крученію; и послѣ него, эта метода считается наилучшею. Ею занимались многія лица: Купферъ [4]), Okatow [5]), Everett [6]), Voigt [7]), Baumeister [8]), Kiewit [9]), Kowalsky [10]) и теперь я—и нашли числа, которыя собраны мною въ нижеслѣдующей таблицѣ постоянныхъ Poisson'a (см. § 13 этой главы).

---

[1]) Violle. Loc. cit., p. 437.

[2]) Violle. Loc. cit., Première partie, p, 437.

[3]) Kirchhoff. Pogg. Ann., Bd. 108, 1859, p. 369.

[4]) Купферъ, А. Т. Опытныя изслѣдованія упругости металловъ. Спб. 1860 годъ.

[5]) Okatow. Pogg. Ann., Bd. 119, 1863, p. 11. Тоже по русски М. Окатовъ. Теорія равновѣсія и движенія упругой проволоки. Спб. 1867.

[6]) Everett. Philos. Transactions. Vol. 156, 1866, p. 185; Vol. 157, 1867, p. 139; Vol. 158, 1868, p. 363.

[7]) Voigt. Wied. Ann., Bd. 15, 1882, p. 497, кромѣ того, онъ помѣстилъ еще нѣсколько работъ въ Wied. Ann., списокъ которыхъ помѣщенъ въ его мемуарѣ, напечатанномъ въ Wied. Ann., Bd. 38, 1889, p. 573.

[8]) Baumeister. Wied. Ann., Bd. 18, 1883, p 578.

[9]) Kiewit. Wied. Ann., Bd. 29, 1886, p. 617.

[10]) Kowalsky. Wied. Ann., Bd. 36, 1889, p. 307 и Bd. 39, 1890, p. 155.

Нѣкоторые изслѣдователи пользовались формулою (10), но опредѣляли модуль упругости не по прогибанію стержней, а по ихъ вытяженію, или по звуковому способу (Wertheim, Kohlrausch und Loomis). Такая замѣна, вообще, нежелательна по мотивамъ, уже высказаннымъ въ § 5.

8. Второй способъ опредѣленія коэффиціента σ былъ предложенъ Regnault и выполненъ Wertheim'омъ[1]). Онъ состоитъ въ томъ, что длинный піезометръ, наполненный какою-либо жидкостью, закрѣпляется съ одного конца, а съ другаго вытягивается нѣкоторымъ грузомъ P, вслѣдствіе чего одновременно получается два эффекта, помощью которыхъ, во-первыхъ, легко опредѣлить коэффиціентъ удлиненія α, а во-вторыхъ, измѣненіе dU_0 внутренняго объема U_0. Отсюда приращеніе объема на единицу объема можетъ быть выражено двояко: съ одной стороны по измѣненію уровня получимъ $\frac{dU_0}{U_0P}$, а съ другой—изъ коэффиціентовъ продольнаго растяженія α и поперечнаго сокращенія β получимъ

$$(1+\alpha)\ (1-\beta)^2=1+\alpha-2\beta=\alpha(1-2\sigma). \qquad (11)$$

Приравнявъ эти два выраженія, найдемъ:

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\alpha(1-2\sigma), \qquad (12)$$

откуда

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\frac{1}{2}\alpha, \qquad (13)$$

если $\sigma=0.25$, и

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\frac{1}{3}\alpha, \qquad (14)$$

если $\sigma=0.33$.

Опыты, произведенные Wertheim'омъ съ 3 латунными и 4 хрустальными трубами, привели его къ заключенію, что $\sigma=0.33$.

---

[1]) Wertheim. Annales de chim. et de phys., (3) t. 23, 1848, p. 52.

Существенное возраженіе, которое Violle[1]) дѣлаетъ Wertheim'у, сводится къ тремъ замѣчаніямъ: 1-е—вблизи мѣтокъ, нанесенныхъ у оконечностей піезометра, измѣненіе объема иное, чѣмъ между мѣтками; 2-е—толщина стѣнокъ вдоль трубъ неодинакова, и насколько она неодинакова—этого Wertheim даже не изслѣдовалъ; 3-е—Wertheim не обратилъ никакого вниманія на термическія условія своихъ опытовъ. Сказаннаго достаточно, чтобы относиться съ большою осмотрительностью къ результатамъ его измѣреній. Въ томъ-же смыслѣ высказывается Amagat[2]), который этимъ способомъ недавно опредѣлилъ σ, k, E металловъ, но съ тѣмъ сферометрическимъ приспособленіемъ для измѣренія удлиненія α, о которомъ уже упомянуто въ § 5.

9. Третій способъ опредѣленія коэффиціента σ былъ также предложенъ Regnault[3]) и только недавно реализованъ Amagat[4]). Способъ этотъ состоитъ въ томъ, что только-что описанный піезометръ подвергается вытяженію грузомъ P, отчего мѣняется первоначальный цилиндрическій объемъ U_0 на величину dU_0, и тогда, какъ уже извѣстно изъ ур. (12),

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\alpha(1-2\sigma) \tag{12}$$

или же въ функціи постоянныхъ Lamé

$$\frac{dU_0}{U_0P}=\frac{1}{3\lambda+2\mu}; \tag{15}$$

если-же этотъ самый піезометръ подвергнуть одному внѣшнему давленію P_1, то на основаніи урав. (6) измѣненіе объема $\theta'=dU_0'/U_0P_1$ выразится:

---

[1]) Violle. Loc. cit., p. 424.

[2]) Amagat. Journal de physique, (2) t. 8, 1889, p. 366.

[3]) Regnault. Loc. cit., pp. 457—459.

[4]) Amagat. Loc. cit., pp. 200—203.

$$\theta' = \frac{P_1 U_0 (M+1)\ (5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)}, \tag{16}$$

или же въ функціи коэффиціентовъ α и σ

$$\frac{dU_0'}{U_0 P_1} = \alpha(M+1)\,(5-4\sigma). \tag{17}$$

Изъ уравненій (12) и (17) можно вычислить α и σ, или-же изъ уравненій (15) и (16)—λ и μ. Результаты измѣреній, сдѣланныхъ по этому способу изложены и уже приведены въ таблицѣ III § 32 первой главы, стр. 48.

10. Четвертый способъ основанъ на связи, существующей между звуковыми колебаніями даннаго тѣла и его упругими свойствами. Онъ примѣнялся къ опредѣленію модулей упругости многими лицами, и между прочими Wertheim'омъ, и состоитъ въ томъ, что изъ стержня извлекаютъ звуки при продольныхъ колебаніяхъ и при поперечныхъ. Изъ теоріи-же упругости вытекаетъ, что отношеніе числа колебаній стержня при продольномъ колебаніи n_l къ числу колебаній при крутильномъ его колебаніи n_t равно

$$\frac{n_l}{n_t} = \sqrt{\frac{E}{\mu}}. \tag{18}$$

Замѣнивъ черезъ m отношеніе n_l къ n_t и вставивъ вмѣсто E равную ему величину изъ ур. (1), находимъ, что

$$m = \sqrt{\frac{3\lambda+2\mu}{\mu+\lambda}},$$

а отсюда

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{m^2-2}{3-m^2}. \tag{19}$$

Но постоянная Poisson'a

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{2\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{m^2-2}{2}. \qquad (20)$$

Однако, счетъ числа колебаній довольно затруднителенъ, между тѣмъ какъ измѣреніе длины звуковыхъ волнъ по способу Kundt'a [1]) не представляетъ никакихъ затрудненій, поэтому Schneebeli [2]) опредѣлялъ m не по отношенію числа колебаній, а по отношенію длины волнъ λ_l и λ_t, помня, что

$$\frac{n_l}{n_t} = \frac{\lambda_t}{\lambda_l} = m, \qquad (21)$$

и нашелъ значеніе Poisson'овской постоянной σ для нѣсколькихъ стальныхъ стержней (см. таблицу постоянныхъ Poisson'a, § 13).

Я пробовалъ примѣнить этотъ способъ къ стеклянымъ трубамъ, но мнѣ не удавалось при поперечномъ колебаніи извлечь звука такой силы, чтобы въ резонирующей трубѣ получить фигуры Kundt'a.

11. Еще одна метода опредѣленія σ была предложена Cantone'омъ [3]); онъ подвергалъ стеклянные піезометры то внутреннему, то внѣшнему давленію; при дѣйствіи внутренняго давленія піезометръ удлинялся, и онъ измѣрялъ по оптическому способу Fizeau коэффиціентъ удлиненія α, а при дѣйствіи внѣшняго получалъ уже извѣстное соотношеніе (ур. 17). Для четырехъ трубъ онъ нашелъ $\sigma = 0.257$.

12. Слѣдуетъ, наконецъ, упомянуть о существованіи оптической методы опредѣленія σ, которая была испытана Cornu [4]).

---

[1]) Kundt. Pogg. Ann., Bd. 127, 1868, p. 497.

[2]) Schneebeli. Pogg. Ann., Bd. 140, 1870, p. 598.

[3]) Amagat. Loc. cit., p. 366.

[4]) Cornu. Comptes rendus. T. 69, 1869, p. 333.

Къ сожалѣнію, она не приложима къ трубамъ, а только къ пластинкамъ, и состоитъ въ томъ, что испытуемую пластинку ставятъ горизонтально на двѣ подставки и нагружаютъ ее у концовъ, вслѣдствіе чего ея середина выгибается и получается между нею и другою плоскою прозрачною пластинкою, расположенною вблизи, окрашенная система сопряженныхъ гиперболъ съ общими ассимптотами. Эти фигуры Cornu фотографировалъ и затѣмъ микрометрически опредѣлялъ тангенсъ угла ψ, составленнаго ассимптотою съ направленіемъ оси призмы, такъ какъ согласно одной теоремѣ St Venant'a [1])

$$tg^2\psi = \frac{2(\mu+\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{\sigma}. \qquad (22)$$

Cornu нашелъ для 6 пластинокъ стекла St Gobain $\sigma = 0.237$.

13. Раньше, чѣмъ покончить съ вопросомъ объ опредѣленіи числоваго значенія постоянной Poisson'a, я приведу еще имена тѣхъ экспериментаторовъ, которые занимались разъисканіемъ его не для стекла, а для другихъ твердыхъ тѣлъ; сюда, насколько мнѣ извѣстно, относятся Cagnard de la Tour [2]), Wertheim [3]), F. Neumann [4]), Maxwell [5]), Kohlrausch [6]), Villari [7]), Röntgen [8]), Mallock [9]), Littmann [10]), Maurer [11]), Pulfrich [12]), а въ слѣдующей таблицѣ помѣщу числа найденныя, какъ ими, такъ и тѣми, о которыхъ я уже имѣлъ случай раньше упомянуть.

---

1) F. Neumann. Vorlesungen über die Theorie der Elasticität. Leipzig, 1885, p. 162.

2) Poisson. Annales de chim. et de phys., (2) t. 36, 18, 27, p. 384.

3) Wertheim. Wüllner. Lehrbuch der Experimentalphysik. Bd. I. Leipzig, 1874, p. 203.

4) F. Neumann. Loc. cit., p. 138.

5) Everett. Phil. Transactions. Vol. 156, 1866, p. 191.

6) Kohlrausch und Loomis. Pogg. Ann., Bd. 141, 1870, p. 481.

7) Villari. Pogg. Ann., Bd. 143, 1871, pp. 88 и 290.

8) Röntgen. Pogg. Ann., Bd. 159, 1876, p. 601.

9) Mallock. Proc. Royal Society. Vol. 29, 1879, p. 157.

10) Littmann. Beiblätter. Bd. 9, 1885, p. 611.

11) Maurer. Wied. Ann., Bd. 28, 1886, p. 628.

12) Pulfrich. Wied. Ann., Bd. 28, 1886, p. 87.

Таблица V постоянныхъ Poisson'a для различныхъ твердыхъ тѣлъ.

1. Стекло.

Имена	Родъ стекла	Постоянная σ
Wertheim.......	Хрусталь Choisy-le-Roi.	0.321
Maxwell	Неизвѣстное	0.332
Everett	Флинтгласъ № I, James Couper & Sons, Glasgow	0.258
Everett	Флинтгласъ № II, A & R Cochran, Glasgow ..	0.229
Cornu	Saint Gobain.........	0.237
Voigt	Guinand à Paris	0.213
Voigt	Рейнское	0.208
Amagat	Обыкновенное французск.	0.245
Amagat	Хрусталь Guilbert-Martin	0.250
Cantone	Неизвѣстное	0.257
Kowalsky, 1889 .	Greiner und Friedrichs.	0.226
Kowalsky, 1890 .	Greiner und Friedrichs.	0.212
De-Metz	Greiner und C[ie]	0.237
De-Metz	Gundelach	0.235
	Среднее..	0.247

2. Сталь.

Имена	постоян. σ
Wertheim..........	0.310
Kirchhoff	0.294
Okatow......... ..	0.275
Okatow.............	0.303
Everett............	0.310
Schneebeli	0.296
Schneebeli	0.303
Mallock	0.253
Amagat	0.269
Среднее	0.290

3. Желѣзо.

Имена	постоян. σ
Wertheim..........	0.320
Neumann..........	0.250
Maxwell	0.267
Everett............	0.275
Baumeister	0.308
Littmann	0.236
Littmann	0.243
Среднее	0.271

4. Чугунъ.

Everett............	0.267

Таблица V постоянныхъ Poisson'a для различныхъ твердыхъ тѣлъ.

5. Мѣдь.

Имена	постоян. σ
Wertheim	0.300
Everett	0.378
Mallock	0.348
Voigt	0.336
Kiewit	0.320
Amagat	0.327
Среднее	0.335

8. Латунь.

Имена	постоян. σ
Wertheim	0.330
Kirchhoff	0.389
Everett	0.469
Mallock	0.325
Baumeister	0.410
Littmann	0.239
Littmann	0.226
Amagat	0.327
Среднее	0.352

6. Цинкъ.

Имена	постоян. σ
Mallock	0.180
Mallock	0.230
Kiewit	0.330
Среднее	0.246

7. Свинецъ.

Имена	постоян. σ
Mallock	0.375
Amagat	0.428
Среднее	0.401

9. Каучукъ.

Имена	постоян. σ
Wertheim	0.330
Villari	0.333 0.167
Röntgen	0.500
Mallock	0.500
Среднее	0.356

10. Металлъ Delta.

Имена	постоян. σ
Amagat	0.340

11.

Различ. тѣла.		постоян. σ
Каменная соль	Voigt	0.252
Сильвинъ	Voigt	0.186
Бериллъ	Voigt	0.255
Горный хруст.	Voigt	0.068
Известк. шпатъ	Voigt	0.269
Топазъ	Voigt	0.220
Баритъ	Voigt	0.292

12.

Различ. тѣла.		постян. σ
Пробка	Mallock	0.000
Парижск. гипсъ	Mallock	0.181
Эбонитъ	Mallock	0.389
Слоновая кость	Mallock	0.500
Параффинъ	Mallock	0.500
Желатина	Maurer	0.500

14. Числа, приведенныя въ послѣдней таблицѣ, позволяютъ намъ провѣрить нѣкоторые выводы той части теоріи упругости, въ которой различныя лица пытались установить зависимость между коэффиціентами продольнаго растяженія α и поперечнаго сокращенія β изотропнаго твердаго тѣла. Вначалѣ Navier, Poisson, Lamé и Clapeyron принимали, что это отношеніе есть четверть, но впослѣдствіи Cauchy показалъ, что оно можетъ быть какимъ угодно, въ зависимости отъ рода даннаго тѣла. Это мнѣніе встрѣтило поддержку въ позднѣйшихъ трудахъ Lamé, а затѣмъ Kirchhoff'a и другихъ выдающихся физиковъ и геометровъ прошлаго и нашего времени. Совокупными трудами имъ удалось установить, что, такъ называемая, постоянная Poisson'a σ не можетъ быть ни постоянною для всѣхъ твердыхъ тѣлъ, ни равною четверти, но перемѣнною въ предѣлахъ отъ нуля до половины.

Lamé[1]) прямо говоритъ: «Нельзя допустить соотношенія $\lambda = \mu$ (т. е. $\sigma = 0.25$), которое необходимо опирается на гипотезу непрерывности вещества въ твердыхъ тѣлахъ. Результаты опытовъ Wertheim'a ясно показываютъ, что отношеніе λ къ μ не есть единица, и не приписываютъ, какъ кажется, этому отношенію другой постоянной и вполнѣ опредѣленной величины. Мы сохранимъ поэтому два коэффиціента, оставивъ ихъ отношеніе неопредѣленнымъ». Обзоръ значеній σ, дѣйствительно, оправдываетъ послѣднее воззрѣніе, такъ какъ мы встрѣчаемъ и $\sigma = 0$, и $\sigma = 0.50$. Однако, возможно и иначе смотрѣть на этотъ вопросъ. Barré de Saint-Venant считаетъ $\sigma = 0.25$, или $\lambda = \mu$ для всякаго истинно изотропнаго тѣла, того-же мнѣнія Cornu, Voigt и Mercadier[2]); они полагаютъ, что если въ данномъ тѣлѣ коэффиціентъ σ не равенъ четверти, то этимъ самымъ доказывается только отсутствіе въ немъ изотропіи. Voigt[3]) мотиви-

---

[1]) Lamé. Leçons sur l'élasticité des corps solides. Loc. cit., p. 51.

[2]) Mercadier. Comptes rendus. T. 105, 1887, p. 105.

[3]) Voigt. Wied. Ann., Bd. 38, 1889, p. 573.

руетъ свое мнѣніе тѣмъ фактомъ, что, такъ называемыя, изотропныя тѣла въ огромномъ большинствѣ случаевъ обладаютъ кристаллическою структурою съ тою, однако, особенностью, что отдѣльные кристаллики, ихъ составляющіе, оріентированы по всевозможнымъ направленіямъ. Нужно замѣтить, что это воззрѣніе на природу твердыхъ тѣлъ не ново, и что Savart [1]) уже давно развилъ его на основаніи своихъ разнообразныхъ акустическихъ изслѣдованій, причемъ онъ отвелъ почтенное мѣсто вопросу, насколько механическія операціи — ковки, прокатыванія и т. п., измѣняютъ изотропію даннаго тѣла. Отсюда уже видно, съ какою осторожностью нужно принимать данное тѣло за изотропное, и вотъ Voigt предлагаетъ считать тѣла съ неопредѣленнымъ кристаллическимъ строеніемъ — тѣлами quasi-изотропными въ отличіе отъ дѣйствительно изотропныхъ. Онъ приписываетъ quasi-изотропнымъ тѣламъ свойство полярности, которое состоитъ въ томъ, что ихъ молекулы дѣйствуютъ другъ на друга не только въ зависимости отъ ихъ взаимнаго разстоянія, но также въ зависимости и отъ направленія соединяющей ихъ линіи. Этимъ мыслямъ Voigt далъ аналитическое выраженіе, которое привело его къ заключенію: 1-е, что тѣла, не обладающія полярностью, дѣйствительно характеризуются $\sigma = 0.25$, и 2-е, что изотропныя тѣла, состоящія изъ кристаллическихъ индивидуумовъ — большихъ по сравненію съ сферою молекулярнаго дѣйствія, но малыхъ по сравненію съ размѣрами цѣлаго тѣла —, и обладающія полярностью, не имѣютъ никакого опредѣленнаго численнаго отношенія между обѣими постоянными упругости.

Подводя итоги всему сказанному относительно числоваго значенія коэффиціента σ, который входитъ въ наши формулы, и примѣняя ихъ къ стеклянымъ піезометрамъ, мы считаемъ возможнымъ согласиться съ Cornu и признать стекло тѣломъ изотропнымъ,

---

[1]) Savart. Pogg. Ann., Bd. 16, 1829, p. 248.

потому-что среднее значенiе $\sigma=0.247$ близко къ теоретическому $\sigma=0.25$. Такимъ образомъ, мы позволимъ себѣ пользоваться упрощенными формулами Lamé, принявъ $\lambda=\mu$. Въ концѣ третьей главы мы постараемся оправдать такое допущенiе.

15. Третiй способъ опредѣленiя кубической сжимаемости твердаго тѣла былъ недавно предложенъ и испробованъ въ Англiи—Buchanan'омъ [1]) и Tait'омъ [2]), а во Францiи—Amagat [3]). Онъ имѣетъ огромное преимущество передъ двумя предъидущими по простотѣ своего замысла и по точности; состоитъ же онъ въ томъ, что стержень погружается въ цилиндръ, который весь наполненъ какою-либо жидкостью, и въ которомъ можно производить какое угодно давленiе помощью насоса. Заключенный въ цилиндрѣ стержень испытываетъ гидростатическое давленiе со всѣхъ сторонъ и единица его длины на единицу давленiя сокращается на α', а отсюда коэффицiентъ кубической сжимаемости

$$k=3\alpha'. \tag{22}$$

Такимъ образомъ Buchanan нашелъ для хрусталя

$$k=0.00000292,$$

а Tait

$$k=0.00000270.$$

Amagat производилъ свои опыты въ предѣлахъ давленiй отъ 1 атм. до 2000 атм. и не замѣтилъ почти никакого измѣненiя въ величинѣ коэффицiента k.

Вотъ его результаты при 12° C.

---

[1]) Buchanan. Beiblätter. Bd. 5, 1881, p. 172.

[2]) Tait. Beiblätter. Bd. 14, 1890, p. 707.

[3]) Amagat. Journal de physique. Loc. cit., p. 362.

Таблица VI коэффиціентовъ кубической сжимаемости стекла и хрусталя.

Давленіе въ атм.	Сокращеніе α'	Стекло	Хрусталь
1—500	0.0_6750	0.0_52250	0.0_52454
1—1000	746	2248	2424
1—1500	745	2235	2415
1—2000	743	2229	2406

16. Насколько мнѣ извѣстно, изложенные здѣсь способы опредѣленія кубической сжимаемости твердыхъ тѣлъ обнимаютъ собою наилучшія изслѣдованія новѣйшихъ временъ.

Теперь мнѣ остается только составить таблицу коэффиціентовъ k, собранныхъ мною изъ разныхъ изслѣдованій, причемъ я ограничиваюсь лишь стекломъ и тѣми числами, которыя добыты путемъ прямыхъ измѣреній, а чтобы получить болѣе ясное представленіе о предѣльныхъ значеніяхъ этого коэффиціента, я разгруппирую всѣ данныя по родамъ стекла.

Таблица VII кубической сжимаемости k стекла и хрусталя.

Имена	Хрусталь	k
Wertheim.......	Baccarat	0.000002823
Wertheim.......	Choisy-le-Roi....	0.000002601
Grassi..........	Choisy-le-Roi....	0.000002883
Everett.........	Флинтъ № II Cochran	0.000002930
Everett.........	Флинтъ I Couper..	0.000002487
Voigt..........	Guinand à Paris..	0.000002750
Buchanan........	?	0.000002920
Tait............	?	0.000002700
Amagat.........	Guilbert-Martin...	0.000002425
De-Metz	Французскій......	0.000002890

Среднее 0.000002740

Таблица VII кубической сжимаемости k стекла и хрусталя.

Нѣмецкое простое стекло		k
Voigt..........	Rheinisches......	0.00000246
Kowalsky........	Greiner & Friedricks	0.00000253
De-Metz.........	Gundelach.......	0.00000246
De-Metz.........	Greiner & C[ie]....	0.00000231

Среднее 0.000002435

Французское простое стекло.	k
Regnault..........	0.000002371
Wertheim..........	0.000002290
Wertheim..........	0.000002132
Grassi............	0.000002264
Dupré und Page....	0.000002000
Amagat...........	0.000002225

Среднее 0.000002214

17. Мы представили въ §§ 11, 21, 22 главы I-й изслѣдованія Amagat, Pagliani e Vicentini, Grassi и нѣкоторыхъ другихъ лицъ, въ которыхъ изучалось вліяніе температуры на сжимаемость жидкаго тѣла. Поэтому становится очевиднымъ вопросъ: каково же вліяніе температуры t на кубическую сжимаемость k стѣнокъ стекляннаго піезометра? Отвѣты на этотъ вопросъ могутъ быть найдены на основаніи изслѣдованій Grassi, Pagliani e Vicentini, Kowalsky и Amagat. Grassi опредѣлялъ коэффиціентъ k по способу Regnault одновременно съ коэффиціентомъ кажущейся сжимаемости χ_a воды и изъ нихъ находилъ коэффиціентъ χ_r. Къ сожалѣнію, изъ многихъ чиселъ Grassi, раз-

сѣянныхъ въ таблицахъ піэзометра A, сдѣланнаго изъ хрусталя Choisy-le-Roi, нельзя вывести никакого яснаго заключенія о взаимной связи между величинами k и t. Въ самомъ дѣлѣ вотъ его числа:

Таблица VIII кубической сжимаемости хрусталя при разныхъ температурахъ.

t^0 C.	0	8.5	17.5	25.9	34.5	41	53.3
$k \times 10^8$	280	286	282	282	284	287	286

По упомянутымъ изслѣдованіямъ Pagliani e Vicentini кубическая сжимаемость возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры, хотя и весьма слабо, именно:

t	k[1])
0^0	0.0000019
100^0 C.	0.0000022

Kowalsky[2]), собственно говоря, не задавался рѣшеніемъ интересующаго насъ вопроса, но въ одной его работѣ мы находимъ всѣ данныя для точнаго рѣшенія этой задачи, такъ какъ онъ эмпирически опредѣлилъ соотношенія съ одной стороны между модулемъ Юнга E и температурой въ предѣлахъ 9^0 C. — 200^0 C., а съ другой стороны между твердостью μ и температурою въ предѣлахъ 16^0 C.—100^0 C. Результаты своихъ измѣреній онъ выразилъ слѣдующими формулами:

---

[1]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 34, 1888, p. 965.

[2]) Kowalsky. Wied. Ann., Bd. 39, 1890, p. 155.

$$E = 6770\ (1-0.00106\ t)\,, \tag{23}$$

$$\mu\ = 2792\ (1-0.00151\ t)\,, \tag{24}$$

которыми легко воспользоваться слѣдующимъ образомъ.

Извѣстно, что[1])

$$2(1+\sigma) = \frac{E}{\mu}, \tag{25}$$

а

$$k = \frac{3(1-2\sigma)}{E} 0.010333, \tag{26}$$

если за единицу давленія принимать не киллограммъ, а атмосферу, и слѣдовательно

$$k = \frac{9\mu - 3E}{E\mu} 0.010333; \tag{27}$$

сдѣлавъ по этой формулѣ вычисленія для $t=0^0, 50^0$ и 100^0, я нашелъ:

t^0 C.	$k\times 10^{7}$
0	26.32
50	25.05
100	22.86

откуда среднее $\Delta = 0.035\times 10^{7}$ на 1^0 C.

Изъ этихъ чиселъ мы заключаемъ, что кубическая сжимаемость падаетъ съ возрастаніемъ температуры, хотя тоже очень ничтожно, около 0.1% на 1^0 C. Мнѣ остается, наконецъ, упомянуть о еще неоконченной работѣ Amagat[2]), въ ко-

---

[1]) Violle. Cours de physique. Première partie, p. 437.

[2]) Amagat. Comptes rendus. T. 110, 1890, p. 1246.

торой приведена только часть полнаго опредѣленія сжимаемости отъ 0° С. до 200° С., и изъ которой пока нельзя вывести окончательнаго заключенія объ измѣненіи коэффиціента k съ измѣненіемъ температуры.

Его метода та-же, которую онъ употреблялъ для опредѣленія кубической сжимаемости піезометра при комнатной температурѣ въ 15° С.

Позволю себѣ привести только заключительныя слова его мемуара [1]: «Во всякомъ случаѣ, говоритъ Amagat, для обыкновеннаго стекла, которымъ вообще теперь пользуются, измѣненія коэффиціента сжимаемости, даже до 200° С., какъ кажется, не способно повлечь за собою грубыхъ ошибокъ при вычисленіи деформаціи стѣнокъ; допуская пропорціональность между изучаемою деформаціею и этимъ коэффиціентомъ, равнымъ 0.0000022, мы дѣлаемъ ошибку въ 0.00028 при опредѣленіи объема, когда температура равна 200°, а давленіе 1000 атм.; въ изслѣдованіяхъ этого вопроса было-бы совершенно обманчиво стараться придавать ей значеніе».

---

[1]) Amagat. Loc. cit. p. 1249.

ГЛАВА III.

Результаты собственныхъ изслѣдованій сжимаемости ртути и стекла.

1. Задача, которую я себѣ поставилъ, состоитъ въ одновременномъ приложеніи нѣсколькихъ методъ для рѣшенія вопроса объ абсолютномъ коэффиціентѣ сжимаемости ртути съ цѣлью узнать, которая изъ методъ — Regnault или Jamin'a — приводитъ къ истинному рѣшенію. Я избралъ ртуть, какъ объектъ своего изслѣдованія, по двумъ причинамъ: во-первыхъ, потому что, какъ указано въ: § 8, стр. 10; § 9, стр. 13; § 10, стр. 16; § 12, стр. 19, главы I-й, различные авторы приписываютъ ей слишкомъ отличающіеся другъ отъ друга коэффиціенты сжимаемости; а во-вторыхъ, и потому, что на такомъ мало-сжимающемся тѣлѣ строже всего можно провѣрить относящіяся сюда формулы теоріи упругости.

2. Прежде чѣмъ приступить къ этому изслѣдованію я запасся такимъ количествомъ ртути, которое хватило мнѣ на все мое изслѣдованіе, и составилъ себѣ планъ, который состоялъ въ томъ:

а) что я приготовилъ себѣ четыре цилиндрическихъ піезометра съ полусферическими основаніями изъ нѣмецкаго стекла со стѣнками различной толщины отъ 1.4 m.m. до 2.9 m.m.[1]);

---

[1]) Я считаю своимъ пріятнымъ долгомъ выразить здѣсь благодарность мастеру E. Kern'у, который приготовилъ мнѣ эти піезометры и вообще своимъ искусствомъ былъ мнѣ очень полезенъ.

b) что каждый піезометръ былъ изслѣдованъ по методѣ Regnault .

c) и одновременно—по методѣ Jamin'a;

d) что на основаніи данныхъ по наблюденіямъ b) и c) и уравненія полнаго упругаго расширенія піезометра я вычислялъ еще разъ коэффиціентъ абсолютной сжимаемости;

e) сопоставленіе окончательныхъ чиселъ коэффиціента абсолютной сжимаемости ртути, полученныхъ по упомянутымъ тремъ способамъ, должно было рѣшить вопросъ: которая изъ двухъ методъ вѣрная, и въ чемъ состоитъ ошибка той, которую нужно считать невѣрной.

3. Изслѣдованія Wild'a и Marek'a показали, что различные способы очистки ртути способны вліять на ея удѣльный вѣсъ и, быть-можетъ, на другія ея физическія свойства.

Wild [1]) высказывается за очистку ртути путемъ дистилляціи въ аппаратѣ Weinhold'a, наполненномъ угольной кислотой, разрѣженной до 10 m.m., а Marek [2]) рекомендуетъ точное опредѣленіе ея удѣльнаго вѣса и, если онъ окажется

$$d_0 = 13.5956 \text{ при } 0^0,$$

то считать данную ртуть абсолютно чистою.

Ртуть, которою я наполнилъ свои піезометры, была подвергнута слѣдующей очисткѣ:

a) промыта въ растворѣ азотной кислоты, въ водѣ, въ растворѣ ѣдкаго кали, обильно въ водѣ и просушена;

b) такая ртуть затѣмъ подвергалась въ теченіи сутокъ окисленію токомъ воздуха по способу Th. M. Crafts'a [3]), причемъ получилась еще значительная кора на ея поверхности;

---

[1]) Wild. Repertorium für Meteorologie. St.-Petersburg. Bd. III, 1874, p. 10—12, p. 42—50.

[2]) Marek. Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures. Paris, 1883, p. D. 58.

[3]) Th. M. Crafts. Beiblätter. Bd. 14, 1890, p. 1176.

и c) наконецъ, она была продистиллирована въ пустотѣ при столь низкой температурѣ, что было только обильное испаренie ея, но не кипѣнie [1]).

Опредѣливъ въ заключенie плотность этой ртути помощью пикнометра [2]) я нашелъ

$$d_0 = 13.5958 \text{ при } 0^0,$$

число весьма близкое къ числу вышеприведенному, которое Wild и Marek считаютъ истиннымъ.

Приведу здѣсь рядъ чиселъ, характеризующихъ плотность ртути при 0^0, согласно изслѣдованiямъ нижеслѣдующихъ лицъ:

Regnault [3])	$d=13.5959$
Kupffer [4])	$d=13.5988$
Wild [5])	$d=13.5956$
Volkmann [6])	$d=13.5953$
Sainte-Clair Deville [7])	$d=13.5976$
Marek [8])	$d=13.5956$

О хорошемъ качествѣ моей ртути можно было судить не только по ея удѣльному вѣсу, но также и по тому обстоятельству,

---

[1]) Очистки по послѣднимъ двумъ способамъ сдѣланы въ Лабораторiи Технической Химiи при любезномъ содѣйствiи ея лаборанта Е. В. Вернера, за что приношу ему здѣсь свою искреннюю благодарность.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de physique. T. II, fas. I, 1878, p. 140.

[3]) Regnault. Ann. de chimie et de physique, (2) t. 14, p. 236.

[4]) Kupffer. Ann. de chimie et de physique, (2) t. 40, p. 285.

[5]) Wild. H. Bericht über die Arbeiten zur Reform der Schweizerischen Urmaasse. Zürich, 1868, p. 139.

[6]) Volkmann. Wied. Annalen, Bd. XIII, 1881, p. 209.

[7]) H. Sainte-Clair Deville et E. Mascart. Sur la construction de la Règle géodésique internationale. Paris, 1879.

[8]) Marek, loc. cit., p. D. 58.

что во время наполненія піезометровъ я не замѣчалъ ни малѣйшаго прилипанія ея не только къ стѣнкамъ широкой части сосуда, но даже и капилляра, не смотря на весьма энергичное кипяченіе, продолжавшееся около часу.

4. Прежде чѣмъ наполнять піезометры ртутью, я промывалъ ихъ весьма тщательно слѣдующими жидкостями и въ слѣдующемъ порядкѣ: растворомъ ѣдкаго кали, дистиллированною водою, растворомъ амміака и обильно дистиллированною водою, послѣ чего просушивалъ ихъ токомъ сухаго воздуха помощью водяной помпы Bunsen'a. Чтобы удобно и безъ значительной потери времени выполнить эти манипуляціи, я получалъ піезометры отъ мастера не вполнѣ оконченными, именно незапаянными съ конца *a* (фиг. 2); онъ ихъ запаивалъ въ лабораторіи послѣ промывки и просушки, подъ моимъ надзоромъ, причемъ обращалось особое вниманіе на то, чтобы какъ нижнее донышко *a*, такъ и верхнее *b*—были-бы по возможности одинаковой толщины съ толщиною цилиндрической стѣнки каждаго піезометра.

Самое наполненіе ихъ ртутью совершалось слѣдующимъ образомъ: піезометръ въ формѣ *abcde* (фиг. 2) состоялъ изъ резервуара *ab*, длиннаго капилляра *bc* и расширенной камеры *cd*, которая оканчивалась трубкою *de* и соединялась съ ненарисованнымъ здѣсь воздушнымъ насосомъ Carré. Въ камеру *cd* вливалось такое количество ртути, чтобы ею могъ наполниться весь резервуаръ *ab*, и чтобы получился еще значительный остатокъ ея въ камерѣ; послѣ этого выкачивался воздухъ до 1 m.m. и начиналось подогрѣваніе всего прибора. Удобнѣе и безопаснѣе всего, какъ показалъ мнѣ опытъ, нагрѣваніе совершалось тогда, когда весь піезометръ *abcde* лежалъ въ наклонномъ положеніи на желѣзномъ полуцилиндрѣ *MN*, выстланномъ асбестовымъ картономъ и изолированномъ, кромѣ того, въ точкахъ *o*, *p*, *q* тремя асбестовыми кольцами.

Полуцилиндръ *MN* накрывался соотвѣтственною крышкою, а горѣлка Bunsen'a о четырехъ большихъ пламенахъ помѣща-

лась въ наиболѣе низкомъ концѣ его *M*. При этомъ образовывалось теченіе вверхъ *N* горячаго воздуха, температура котораго въ моихъ опытахъ доходила до 250° С.; минутъ черезъ 15—20 обыкновенно наступало кипѣніе во всей массѣ ртути —въ резервуарѣ *ab* и камерѣ *cd*—, и я давалъ ей кипѣть еще минутъ 10—15, послѣ чего тушилъ газъ и оставлялъ піезометръ медленно охлаждаться и наполняться ртутью. Однако, я убѣдился на первыхъ-же порахъ, что одного такого кипяченія недостаточно; при внимательномъ обслѣдованіи піезометра всегда въ резервуарѣ *ab* можно было замѣтить микроскопическій пузырекъ, вѣрнѣе точку, воздуха, который окончательно исчезалъ только послѣ повторительнаго кипяченія.

Когда піезометръ бывалъ окончательно наполненъ ртутью, камера *cd* срѣзывалась у точки *c*, а на ея мѣсто припаивался капилляръ, тщательно раздѣленный и градуированный. Эту операцію весьма искусно дѣлалъ мастеръ Кернъ при мнѣ, и она не могла оказать никакого дурнаго вліянія на мои измѣренія, потому что для совершенія ея, онъ понижалъ уровень ртути въ капиллярѣ *bc* всего на 2—3 cm. около точки спая *c*. Этотъ пріемъ слѣдуетъ даже рекомендовать, потому-что онъ даетъ возможность содержать градуированный капилляръ въ большой чистотѣ; и, благодаря ему, я срѣзывалъ градуированный капилляръ всякій разъ, когда онъ мнѣ казался недостаточно сухимъ.

5. Послѣ этого піезометръ вправлялся на обыкновенномъ хорошемъ сургучѣ въ металлическій патронъ *aabb* фиг. 3-й, какъ это уже описано мною раньше [1]), причемъ въ потаѣ патрона на сургучѣ замастиковывалось верхнее полусферическое основаніе *b* піезометра изъ-за необходимости предохранить его отъ излома, которому онъ неизбѣжно подверженъ при самомъ

---

[1]) Де-Метцъ. Опытное изслѣдованіе механическихъ свойствъ маселъ и коллоидовъ. Зап. Нов. Общ. Естеств., т. IX, 1889, стр. 139, § 47, а также G. De-Metz. Wied. Ann., Bd. 41, p. 665, §§ 6 и 7.

ничтожномъ толчкѣ, если онъ укрѣпленъ только на капиллярѣ. Чтобы не повторяться здѣсь, я упомяну вкратцѣ только о тѣхъ инструментахъ, которыми я пользовался при исполненіи этой работы.

a) Давленіе до 9.3 атмосферъ производилось насосомъ Cailletet, см. loc. cit. § 45.

b) Оно измѣрялось воздушнымъ манометромъ съ помощью сифоннаго ртутнаго, см. §§ 49—52; въ маншонъ воздушнаго манометра была налита вода для сохраненія постоянной температуры.

c) Температура ванны,—въ которую былъ погруженъ піезометръ, вправленный въ стальной цилиндръ BB (фиг. 3),—измѣрялась термометромъ Alvergniat, раздѣленнымъ до 0.02° C.; температура-же маншона — простымъ термометромъ, раздѣленнымъ на цѣлые градусы; нѣсколько измѣреній было произведено при температурѣ тающаго льда.

d) Градуированный капилляръ C піезометра заключалъ въ одномъ дѣленіи своемъ 0.26386 m.m.³, т. е.

$$\beta = 0.26386 \text{ m.m.}^3 \pm 0.00028 \text{ m.m.}^3,$$

причемъ разстояніе между послѣдовательными штрихами его было равно 1.5 m.m., такъ что оцѣнка глазомъ 0.1 дѣленія была выполняема безъ особыхъ затрудненій. Эта трубка припаивалась послѣдовательно ко всѣмъ піезометрамъ, потому-что она отличалась особою правильностью цилиндрической формы на всемъ своемъ протяженіи.

e) Градуированный капилляръ γ поправочной трубки былъ менѣе чувствителенъ, именно

$$\beta_1 = 1.0038 \text{ m.m.}^3 \pm 0.0001 \text{ m.m.}^3.$$

Сначала я приготовилъ поправочную трубку той-же чувствительности, какъ и при піезометрѣ, но пользованіе ею оказалось невозможнымъ вслѣдствіе того, что движеніе водяной

колонки шло толчками и неправильно; я думалъ устранить это препятствіе замѣною воды ртутью, но это ни къ чему не привело. Должно полагать, что замѣченное явленіе обусловливается значительнымъ поверхностнымъ натяженіемъ, хотя въ капиллярѣ C оно не обращаетъ на себя вниманія; вѣроятно, оно ослабляется разностью тѣхъ давленій, подъ дѣйствіемъ которыхъ находится менискъ въ піезометрѣ, между тѣмъ какъ въ поправочной трубкѣ разность давленій ничтожна. Вотъ почему мнѣ пришлось замѣнить узкую трубку болѣе широкою, около 0.41 m.m. въ радіусѣ; при такой ширинѣ описаннаго явленія уже не наблюдалось, и ходъ водяной колонки былъ совершенно правиленъ. Кромѣ того, я долженъ упомянуть, что въ теченіи всего нынѣшняго изслѣдованія поправочная трубка стояла горизонтально, а не вертикально, какъ въ моихъ предъидущихъ опытахъ.

Интересно сопоставить чувствительность моихъ измѣреній съ чувствительностью измѣреній моихъ предшественниковъ, причемъ подъ этимъ терминомъ я буду понимать отношеніе одного дѣленія капилляра къ полному внутреннему объему:

Regnault [1])	0.000009390
Grassi [2])	0.000011221
Dupré und Page [3])	0.000004620
Amagat [4])	0.000932500
Amagat [4])	0.000176200
Drecker [5])	0.000006400
Drecker [6])	0.000006100

---

[1]) Regnault. Mémoires de l'Institut. Loc. cit., p. 425.

[2]) Grassi. Loc. cit., p. 445; піезометръ A.

[3]) Dupré und Page. Pogg. Ann., Erg. Bd. V, 1871, p. 237.

[4]) Amagat. Annales de chim. et de phys. (5) t. 11, 1877, p. 529.

[5]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 20, 1883, p. 879.

[6]) Drecker. Wied. Ann., Bd. 34, 1888, p. 954.

De-Metz, I	0.00000457
De-Metz, II	0.00000601
De-Metz, III............	0.00000597
De-Metz, IV............	0.00000797

Изъ этихъ чиселъ видно, что мои піезометры принадлежали къ числу болѣе чувствительныхъ, въ особенности если принять во вниманіе, что каждое мое дѣленіе имѣло 1.5 m.m. длины, и что, слѣдовательно, оцѣнка десятой доли была очень надежна.

f) Между насосомъ Cailletet и приборомъ нужно было установить такія соединенія, чтобы можно было оперировать по способу Regnault и по способу Jamin'a.

Переходя отъ Jamin'a къ Regnault, я замѣнялъ поправочную трубку γ (фиг. 3) мѣдною, которая однимъ концомъ привинчивалась къ винту G цилиндра BB, а другимъ къ соотвѣтственному мѣсту насоса. При этомъ условіи давленіе насоса передавалось черезъ отверстіе f внутрь піезометра, а черезъ отверстіе G внѣшней его поверхности, и наблюдалась кажущаяся сжимаемость жидкости по пониженію уровня $0''$. Чтобы измѣрить кубическую сжимаемость стекла, характеризуемую по методѣ Regnault перемѣщеніемъ уровня $0'$, соединеніе между отверстіемъ f и насосомъ уничтожалось, вслѣдствіе чего внутри піезометра оставалось только барометрическое давленіе, давленіе-же насоса передавалось внѣшней его поверхности. Наконецъ, вмѣсто того чтобы измѣрять отдѣльно перемѣщеніе уровня 0 подъ вліяніемъ одного внутренняго давленія, я продѣлывалъ полный опытъ по Jamin'y, изъ котораго узнавалъ не только 0, но и γ—перемѣщеніе жидкости въ поправочной трубкѣ; для этого металлическое соединеніе между винтомъ G и насосомъ удалялось, а между винтомъ f и насосомъ возстанавливалось; поправочная трубка ставилась на свое мѣсто G, а свободное отверстіе металлической трубки запиралось мѣдною пробкою. Всѣ эти

манипуляціи совершались легко и быстро, благодаря хорошему устройству всѣхъ соединеній; въ нихъ не было ни одного крана, и они всѣ состояли только изъ винтовъ, гаекъ и металлическихъ пробокъ. Давленіе держалось очень хорошо въ теченіи времени необходимаго для измѣренія.

Такъ какъ при измѣреніи сжимаемости жидкостей по способу Regnault, основанному на теоретическихъ формулахъ Lamé, нужны размѣры піезометровъ, то я занялся тщательнымъ опредѣленіемъ ихъ постоянныхъ. Однимъ изъ болѣе тонкихъ измѣреній слѣдуетъ считать опредѣленіе радіусовъ R_1 и R_0—внѣшняго и внутренняго—цилиндрической части піезометровъ. Съ цѣлью достигнуть желаемой точности, я запасся отрѣзками отъ обоихъ концовъ каждой трубы, послужившей впослѣдствіи для приготовленія піезометра, и приготовилъ изъ нихъ кольца, которыя затѣмъ изслѣдовалъ по четыремъ діаметрамъ, черезъ каждые 45^0; вслѣдствіе этого для радіусовъ R_1 и R_0 каждаго кольца получалось по 16 промѣровъ, а въ каждомъ піезометрѣ R_1 и R_0 окончательно опредѣлялись изъ 32 измѣреній, которыя производились на горизонтальномъ компараторѣ съ ноніусомъ, раздѣленнымъ до 0.02 m.m. Въ слѣдующей таблицѣ приведены размѣры R_1 и R_0 всѣхъ четырехъ піезометровъ.

Таблица IX постоянныхъ R_1 и R_0 піезометровъ.

№№ и родъ стекла.	R_1	R_0	e
	m.m.	m.m.	m.m.
I { Greiner & C[ie] in Stützerbach	10.221	8.808	1.413
II { bei Ilmenan in Thüringen.	9.316	7.254	2.062
III { E. Gundelach, Gehlberg.	10.156	7.722	2.434
IV { bei Elgersburg in Thüringen. . .	9.288	6.413	2.875

Кромѣ этой таблицы, въ которой представлены лишь среднія, интересно привести числа, которыя показали-бы, насколько радіусы R_1 и R_0 постоянны вдоль цилиндрической

части піезометра. Назовемъ черезъ a и b верхній и нижній концы піезометрической трубы и составимъ слѣдующую таблицу:

Таблица X. Измѣненія радіусовъ R_1 и R_0 по оси трубы.

№№	R_1a	R_1b	ΔR_1	R_0a	R_0b	ΔR_0
	m.m.	m.m.	m.m.	m.m.	m.m.	m.m.
I	10.221	10.275	−0.054	8.808	8.820	−0.012
II	9.235	9.397	−0.162	7.177	7.330	−0.153
III	10.017	10.295	−0.278	7.615	7.830	−0.215
IV	9.431	9.145	0.286	6.452	6.372	0.080

Эта таблица имѣетъ весьма важное значеніе въ оцѣнкѣ результатовъ дальнѣйшихъ измѣреній, потому-что колонны 3-я и 6-я показываютъ 1), что отступленіе отъ строго цилиндрической формы иногда достигаетъ 2.8% и 2), что толщина самихъ стѣнокъ не всегда одинакова; піезометры № I, № II, № III даютъ разности между колоннами 3-ей и 6-ой, какъ видно изъ приводимыхъ чиселъ, сравнительно малыя, около

Таблица XI. Измѣненіе толщины стѣнокъ e по оси трубы.

№№	ΔR_1	ΔR_0	$\Delta R_1 - \Delta R_0$	e
	m.m.	m.m.	m.m.	m.m.
I	0.054	0.012	0.042	1.413
II	0.162	0.153	0.009	2.062
III	0.278	0.215	0.063	2.434
IV	0.286	0.080	0.206	2.875

2%, худшій результатъ, около 7%, представляетъ только піезометръ № IV. Съ этими отступленіями придется считаться

впослѣдствіи, такъ какъ теорія упругости предполагаетъ R_1 и R_0 и e постоянными по всей длинѣ.

7. Кромѣ только что упомянутыхъ величинъ, мы должны еще сдѣлать опредѣленія объемовъ $U_0 = \pi R_0^2 H$ цилиндрической части піезометра, $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$ шаровой его части и $W_0 = U_0 + V_0$ его полнаго внутренняго объема.

Объемъ W_0 находился изъ взвѣшиванія пустаго и наполненнаго ртутью піезометра, а объемы U_0 и V_0 изъ вычисленія по размѣрамъ. Слѣдующая таблица покажетъ, въ какой степени сходятся между собою наблюденный объемъ W_0 и вычисленный $U_0 + V_0$.

Таблица XII. Объемы U_0, V_0 и W_0 піезометровъ.

№№	H	U_0	V_0	$U_0 + V_0$ выч.	W_0 наб.	Δ
	m.m.	m.m.³	m.m.³	m.m.³	m.m.³	m.m.³
I	228	55544	2861	58405	57756	+649
II	256	42295	1598	43893	43905	— 12
III	227	42508	1928	44436	44219	+217
IV	249.5	32221	1104	33325	33091	+234

Сопоставленіе 4-й и 5-й колоннъ показываетъ, что разности колеблются отъ 0.03% до 1.10%; подобныя колебанія можно считать благопріятными, потому что въ опытахъ Grassi [1]) эта разность достигаетъ иногда 5.7% (піезометръ B), вообще-же колеблется около 0.7%.

Происхожденіе ея легко объяснить, если вспомнить несовершенство цилиндрической формы стеклянныхъ трубъ и невоз-

---

[1]) Grassi. Loc. cit., p. 445—446.

можность сдѣлать полусферическія основанія съ радіусами какъ разъ равными R_0 и R_1.

8. Приведенныхъ данныхъ R_1, R_0, U_0, V_0, W_0 совершенно достаточно, чтобы, присоединивъ къ нимъ наблюденныя измѣненія объемовъ θ', θ'', θ и γ, рѣшить уравненія Lamé относительно абсолютной сжимаемости жидкости χ_v и кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра k.

Хотя указанныя мною значенія постоянной Poisson'а [1]) для стекла позволяютъ пользоваться упрощенными формулами Lamé, тѣмъ не менѣе однако, я предпочитаю вывести ихъ въ общемъ видѣ независимо отъ предположенія, что $\sigma = 0.25$. Съ этою цѣлью мы обратимся къ теоріи упругости Lamé [2]), у котораго находимъ необходимыя для этого случая уравненія. Мы займемся сначала розысканіемъ уравненій, выражающихъ перемѣщенія частицы цилиндрической оболочки, и предположимъ, что наша оболочка оканчивается плоскими донышками, что на нее дѣйствуютъ внутреннее и внѣшнее давленіе P_0 и P_1, и что высота ея H настолько значительна, что вліяніемъ донышекъ можно пренебречь.

Назовемъ черезъ ρ перемѣщеніе частицы, лежащей въ плоскости перпендикулярной къ оси цилиндра и отстоящей на разстояніи r отъ этой оси по направленію радіуса; Lamé доказываетъ, что перемѣщеніе ρ выразится уравненіемъ:

$$\rho = ar + \frac{b}{r}, \tag{1}$$

въ которомъ a и b суть двѣ постоянныя. Кромѣ этого перемѣщенія, возможно еще перемѣщеніе ξ по оси цилиндра H, которое опредѣляется уравненіемъ:

$$\xi = cH, \tag{2}$$

причемъ c есть также постоянная.

---

[1]) См. таблицу V, стр. 62 и 63.

[2]) Lamé. Leçons sur l'élasticité des corps solides. Loc. cit., p. 189.

Если внутренній радіусъ будетъ R_0, внѣшній R_1, внутреннее давленіе P_0, внѣшнее P_1, то въ такомъ случаѣ постоянныя a, b и c связываются съ постоянными Lamé λ и μ слѣдующими уравненіями:

$$a = c = \frac{1}{3\lambda+2\mu}\,\frac{R_0^2P - R_1^2P_1}{R_1^2 - R_0^2}, \tag{3}$$

$$b = \frac{1}{2\mu}\,\frac{R_0^2R_1^2(P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2}, \tag{4}$$

такъ что по подстановкѣ ихъ значеній въ ур. (1) и ур. (2) оба перемѣщенія ρ и ξ представятся въ формѣ:

$$\rho = \frac{1}{3\lambda+2\mu}\,\frac{R_0^2P_0 - R_1^2P_1}{R_1^2 - R_0^2}\,r + \frac{1}{2\mu}\,\frac{R_0^2R_1^2(P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2}\,\frac{1}{r} \tag{5}$$

и

$$\xi = \frac{1}{3\lambda+2\mu}\,\frac{R_0^2P_0 - R_1^2P_1}{R_1^2 - R_0^2}\cdot H. \tag{6}$$

При помощи этихъ выраженій легко опредѣлить измѣненія цилиндрическаго объема $U_0 = \pi R_0^2 H$, если замѣтимъ, что подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ радіусъ R_0 обращается въ $R_0 + \rho$, а высота H въ $H + \xi$; тогда новый объемъ будетъ:

$$U_0 + \Delta U_0 = \pi(R_0 + \rho)^2(H + \xi), \tag{7}$$

а приращеніе объема, пренебрегая безконечно малыми перемѣщеніями втораго порядка,

$$\Delta U_0 = 2\pi R_0 H\rho + \pi R_0^2\xi \tag{8}$$

и приращеніе единицы объема:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{2\rho}{R_0} + \frac{\xi}{H}. \tag{9}$$

Чтобы найти окончательный видъ этого уравненія, намъ нужно обратиться къ уравненію (5), положивъ въ немъ $r = R_0$, и къ ур. (6), тогда:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} + \frac{1}{\mu} \frac{R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2} \cdot \quad (10)$$

Опредѣлимъ теперь измѣненіе объема въ тѣхъ частныхъ случаяхъ, которые встрѣчаются при изученіи сжимаемости жидкостей въ цилиндрическихъ піезометрахъ, и обозначимъ для простоты:

$$M = \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2}; \quad M + 1 = \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2}.$$

a) Пусть $P_1 = 0$, тогда:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \left\{ \frac{3M}{3\lambda + 2\mu} + \frac{M+1}{\mu} \right\}, \quad (11)$$

или:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\}, \quad (12)$$

или:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 k \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\} \cdot \quad (13)$$

b) Пусть $P_0 = 0$, тогда:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \left\{ \frac{3(M+1)}{3\lambda + 2\mu} + \frac{(M+1)}{\mu} \right\}, \quad (14)$$

или:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{P_1 (M+1)(5\mu + 3\lambda)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad (15)$$

или:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = -kP_1 \frac{(M+1)(5\mu+3\lambda)}{3\mu}. \qquad (16)$$

c) Пусть $P_1 = P_0 = P$, тогда:

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3}{3\lambda+2\mu} \cdot P = -kP. \qquad (17)$$

Изъ ур. (13) и ур. (16) легко получить подлинныя формулы Lamé[1]), положивъ, какъ уже неоднократно было упомянуто, $\lambda = \mu$, именно:

$$a) \quad P_1 = 0; \qquad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{(8M+5)}{3} kP_0, \qquad (13')$$

$$b) \quad P_0 = 0; \qquad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{8(M+1)}{3} kP_1, \qquad (16')$$

$$c) \quad P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3}{5\mu} P = -kP. \qquad (17')$$

9. Выведемъ еще подобныя-же выраженія для піезометра съ шарообразной оболочкою, такъ какъ наши піезометры оканчивались полусферами.

Обращаясь къ Lamé[2]), находимъ, что въ данномъ случаѣ перемѣщеніе ρ молекулы, отстоящей на разстояніи r отъ центра, вдоль радіуса, будетъ:

$$\rho = ar + \frac{b}{r^2}, \qquad (18)$$

причемъ постоянныя a и b связываются съ постоянными λ и μ слѣдующими двумя уравненіями при условіи, что K_0 есть вну-

---

[1]) Regnault. Loc. cit. p. 440.

[2]) Lamé. Loc cit., p. 212 etc.

тренній радіусъ, R_1—внѣшній, P_0—внутренне давленіе, P_1—внѣшнее:

$$a = \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)}, \tag{19}$$

$$b = \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu (R_1^3 - R_0^3)}. \tag{20}$$

Подставивъ въ ур. (18) вмѣсто a и b равныя имъ величины, находимъ, что перемѣщеніе:

$$\rho = \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)} r + \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu (R_1^3 - R_0^3)} \frac{1}{r^2}. \tag{21}$$

Отсюда легко вычислить измѣненіе шароваго объема $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, помня, что радіусъ R_0 подъ вліяніемъ внѣшнихъ силъ превращается въ $R_0 + \rho$. Новый объемъ будетъ:

$$V_0 + \Delta V_0 = \frac{4}{3}\pi (R_0 + \rho)^3, \tag{22}$$

и пренебрегая безконечно малыми 2-й и 3-й степеней, приращеніе объема—

$$\Delta V_0 = 4\pi R_0^2 \rho, \tag{23}$$

а приращеніе единицы объема—

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3\rho}{R_0}. \tag{24}$$

Такимъ образомъ, отсюда найдемъ величину $\frac{\Delta V_0}{V_0}$, если положимъ въ ур. (21) $r = R_0$, именно:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3(R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1)}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)} + \frac{3}{4\mu} \frac{R_1^3 (P_0 - P_1)}{(R_1^3 - R_0^3)}. \tag{25}$$

Примѣнимъ это уравненіе къ случаямъ подобнымъ тѣмъ, которые уже были разобраны подъ литерами a), b) и c) предъидущаго параграфа, причемъ для краткости опять положимъ:

$$N=\frac{R_0^3}{R_1^3-R_0^3},\text{ а } N+1=\frac{R_1^3}{R_1^3-R_0^3}.$$

Тогда:

$$a)\qquad P_1=0;\quad \frac{\Delta V_0}{V_0}=\frac{3NP_0}{3\lambda+2\mu}+\frac{3(N+1)P_0}{4\mu}, \tag{26}$$

или:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0}=3P_0\left\{\frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}\right\}, \tag{27}$$

или:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0}=kP_0\left\{\frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu}\right\}. \tag{27'}$$

$$b)\ P_0=0;\quad \frac{\Delta V_0}{V_0}=-3P_1(N+1)\left\{\frac{1}{3\lambda+2\mu}+\frac{1}{4\mu}\right\}, \tag{28}$$

или:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0}=-\frac{3P_1(N+1)(6\mu+3\lambda)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}, \tag{29}$$

или:

$$\frac{\Delta V_0}{V_0}=-\frac{kP_1(N+1)(6\mu+3\lambda)}{4\mu}. \tag{29'}$$

$$c)\qquad P_1=P_0=P;\quad \frac{\Delta V_0}{V_0}=-\frac{3}{3\lambda+2\mu}=-kP. \tag{30}$$

Изъ уравненій (27′), (29′) и (30) легко получить под-

линныя формулы Lamé [1]) для шара, если положить $\lambda=\mu$, именно:

$$a)\qquad P_1=0;\qquad \frac{\Delta V_0}{V_0}=\frac{9N+5}{4}kP_0; \qquad (27'')$$

$$b)\qquad P_0=0;\qquad \frac{\Delta V_0}{V_0}=-\frac{9(N+1)}{4}kP_1; \qquad (29'')$$

$$c)\qquad P_1=P_0=P;\qquad \frac{\Delta V_0}{V_0}=-\frac{3P}{5\mu}=-kP. \qquad (30')$$

10. На основании уравненій, изложенныхъ въ двухъ предъидущихъ параграфахъ и опредѣляющихъ измѣненіе емкости піезометровъ цилиндрической и сферической формъ, можно перейти къ опредѣленію измѣненія емкости піезометровъ, имѣющихъ форму цилиндровъ съ полусферическими основаніями, но для этого необходимо сдѣлать допущеніе, что въ послѣднемъ случаѣ измѣненіе объема:

$$\Delta W_0=\Delta U_0+\Delta V_0;$$

въ такомъ случаѣ для нашихъ піезометровъ получимъ слѣдующую таблицу формулъ:

$$a)\quad P_1=0;\quad \Delta W_0=P_0U_0\left\{\frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\right\}+ \\ +3P_0V_0\left\{\frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}\right\}; \qquad (31)$$

или:

$$\Delta W_0=P_0kU_0\left\{\frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{3\mu}\right\}+ \\ +P_0kV_0\left\{\frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu}\right\}. \qquad (I)$$

---

[1]) Regnault. Loc. cit., p. 439.

$$b)\quad P_0=0;\qquad \Delta W_0=-\left\{P_1U_0\frac{(M+1)(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)}+\right.$$

$$\left.+3P_1V_0\frac{(N+1)(6\mu+3\lambda)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}\right\}, \tag{32}$$

или:

$$\Delta W_0=-\left\{P_1kU_0\frac{(M+1)(5\mu+3\lambda)}{3\mu}+\right.$$

$$\left.+P_1kV_0\frac{(N+1)(6\mu+3\lambda)}{4\mu}\right\}. \tag{II}$$

$$c)\quad P_1=P_0=P;\ \Delta W_0=-\frac{3P}{3\lambda+2\mu}(U_0+V_0)=-kPW_0. \tag{III}$$

Изъ формулъ (I), (II), (III) получаются подлинныя формулы Lamé [1]) при допущеніи $\lambda=\mu$, именно:

$$a)\ P_1=0;\qquad \Delta W_0=\left\{\frac{8M+5}{3}\cdot U_0+\frac{9N+5}{4}\cdot V_0\right\}kP_0. \tag{I'}$$

$$b)\ P_0=0;\ \Delta W_0=-\left\{\frac{8(M+1)}{3}U_0+\frac{9(N+1)}{4}V_0\right\}kP_1. \tag{II'}$$

$$c)\ P_1=P_0=P;\qquad \Delta W_0=-kPW_0. \tag{III'}$$

На основаніи послѣдней таблицы легко составить себѣ ясное понятіе о процессѣ сжимаемости жидкостей при различныхъ условіяхъ опыта. Предположимъ, что піезометръ подверженъ одновременно, какъ это и есть дѣйствительно въ методѣ Regnault, внутреннему и внѣшнему давленіямъ, т. е., что $P_1=P_0=P$, тогда мы наблюдаемъ пониженіе уровня θ'' въ піезометрѣ, которое, согласно ур. (III), должно состоять не только

---

[1]) Regnault. Loc. cit., p. 442.

изъ пониженія на сжимаемость жидкости, но и повышенія на сжимаемость стѣнокъ; назвавъ поэтому черезъ χ_a коэффиціентъ кажущейся сжимаемости (при $P_1 = P_0 = P$), а черезъ χ_v — коэффиціентъ истинной, находимъ, что:

$$\chi_v = \chi_a + k. \tag{IV}$$

Опредѣленіе коэффиціента кубической сжимаемости k, совершается помощью ур. (II) или ур. (II') и по перемѣщенію уровня θ' въ піезометрѣ, обусловленному однимъ внѣшнимъ давленіемъ P_1, такъ какъ ур. (II):

$$kP_1 = \frac{\theta'}{\frac{(5\mu + 3\lambda)(M+1)}{3\mu} \cdot U_0 + \frac{(6\mu + 3\lambda)(N+1)}{4\mu} \cdot V_0} . \tag{V}$$

Намъ важно установить еще соотношеніе между наблюденными перемѣщеніями уровня θ', θ'' и пониженіемъ уровня θ при $P_1 = 0$. Очевидно, что перемѣщеніе θ заключаетъ въ себѣ не только пониженіе на истинную сжимаемость жидкости: $\theta'' + kP_0 W_0 = \theta'' + kP_0(U_0 + V_0)$, но сверхъ того и упругое расширеніе сосуда, опредѣляемое ур. (I), т. е.:

$$\theta = \theta'' + kP_0U_0 + kP_0V_0 + kP_0U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\} +$$
$$+ kP_0V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\},$$

или:

$$\theta = \theta'' + kP_0U_0 \left\{ \frac{(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} \right\} + kP_0V_0 \left\{ \frac{(N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} \right\},$$

а такъ какъ при условіи $P_1 = P_0$ два послѣдніе члена лѣвой части эквивалентны перемѣщенію θ' (ур. V), то

$$\theta = \theta'' + \theta'. \tag{VI}$$

Этому соотношенію Regnault далъ названіе условнаго уравненія и помощью его провѣрялъ точность своихъ измѣреній.

12. Легко замѣтить, однако, что вмѣсто провѣрки точности наблюденій по ур. (VI) лучше воспользоваться наблюденіемъ величины θ какъ самостоятельнымъ, съ цѣлью вычислить изъ него коэффиціентъ абсолютной сжимаемости; въ такомъ случаѣ простое сравненіе перемѣщеній θ и $\theta'+\theta''$ замѣняется сравненіемъ коэффиціентовъ абсолютной сжимаемости, что несравненно нагляднѣе. Посмотримъ, какъ это можно сдѣлать. Обозначимъ черезъ θ пониженіе жидкости въ капиллярѣ піезометра подъ вліяніемъ внутренняго давленія P_0, черезъ Θ_0 упругое расширеніе піезометра подъ вліяніемъ того-же давленія, а черезъ $W_0=U_0+V_0$ внутренній объемъ цилиндрическаго піезометра съ полусферическими основаніями; тогда, очевидно, коэффиціентъ абсолютной сжимаемости можно выразить уравненіемъ:

$$\chi_v=\frac{\theta-\Theta_0}{P_0W_0}, \qquad \text{(VII)}$$

въ которомъ всѣ члены правой стороны могутъ быть опредѣлены, потому что P_0 и W_0 даются изъ опыта; а Θ_0 вычисляется изъ ур. (I) или изъ ур. (I′), именно:

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= kP_0U_0\left\{\frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{3\mu}\right\}+\\ &+kP_0V_0\left\{\frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu}\right\},\end{aligned} \qquad \text{(VIII)}$$

или при $\lambda=\mu$:

$$\Theta_0=kP_0\left\{\frac{8M+5}{3}U_0+\frac{9N+5}{4}V_0\right\}. \qquad \text{(VIII′)}$$

Это вычисленіе требуетъ, однако, чтобы коэффиціентъ кубической сжимаемости стѣнокъ k былъ заранѣе извѣстенъ; если же этого нѣтъ въ дѣйствительности, то нужно прибѣгнуть къ извѣстному опыту Regnault. Такимъ образомъ, на условномъ уравненіи можно основать самостоятельную методу измѣренія коэффиціента абсолютной сжимаемости жидкостей, причемъ для полнаго вычисленія его необходимо:

a) подвергнуть піезометръ и заключенную въ немъ жидкость одному внутреннему давленію P_0 и измѣрить пониженіе уровня θ въ капиллярѣ;

b) подвергнуть піезометръ одному внѣшнему давленію и измѣрить повышеніе уровня θ' въ томъ-же капиллярѣ. Тогда при помощи ур. (VII) и ур. (VIII) получимъ коэффиціентъ χ_r.

Во многихъ случаяхъ употребленіе предлагаемой методы можетъ оказаться весьма полезнымъ, потому что въ ней коэффиціентъ χ_r опредѣляется изъ суммы перемѣщеній $\theta = \theta' + \theta''$, а не изъ разности $\theta'' = \theta - \theta'$, какъ у Regnault. Этимъ свойствомъ слѣдуетъ пользоваться:

1) при изученіи малосжимаемыхъ тѣлъ;

2) при изученіи зависимости между сжимаемостью тѣлъ и температурою.

При изслѣдованіи поставленнаго мною вопроса я воспользовался этою методою и получилъ рядъ чиселъ, которыя болѣе характеризуютъ точность измѣреній, чѣмъ условное уравненіе Regnault.

13. Наконецъ, мнѣ остается дать теоретическое развитіе экспериментальной методѣ Jamin'а. Мы уже знаемъ (см. § 12, гл. I-й), что Jamin называетъ коэффиціентомъ абсолютной сжимаемости разность $\theta - \gamma$, отнесенную къ единицѣ объема и единицѣ давленія, т. е.:

$$\chi_r = \frac{\theta - \gamma}{P_0 W_0}. \qquad \text{(IX)}$$

Эта формула была-бы тождественна съ ур. (VII), если-бы показаніе поправочной трубы γ было эквивалентно упругому расширенію Θ_0, другими словами метода Jamin'а была-бы согласна съ теоріей упругости, если-бы выполнялось условіе:

$$\gamma = \Theta_0\,; \tag{X}$$

всякое-же отступленіе отъ этого равенства будетъ говорить не въ пользу методы Jamin'а. Теоретическое выраженіе упругаго расширенія Θ_0 намъ извѣстно изъ ур. (VIII), а потому займемся выводомъ подобнаго-же выраженія для γ и затѣмъ сравнимъ ихъ. Очевидно, что измѣненіе объема жидкости γ, показываемое поправочною трубкою, есть ничто иное, какъ разность между начальнымъ внѣшнимъ объемомъ W_1, когда внутри піезометра нѣтъ давленія, т. е. $P_0 = 0$, и конечнымъ $W_1 + \Delta W_1$, когда P_0 есть нѣкоторая величина.

Вычислимъ приращеніе объема ΔW_1 по частямъ: отдѣльно для цилиндрической части піезометра ΔU_1 и отдѣльно для сферической ΔV_1, предполагая, что

$$\Delta W_1 = \Delta U_1 + \Delta V_1. \tag{33}$$

Для вычисленія величины ΔU_1 намъ нужно возвратиться къ ур. (5) и ур. (6) и положить въ ур. (5) $r = R_1$; тогда, согласно ур. (9),

$$\frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{2\rho}{R_1} + \frac{\xi}{H}, \tag{34}$$

или послѣ замѣны ρ и ξ соотвѣтственными величинами

$$\frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}\,\frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2} + \frac{1}{\mu}\,\frac{R_0^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2}. \tag{35}$$

Это общее уравненіе можетъ быть упрощено, такъ какъ

опытъ происходитъ только при одномъ внутреннемъ давленіи P_0; слѣдовательно, $P_1=0$, и тогда

$$\frac{\Delta U_1}{U_1}=\left\{\frac{3}{3\lambda+2\mu}+\frac{1}{\mu}\right\}MP_0, \tag{36}$$

или окончательно

$$\Delta U_1=\frac{MP_0U_1(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)}=\frac{MP_0U_1k(5\mu+3\lambda)}{3\mu}, \tag{37}$$

а при допущеніи $\lambda=\mu$

$$\Delta U_1=\frac{8MP_0U_1k}{3}. \tag{37'}$$

Чтобы вычислить ΔV_1 возвратимся къ ур. (21) и положимъ въ немъ $r=R_1$; тогда согласно ур. (24)

$$\frac{\Delta V_1}{V_1}=\frac{3\rho}{R_1}=\frac{3(R_0^3P_0-R_1^3P_1)}{(3\lambda+2\mu)(R_1^3-R_0^3)}+\frac{3}{4\mu}\frac{R_0^3(P_0-P_1)}{(R_1^3-R_0^3)}, \tag{38}$$

но такъ какъ въ данномъ случаѣ опять $P_1=0$, то

$$\frac{\Delta V_1}{V_1}=\left\{\frac{3}{3\lambda+2\mu}+\frac{3}{4\mu}\right\}NP_0, \tag{39}$$

или окончательно

$$\Delta V_1=\frac{3NP_0V_1(6\mu+3\lambda)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}=\frac{NP_0V_1k(6\mu+3\lambda)}{4\mu}, \tag{40}$$

а при допущеніи $\lambda=\mu$

$$\Delta V_1=\frac{9NP_0V_1k}{4}. \tag{40'}$$

Теперь составимъ полное выраженіе

$$\gamma=\Delta W_1=\Delta U_1+\Delta V_1 \tag{41}$$

и на основаніи ур. (37) и (40), получимъ

$$\gamma = P_0\, k \left\{ \frac{(5\mu+3\lambda)}{3\mu} MU_1 + \frac{(6\mu+3\lambda)}{4\mu} NV_1 \right\}. \quad (42)$$

Сравнимъ послѣднее уравненіе съ уравненіемъ (VIII)

$$\Theta_0 = P_0\, k \left\{ \frac{M(5\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{3\mu} U_0 + \right.$$
$$\left. + \frac{N(6\mu+3\lambda)+(3\lambda+2\mu)}{4\mu} V_0 \right\} \quad (43)$$

и возьмемъ разность

$$\gamma - \Theta_0 = P_0\, k \left[\frac{(U_1-U_0)M(5\mu+3\lambda)}{3\mu} + \frac{(V_1-V_0)N(6\mu+3\lambda)}{4\mu} - \right.$$
$$\left. - (3\lambda+2\mu) \left\{ \frac{U_0}{3\mu} + \frac{V_0}{4\mu} \right\} \right], \quad (44)$$

но такъ какъ

$$(U_1-U_0)M = U_0, \text{ а } (V_1-V_0)N = V_0, \quad (45)$$

то

$$\gamma - \Theta_0 = P_0\, k \left\{ \frac{U_0(5\mu+3\lambda)}{3\mu} + \frac{V_0(6\mu+3\lambda)}{4\mu} - \right.$$
$$\left. - \frac{(3\lambda+2\mu)}{3\mu} U_0 - \frac{(3\lambda+2\mu)}{4\mu} V_0 \right\}, \quad (46)$$

или

$$\gamma - \Theta_0 = P_0 k \left\{ \frac{U_0}{3\mu}(5\mu+3\lambda-3\lambda-2\mu) + \frac{V_0}{4\mu}(6\mu+3\lambda-3\lambda-2\mu) \right\}, \quad (47)$$

откуда окончательно

$$\gamma - \Theta_0 = P_0 k (U_0 + V_0) = P_0 k W_0. \quad (48)$$

Если отнесемъ γ и Θ_0 къ единицѣ объема и давленія, то получимъ

$$\frac{\gamma-\Theta_0}{P_0W_0}=k; \qquad (49)$$

такимъ образомъ мы видимъ, что γ не равно Θ_0, а слѣдовательно, предположеніе Jamin'a, что поправочная трубка точно измѣряетъ упругое расширеніе піезометра, не оправдывается теоріею упругости. Возвращаясь къ ур. (VII), мы должны сообразно только-что полученному результату написать соотношеніе

$$\chi_v=\frac{\theta-\Theta_0}{P_0W_0}=\frac{\theta-\gamma}{P_0W_0}+k, \qquad \text{(VII)}$$

которое показываетъ, что къ результату, полученному по способу Jamin'a, нужно придавать коэффиціентъ кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра. Эта поправка впервые была предложена Guillaume'омъ [1]), хотя въ нѣсколько иной формѣ.

14. Уравненіе (VII) приводитъ къ заключенію, что

$$\frac{\theta-\gamma}{P_0W_0}=\frac{\theta''}{P_0W_0}=\frac{\theta-\theta'}{P_0W_0}=\chi_a \qquad (50)$$

и что

$$\gamma=\theta'. \qquad (51)$$

Такимъ образомъ, метода Jamin'a становится вполнѣ понятною: она эквивалентна первой фазѣ методы Regnault, когда піезометръ подверженъ одновременно внутреннему и внѣшнему сжатію, а потому даетъ не абсолютную сжимаемость χ_v, а только кажущуюся χ_a. Вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно, что кубическая сжимаемость стѣнокъ піезометра можетъ быть опредѣлена не только по способу Regnault при одномъ внѣшнемъ давленіи на стѣнки піезометра, но также и изъ показаній γ

---

[1]) Guillaume. Comptes rendus, t. 103, 1886, p. 1183 и Archives des sciences physiques et naturelles. (2) t. 17, 1887, p. 155 и p. 177.

поправочной трубки. Равенство (51) можетъ быть доказано и непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, согласно ур. (32) стр. 90,

$$\theta' = \frac{P_1 U_0 (M+1)(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{3P_1 V_0 (N+1)(6\mu+3\lambda)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}, \qquad (52)$$

а согласно ур. (42) стр. 96,

$$\gamma = \frac{P_0 U_1 M(5\mu+3\lambda)}{\mu(3\lambda+2\mu)} + \frac{3P_0 V_1 N(6\mu+3\lambda)}{4\mu(3\lambda+2\mu)}; \qquad (53)$$

положимъ въ двухъ послѣднихъ уравненіяхъ $P_1 = P_0 = P$ и возьмемъ ихъ отношеніе

$$\frac{\theta'}{\gamma} = \frac{[4PU_0(M+1)(5\mu+3\lambda)+3PV_0(N+1)(6\mu+3\lambda)]}{[4PU_1M(5\mu+3\lambda)+3PV_1N(6\mu+3\lambda)]}; \qquad (54)$$

какъ легко замѣтить, оно обращается въ единицу, т. е.

$$\theta' = \gamma, \qquad (51)$$

потому-что

$$U_0(M+1) = U_1 M,$$

а

$$V_0(N+1) = V_1 N.$$

15. Теперь мнѣ остается привести дальнѣйшіе результаты своихъ измѣреній и показать, въ какой мѣрѣ ими оправдываются эти выводы теоріи упругости. Всѣ измѣренія были произведены мною при установившемся давленіи, причемъ колонна ртути въ капиллярѣ всегда возвращалась на старое мѣсто, что указывало на отсутствіе какъ нагрѣванія отъ сжатія, такъ и постоянной деформаціи сосуда. При оперированіи по способу Regnault и по способу Jamin'а соблюдался разъ навсегда слѣдующій планъ измѣреній:

а) Опредѣливъ на скалѣ воздушнаго манометра точку въ 0.5 атмосферы давленія, т. е. въ $\frac{760}{2}$ m.m. ртутнаго столба

при 0°, какъ уже подробно было описано раньше [1]), я вычислялъ другую точку, которой соотвѣтствовало давленіе отъ 9.112 до 9.240 атмосферъ, въ зависимости отъ высоты барометра и комнатной температуры.

b) Потомъ я дѣлалъ одновременные отсчеты на капиллярѣ піезометра C, на термометрѣ Alvergniat, раздѣленномъ до 0.02 C., а также на поправочной трубкѣ γ, когда оперировалъ по методѣ Jamin'a.

c) Далѣе медленно повышалъ давленіе до вычисленной точки скалы воздушнаго манометра, давалъ время установиться этому давленію и записывалъ показанія капилляра C, термометра и поправочной трубки γ, когда оперировалъ по методѣ Jamin'a.

d) Наконецъ, медленно-же уменьшалъ давленіе и, давъ ему вновь установиться, читалъ показанія капилляра C, термометра, а также поправочной трубки γ, когда оперировалъ по методѣ Jamin'a.

e) Изъ полученныхъ такимъ образомъ перемѣщеній $\theta, \theta', \theta''$ и γ впослѣдствіи вычислялись коэффиціенты кажущейся сжимаемости χ_a, кубической k и абсолютной χ_v. Каждый изъ этихъ коэффиціентовъ опредѣленъ мною изъ нѣсколькихъ рядовъ наблюденій по сказанному плану, а каждый рядъ состоялъ изъ полныхъ десяти отсчетовъ, причемъ въ виду весьма близкаго согласія между наблюденными величинами θ, θ', θ'' и γ, полученными съ одной стороны при возрастаніи давленія отъ 0 до 9.3 атмосферъ и съ другой—при убываніи отъ 9.3 до 0 атмосферъ, — я взялъ среднее ариѳметическое изъ этихъ наблюденій.

16. Приведу для иллюстраціи протоколъ одного полнаго наблюденія:

---

[1]) Г. Де-Метцъ. Опытное изслѣдованіе. Loc. cit., §§ 49—53, а также G. De-Metz. Wied. Ann., Bd. 41, 1890, p. 667.

Піезометръ № I. Апрѣля 16, 1890 г. Метода Jamin'a

$P = 9.2308$ атм.; $W = 57756$ m.m.^{3}; $t = 18.80$ C.

	θ_1	θ_2	γ_1	γ_2
	Давленіе возрастало	Давленіе убывало	Давленіе возрастало	Давленіе убывало
	50.95	50.85	12.40	12.40
	50.90	50.90	12.30	12.30
	50.80	50.70	12.30	12.40
	50.80	50.70	12.45	12.50
	50.90	50.50	12.45	12.45
Среднее	50.87	50.72	12.38	12.41

Такимъ образомъ видно, что величины θ_1 и θ_2, γ_1 и γ_2 сходятся въ отдѣльныхъ наблюденіяхъ весьма хорошо, и что разницы между перемѣщеніями θ_1 и γ_1, наблюденными при возрастаніи давленія, и перемѣщеніями θ_2 и γ_2, наблюденными при убываніи его, настолько ничтожны, что всецѣло могутъ быть приписаны только ошибкамъ наблюденій, а не нагрѣванію или охлажденію ртути, а тѣмъ болѣе—упругому послѣдѣйствію стекла. Подобно приведеннымъ рядамъ были составлены и всѣ остальные, такъ что величины θ', θ'', θ и γ опредѣлены въ каждомъ рядѣ изъ десяти весьма сходныхъ между собою наблюденій. При этомъ слѣдуетъ помнить, что въ этой таблицѣ θ_1 и θ_2 выражены въ дѣленіяхъ капилляра β, (см. стр. 77), а γ_1 и γ_2 въ дѣленіяхъ капилляра β_1, (см. стр. 77).

Ввиду сказаннаго приведеніе подробныхъ таблицъ каждаго ряда не представляетъ особаго интереса, а потому я приведу лишь среднія величины отдѣльныхъ рядовъ.

Таблица XIII. Совокупность результатовъ всѣхъ измѣренiй при комнатной температурѣ, произведенныхъ съ пiезометрами №№ I, II, III и IV.

Пiезометры	1	2	3	4	5	6	7	8*)	9	10	11	12	13	14	15	16
										Regnault			Jamin		De-Metz	θ'
	T^0C	P atm.	θ' m.m. cub.	θ'' m.m. cub.	θ m.m. cub.	$\theta'+\theta''$ m.m. cub.	γ m.m. cub.	$\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\chi_a 10^7$	$k 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_a 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)$
I	16.75	9.2303	12.515	0.8240		13.3390				15.457	22.847	38.304			39.972	
	18.45	9.1619	12.270	0.7797		13.0497				14.735	22.568	37.303				
	17.65	9.2400	12.535	0.7969		13.3319				14.932	22.860	37.792				
	18.40	9.2094			13.3150		12.292	0.1883	12.480				15 692	38.452	38.658	
	18.80	9.2308			13.4043		12.442	0.1887	12.631				14.499	37.259	39.748	
	18.65	9.2267			13.4088		12.437	0.1886	12.626				14.684	37.444	39.950	0.991
II	20.45	9.1869	6.3617	0.62008		6.9818				15.366	23.615	38.981				
	20.40	9.1910	6.3512	0.61480		6.9660				15.229	23.565	38.794				
	20.30	9.1974			7.0056		6.2788	0.0739	6.3527				16.161	39.751	39.617	
	20.30	9.1974			7.0346		6.2938	0.0739	6.3677				16.508	40.098	40.213	1.000
III	20.00	9.1814	6.2140	0.5277		6.7417				12.991	24.480	37.471				
	19.60	9.1707	6.2061	0.5277		6.7338				13.008	24.477	37.485				
	18.05	9.1869			6.7087		5.9675	0.0870	6.0545				16.093	40.572	36.726	
	18.15	9.1744			6.7022		5.9425	0.0869	6.0294				16.573	41.052	36.791	1.028
IV	20.15	9.1666	3.7864	0.44725		4.2336				14.736	24.601	39.337				
	19.10	9.1666	3.7864	0.40635		4.1927				13.389	24.601	37.990				
	19.75	9.2019	3.7587	0.43406		4.1927				14.245	24.367	38.612				
	19.70	9.2019			4.2363		3.6538	0.04174	3.6955				17.770	42.271	39.507	
	19 70	9.2019			4.2524		3.6890	0.04174	3.7307				16.732	41.255	40.036	1.019

*) Въ этой колоннѣ вычислено упругое расширенiе полусферической части пiезометра съ цѣлью имѣть возможность сдѣлать поправку на полусферу, вклеенную въ металлическiй патронъ; чтобы получить полное упругое расширенiе пiезометра, нужно къ наблюденному перемѣщенiю γ придать вычисленныя величины $\gamma(^1/_2 V_0)$.

Таблица XIV. Окончательные результаты, вычисленные на основаніи среднихъ предъидущей таблицы.

Піезометры	1	2	3	4	5	6	7	8*)	9	10 Regnault	11 Regnault	12 Regnault	13 Jamin	14 Jamin	15 De-Metz	16
	T^oC	P atm.	θ' m.m. cub.	θ'' m.m. cub.	θ m.m. cub.	$\theta'+\theta''$ m.m. cub.	γ m.m. cub.	$\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\chi_a 10^7$	$k 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_a 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\frac{\theta'}{\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)}$
I	17.62	9.2109	12.410	0.8002	13.376	13.240	12.390	0.1885	12.579	15.042	22.759	37.801	14.958	37.718	39.582	0.991
II	20.42	9.1889	6.3564	0.6174	7.0201	6.9739	6.2863	0.0739	6.360	15.298	23.590	38.888	16.335	39.924	39.909	1.000
III	19.80	9.1760	6.2100	0.5277	6.7054	6.7377	5.9550	0.0869	6.042	12.996	24.479	37.475	16.333	40.812	36.777	1.028
IV	19.66	9.1784	3.7772	0.4292	4.2444	4.2064	3.6714	0.0417	3.713	14.123	24.523	38.646	17.240	41.7[illegible]3	39.782	1.019
сред.	19.38											38.20	16.22	40.05	39.01	1.0095

Таблица XV. Совокупность всѣхъ измѣренiй при температурѣ тающаго льда 0°, произведенныхъ съ піезометрами № I и № III.

Піезометры	1	2	3	4	5	6	7	8	9 Regnault	10 Regnault	11 Regnault	12 Jamin	13 Jamin	14 De-Metz
	P atm.	θ' m.m. cub.	θ'' m.m. cub.	θ m.m. cub.	$\theta'+\theta''$ m.m. cub.	γ m.m. cub.	$\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)$ m.m. cub.	$\chi_a 10^7$	$k 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_a 10^7$	$\chi_v 10^7$	$\chi_v 10^7$
I	9.2211	12.476	0.8021		13.2781				15.046	22.797	37.843			
	9.2308			13.3423		12.3367	0.1887	12.525				15.324	38.123	
	9.2308			13.3396		12.3617	0.1887	12.550				14.799	37.598	39.09
III	9.1910	6.2119	0.4502	6.6916	6.6621	—	—	—	11.192	24.446	35.638			36.34
										среднее....	36.75	15.061	37.86	37.71

Изъ таблицы (XV-й) получаемъ при температурѣ тающаго льда по методѣ:

Regnault... $\chi_v = 0.000003675$ при 0^o,

Jamin испр. $\chi_v = 0.000003786$ при 0^o,

De-Metz..... $\chi_v = 0.000003771$ при 0^o,

Среднее изъ чиселъ, полученныхъ по всѣмъ тремъ методамъ есть:

$$\chi_v = 0.000003737 \text{ при } 0^o.$$

Таблица-же (XIV-я) показываетъ, что коэффиціентъ абсолютной сжимаемости ртути при 19.38^o C. по методѣ:

Regnault .... $\chi_v = 0.00000382$

Jamin испр......... $\chi_v = 0.00000400$

De-Metz............ $\chi_v = 0.00000390$

Среднее изъ чиселъ, полученныхъ по всѣмъ тремъ методамъ есть:

$$\chi_v = 0.00000391 \text{ при } 19.38^o \text{ C.}$$

Слѣдовательно, сжимаемость ртути возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры и коэффиціентъ этого возрастанія, разсчитанный на 1^o C. есть:

$$\Delta = 0.0000000877,$$

такъ что вообще въ предѣлахъ температуръ моихъ опытовъ:

$$\chi_v = 0.0000374 + 0.0000000877\, t.$$

Послѣдній опытный результатъ можно сопоставить съ вычисленнымъ на основаніи одной формулы A. Dupré [1]),, которая

---

[1]) A. Dupré. Théorie mécanique de la chaleur. Paris, 1869, p. 147 etc.

была провѣрена Amagat [1]) и оказалась согласною съ его наблюденіями. Эта формула имѣетъ слѣдующій видъ:

$$A = 10333(274 + t)\,\frac{\alpha}{\chi_v}, \qquad (52)$$

причемъ въ ней α есть коэффиціентъ расширенія жидкости при постоянномъ давленіи, χ_v — коэффиціентъ ея абсолютной сжимаемости, $274 + t = T$ — абсолютная температура. Dupré называетъ величину A притяженіемъ при соприкосновеніи — «l'attraction au contact» и считаетъ ее равною произведенію $a\Delta^2$, въ которомъ Δ есть плотность тѣла, а a — особая постоянная, зависящая отъ его химической природы. Эта формула выведена на основаніи предположенія, что внутренняя работа зависитъ только отъ одного объема. Если разсматривать одно и то-же тѣло при разныхъ температурахъ и давленіяхъ, то постоянная a остается все одна и та-же, а α, T, χ_v, Δ перемѣняются на α', T', χ'_v, Δ', и тогда можно написать уравненіе:

$$\chi'_v = \frac{T'}{T} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\Delta^2}{\Delta'^2} \cdot \chi_v, \qquad (53)$$

помощью котораго легко найти коэффиціентъ сжимаемости χ'_v при температурѣ t', если онъ извѣстенъ при другой температурѣ t, и если, кромѣ того, извѣстны величины α, α', Δ и Δ'.

Сдѣлавъ этотъ разсчетъ для $t = 19.38^0$ C. и принявъ $\chi_v = 0.00000374$ при 0^0, я нашелъ:

$$\chi_v = 0.000000402 \text{ при } 19{,}38^0 \text{ C.},$$

число близкое къ найденному изъ опыта.

---

[1]) Amagat. Annales de chim. et de phys., (5) t. 11, 1877, p. 536.

17. Интересно сопоставить полученное мною число съ числами другихъ изслѣдователей:

Таблица XVI коэффиціентовъ сжимаемости ртути по различнымъ изслѣдованіямъ.

Имена	χ_v
Colladon et Sturm......	0.00000352 при 0°
Aimé...............	0.00000390 » »
Regnault..............	0.00000352 » »
Amaury et Descamps испр.	0.00000386 » »
Tait...	0.00000360 » »
Amagat	0.00000390 » »
De-Metz.............	0.00000374 » »

Среднее...... 0.00000379 при 0°

Мы видимъ, такимъ образомъ, что наблюденныя съ давнихъ поръ числа можно легко и довольно близко согласовать между собою, если держаться теоріи упругости и принимать во вниманіе соотношеніе между коэффиціентами Lamé λ и μ, установленное для стекла многочисленными и разнообразными опытами. Всѣ коэффиціенты, представленные въ послѣднихъ трехъ таблицахъ вычислены по упрощеннымъ формуламъ Lamé при допущеніи $\lambda = \mu$. Это допущеніе мы постараемся впослѣдствіи оправдать прямыми опытами, независимо отъ результатовъ таблицы V.

18. Переходя къ сравненію чиселъ, добытыхъ различными методами, мы остановимся на сравненіи чиселъ, полученныхъ нами по методѣ Jamin'а и по методѣ Regnault.

Піезометръ	По методѣ Jamin'a	По методѣ Regnault
№ I	χ_a=0.000001496	χ_v=0.000003780
№ II	0.000001633	0.000003889
№ III	0.000001633	0.000003747
№ IV	0.000001724	0.000003865
	Среднее 0.000001622	Среднее 0.000003820.

Сопоставленіе какъ отдѣльныхъ чиселъ по нумерамъ піезометровъ, такъ и среднихъ, исключаетъ одну изъ методъ, потому-что двухъ отвѣтовъ на поставленный въ нашей задачѣ вопросъ не можетъ быть; вспоминая требованія теоріи упругости, мы должны отказаться отъ методы Jamin'a, которая приводитъ къ числамъ, противорѣчащимъ не только тѣмъ, которыя добыты на основаніи этой теоріи, но также и тѣмъ, которыя найдены путемъ одного опыта (Tait, Amagat), безъ всякаго вмѣшательства теоріи; чтобы перейти отъ числа, полученнаго по методѣ Jamin'a, къ числу, полученному по методѣ Regnault, нужно придать коэффиціентъ кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра k, тогда:

Имена	χ_v
по Jamin'y...	0.00000400
по Regnault.	0.0000382

Хотя послѣдніе два коэффиціента абсолютно и не совпадаютъ, однако, они очень близки другъ къ другу, въ особенности если принять во вниманіе, что они получены:

1) различными методами;

2) что дѣло идетъ о сжимаемости ртути, одной изъ наименѣе сжимаемыхъ жидкостей;

и 3) что піезометры сдѣланы изъ стекла, геометрическая форма котораго далеко не отвѣчаетъ требованіямъ теоріи, какъ видно изъ таблицъ X-й и XI-й.

Для полноты представленій необходимо еще сравнить столбцы 10 и 13 таб. XIV-й.

Піезометры	По методѣ Jamin'a	По методѣ Regnault
№ I	χ_a=0.00000150	χ_a=0.00000150
№ II	0.00000163	0.00000153
№ III	0.00000163	0.00000130
№ IV	0.00000172	0.00000141
	Среднее 0.00000162	Среднее 0.00000144

Объ этихъ двухъ коэффиціентахъ можно сказать то-же, что уже было сказано о коэффиціентахъ χ_v, т. е., что они настолько близки между собою, насколько могутъ быть два числа, данныя двумя различными методами при измѣреніи малаго эффекта.

Что мы дѣйствительно стоимъ на правильной точкѣ зрѣнія, подтверждается еще двумя рядами чиселъ—15 и 16 колоннъ той-же таблицы. Въ колоннѣ 15-й мною приведены абсолютные коэффиціенты сжимаемости χ_v, вычисленные по ур. (VII и VIII').

Піезометръ	De-Metz
№ I	χ_v=0.00000396
№ II	0.00000399
№ III	0.00000368
№ IV	0.00000398
	Среднее 0.00000390

Они еще разъ приводятъ къ прежнимъ числамъ и случайно представляютъ собою среднія изъ чиселъ, полученныхъ по методѣ Regnault и по исправленной методѣ Jamin'a. Наконецъ, колонна 16-я содержитъ въ себѣ отношеніе $\frac{\theta'}{\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)}$, которое, согласно теоріи упругости, должно равняться единицѣ (урав. 51). Опытъ вполнѣ подтверждаетъ этотъ выводъ теоріи, потому-что въ среднемъ разница между опытной и теоретической величиной въ среднемъ едва достигаетъ одного процента.

Піезометръ	$\frac{\theta'}{\gamma+\gamma(\frac{1}{2}V_0)}$
№ I	0.991
№ II	1.000
№ III	1.028
№ IV	1.019

Среднее 1.0095

19. Во всѣхъ предъидущихъ разсчетахъ я руководился упрощенными формулами, допустивъ равенство

$$\lambda=\mu.$$

Хотя я старался оправдать такое упрощеніе рядомъ чиселъ, собранныхъ мною въ таблицѣ V, стр. 62—63 подъ № 1, тѣмъ не менѣе однако, для строгости полученнаго результата я считалъ необходимымъ еще непосредственно провѣрить это равенство. Съ этою цѣлью я остановился на методѣ, которая считается одною изъ лучшихъ при опредѣленіи модулей упругости E, μ и постоянной Poisson'a σ—на методѣ гнутія и крученія. Самая метода настолько общеизвѣстна, что излагать ее

нѣтъ особаго интереса, и поэтому я опишу лишь свой приборъ.

20. Мой приборъ состоялъ изъ чугунной скамьи (фиг. 4) длиною въ 105 cm., стоявшей на четырехъ уравнительныхъ винтахъ VV. Верхняя часть имѣла по всей длинѣ прорѣзъ, по которому можно было перемѣщать чугунныя части b, b и c и по желанію закрѣплять въ томъ или иномъ мѣстѣ помощью нажимныхъ винтовъ d (фиг. 5). Часть b, подробно представлена на фиг. 4-й и 5-й и состоитъ изъ толстаго угольника bb, притянутаго винтомъ d къ верхней части скамейки, а къ нему привинчена винтомъ h болѣе тонкая желѣзная пластинка e, которая можетъ перемѣщаться вверхъ и внизъ по оси (фиг. 7) y, и взадъ и впередъ по оси z. Пластинка e оканчивается призматическимъ ножемъ, на которомъ лежитъ испытуемая труба, или стержень. Часть c, вылитая изъ чугуна, имѣетъ сквозное отверстіе, въ которое плотно входитъ латунный патронъ, окачивающійся нажимнымъ винтомъ. Весь приборъ сдѣланъ весьма солидно, такъ что во время наблюденій не замѣчалось никакого перемѣщенія отдѣльныхъ его частей.

21. Чтобы опредѣлить модуль Юнга E, стекляная трубка устанавливалась горизонтально на двухъ подставкахъ b, b; на нее надѣвались два тонкихъ латунныхъ кольца m', m и призма p съ чашкою q для разновѣсокъ (фиг. 4), а на кольцахъ помѣщались два зеркала r, r' съ тремя уравнительными винтами каждое и притомъ такъ, что ихъ ось вращенія встрѣчала подъ прямымъ угломъ центральную ось трубы.

Далѣе вмѣсто латуннаго патрона въ плоскости yz (фиг. 7) утверждалась скала s (фиг. 6) раздѣленная черезъ каждые два m. m. дѣлительною машиною Perreaux; въ этой же плоскости устанавливались и оба зеркала, такъ что лучъ, шедшій отъ скалы s, попадалъ на зеркало r', отражался отъ него, падалъ на зеркало r и, вновь отразившись, попадалъ наконецъ въ зрительную трубку. Этотъ способъ опредѣленія угла гнутія я заимство-

валъ у Koenig'а [1]), и онъ оказался очень удобнымъ; я только избѣгнулъ слишкомъ большаго удаленія скалы отъ перваго зеркала, потому-что огромныя удаленія вовсе не дѣлаютъ измѣреній болѣе чувствительными.

Въ моихъ опытахъ скала s (фиг. 6) находилась всего на разстояніи 6—7 cm. отъ перваго зеркала r, зеркало r отъ зеркала r'—на разстояніи приблизительно 90 cm., а ножъ одной подставки отъ ножа другой приблизительно на разстояніи 85 cm.; такимъ образомъ, если назвать черезъ d видимое перемѣщеніе по скалѣ, наблюдаемое трубою, то tg угла гнутія будетъ

$$tg\varphi = \frac{d}{2(2sr' + rr')} = \frac{d}{D} . \qquad (54)$$

При описанныхъ разстояніяхъ величина D колебалась отъ 5650 m.m. до 5830 m.m., а прогибаніе f, вычисленное по формулѣ $f = \frac{1}{3}\, l tg\varphi$, въ которой l есть разстояніе между ножами, не превышало 0.5 m.m., вслѣдствіе чего мнѣ не пришлось наблюдать явленія упругаго послѣдѣйствія. Модуль Юнга я вычислялъ по формулѣ

$$E = \frac{1}{f} \frac{l^3 . P}{12\pi(R_1^4 - R_0^4)} , \qquad (55)$$

а грузы P употреблялъ въ 500 gr., 1000 gr., 1500 gr, 2000 gr., причемъ отступленіе отъ пропорціональности между наблюдаемыми величинами d и грузами P были настолько ничтожны, что ихъ скорѣе можно было приписать ошибкамъ наблюденій; вообще оцѣнка десятой доли одного дѣленія скалы была затруднительна. Каждый результатъ составленъ изъ нѣсколькихъ рядовъ, не менѣе пяти, а каждый рядъ изъ десяти

---

[1]) Koenig. Wied. Ann. Bd. 28, 1886, p. 108.

одновременныхъ наблюденій d для каждаго груза. Вотъ таблица полученныхъ чиселъ:

Таблица XVII размѣровъ R_1 и R_0 піезометрическихъ трубъ и модулей Юнга.

№№	R_1	%	R_0	%	e	f на 1 kgr.	E
	m. m.		m. m.		m. m.	m. m.	
I	10.407	2	8.955	2	1.452	0.467	7277
II	9.505	2	7.412	3	2.093	0.495	7300
III	10.000	5	7.660	7	2.340	0.408	6892
IV	9.097	1	6.387	1.5	2.710	0.510	7032
V	9.875	3	6.838	3	3.037	0.348	5663

Въ ней, кромѣ прогибанія f и модуля E, помѣщены еще радіусы R_1 и R_0; причемъ каждый изъ нихъ полученъ какъ среднее изъ четырехъ взаимно-перпендикулярныхъ промѣровъ колецъ, срѣзанныхъ у обоихъ концовъ каждой трубы.

Въ колоннахъ сосѣднихъ съ R_1 и R_0 выражены въ % колебанія этихъ радіусовъ при переходѣ отъ кольца одного конца къ кольцу другаго конца; эти колонны интересны въ томъ отношеніи, что онѣ характеризуютъ отступленія дѣйствительной формы трубъ отъ строгой цилиндрической.

Трубы № I, II, III и IV изъ нѣмецкаго стекла и представляютъ собою остатки тѣхъ трубъ, изъ которыхъ были приготовлены піезометры соотвѣтственныхъ нумеровъ, а труба № V— французскаго хрусталя неизвѣстной фабрики.

22. Для опредѣленія модуля твердости μ на одномъ концѣ трубы наклеивалось широкое, около 15 m.m., кольцо n (фиг. 4), въ него ввинчивался рычагъ t, въ 241 m.m., съ чашкою q для груза; а на другомъ концѣ наклеивался металлическій пат-

ронъ, который плотно входилъ въ отверстіе чугунной части *c* фиг. 4-й и крѣпко къ ней притягивался нажимнымъ винтомъ, такъ что этотъ конецъ трубы можно было считать неподвижнымъ. Вблизи кольца *n* съ рычагомъ и чашкою подставлялся одинъ изъ ножей *bb*, къ которому въ этомъ случаѣ привинчивались два валика *aa* (фиг. 5), вслѣдствіе чего свободный конецъ трубы прочно лежалъ на нихъ и правильно перемѣщался при крученіи. Ножъ съ валиками находился всегда очень близко къ кольцу *m* съ зеркаломъ r' съ цѣлью избѣгнуть выгибанія трубы подъ вліяніемъ груза, подвѣшаннаго па рычагѣ *t*. Рычагъ устанавливался перпендикулярно къ оси трубы и лежалъ въ горизонтальной плоскости; кольца *m*, *m* оставались на прежнихъ мѣстахъ, но зеркала *r* и r' поворачивались на 90^0 въ плоскость *xy*. При крученіи отсчеты угловъ θ производились по способу Poggendorff'a помощью двухъ трубъ со скалами, стоявшихъ на разстояніи 1 m. отъ зеркалъ. Въ моихъ опытахъ зеркало r' перемѣщалось не болѣе, чѣмъ $0^0.55$ на 1000 gr., а зеркало *r* перемѣщалось приблизительно на $5^0/_0$ этой величины. Грузы ставились на чашку, по прежнему, въ 500 gr., 1000 gr., 1500 gr., 2000 gr., и опять таки мнѣ не удалось замѣтить упругаго послѣдѣйствія.

Я полагаю, что это легко объяснить ничтожностью самой деформаціи. Чтобы избѣгнуть вредныхъ толчковъ, грузы—какъ при крученіи, такъ и при гнутіи—спускались осторожно па блокахъ, и въ зрительную трубку легко было видѣть, что крученіе и гнутіе совершались вполнѣ правильно, потому-что дѣленія скалы перемѣщались плавно и всегда возвращались на перекрестокъ нитей, когда грузъ снимался съ чашки. Для различныхъ грузовъ наблюдаемыя крученія не строго пропорціональны грузамъ, хотя крайнее отступленіе не превышаетъ $3^0/_0$. Къ сожалѣнію, болѣзнь глазъ не позволила мнѣ больше остановиться на этомъ явленіи и изучить его обстоятельнѣе. Въ прилагаемой таблицѣ приведены результаты всѣхъ опытовъ, вычисленныхъ по формулѣ

$$\mu = \frac{2l.C}{\theta\pi(R_1^4 - R_0^4)}, \qquad (56)$$

въ которой C есть моментъ крученія, а остальныя величины извѣстны; кромѣ того, на основаніи зависимости (ур. 25, стр. 70) въ ней приведены значенія постоянной Poisson'а σ, которыя оправдываютъ выборъ упрощенныхъ формулъ.

Таблица XVIII модулей твердости μ и постоянныхъ Poisson'а σ.

№№	θ на 1 kgr.	μ	σ
I	0°.491	2960	0.230
II	0°.517	2930	0.245
III	0°.447	2796	0.232
IV	0°.538	2841	0.238
V	0°.383	2291	0.236

Мнѣ остается теперь вычислить на основаніи двухъ послѣднихъ таблицъ кубическую сжимаемость стѣнокъ піезометровъ; съ этою цѣлью, я воспользуюсь формулою (26, стр. 70), согласно которой получится слѣдующая таблица:

Таблица XIX кубической сжимаемости стекла піезометровъ.

№№	$k = 3(1-2\sigma)/E$	по Regnault при $\lambda = \mu$	Δ
I	0.00000230	0.00000227	—0.00000003
II	0.00000216	0.00000236	+0.00000020
III	0.00000241	0.00000245	+0.00000004
IV	0.00000231	0.00000245	—0.00000014
V	0.00000289	—	—

Кромѣ того, мы можемъ вычислить кубическую сжимаемость на основаніи данныхъ θ' таб. XIV-й и σ таб. XVIII-й по формулѣ (V), для которой μ берется изъ таблицы XVIII-й, а λ вычисляется изъ извѣстнаго соотношенія (ур. 2, стр. 51).

Сдѣлавъ эти вычисленія, находимъ слѣдующую таблицу значеній кубической сжимаемости k.

Таблица XX кубической сжимаемости стекла по Regnault при $\lambda \neq \mu$ и при $\lambda = \mu$.

№№	Regnault $\lambda \neq \mu$	Regnault $\lambda = \mu$	Δ
I	0.00000241	0.00000227	—0.00000014
II	0.00000240	0.00000236	—0.00000004
III	0.00000258	0.00000245	—0.00000013
IV	0.00000253	0.00000245	—0.00000008

Послѣднія двѣ таблицы показываютъ, что опредѣленная нами кубическая сжимаемость по способу Regnault и по упрощеннымъ формуламъ Lamé разнится отъ кубической сжимаемости, опредѣленной по описаннымъ способамъ и вычисленной по строгимъ формуламъ, только на одну единицу седьмаго десятичнаго знака, а большаго согласія едва-ли можно и требовать отъ этихъ опытовъ. Для окончательнаго сужденія составимъ еще по первымъ колоннамъ таб. XIX и XX таблицу среднихъ коэффиціентовъ сжимаемости и сопоставимъ ихъ съ числами, полученными по Regnault въ предположеніи $\lambda = \mu$.

Таблица XXI кубической сжимаемости стекла при $\lambda = \mu$ и $\lambda \neq \mu$.

№№	Среднее k при $\lambda \neq \mu$	По Regnault k при $\lambda = \mu$	Δ
I	0.00000235	0.00000227	—0.00000008
II	0.00000228	0.00000236	+0.00000008
III	0.00000250	0.00000245	—0.00000005
IV	0.00000242	0.00000245	+0.00000003

Отсюда мы заключаемъ, что разности Δ получаются въ восьмомъ десятичномъ знакѣ. Воспользуемся теперь полученными числами послѣдней таблицы, чтобы составить два ряда чиселъ абсолютной сжимаемости ртути въ предположеніяхъ $\lambda = \mu$ и $\lambda \neq \mu$.

Таблица XXII абсолютной сжимаемости ртути.

№№	χ_r при $\lambda = \mu$	χ_r при $\lambda \neq \mu$
I	0.000003780	0.00000385½
II	0.000003889	0.000003810
III	0.000003747	0.000003800
IV	0.000003865	0.000003832
Среднее	0.000003820	0.000003824

Мы видимъ, такимъ образомъ, совершенное согласіе обоихъ результатовъ, вслѣдствіе чего все сказанное въ § 14 (стр. 66) и § 17 (стр. 105) остается въ полной силѣ.

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Все вышеприведенное можно резюмировать слѣдующимъ образомъ:

1) Истинный коэффиціентъ сжимаемости жидкости χ_v равенъ суммѣ коэффиціентовъ кажущейся сжимаемости жидкости χ_a и кубической сжимаемости стѣнокъ k, т. е.

$$\chi_v = \chi_a + k.$$

2) Вслѣдствіе значительнаго разнообразія абсолютной величины коэффиціента k его слѣдуетъ опредѣлять всегда самостоятельно, а не принимать на вѣру.

3) Изученіе кажущейся сжимаемости χ_a можно считать достаточнымъ лишь тогда, когда данная жидкость принадлежитъ къ числу сильно сжимающихся, и когда колебаніями значеній коэффиціента k по абсолютной величинѣ можно пренебречь; предѣлъ этихъ колебаній, какъ видно изъ таблицы VII-й, заключается между 0.0000022—0.0000028.

4) Сравненіе отдѣльныхъ результатовъ, касающихся сжимаемости жидкостей, возможно лишь для коэффиціентовъ абсолютной сжимаемости χ_v, а не для коэффиціентовъ кажущейся сжимаемости χ_a.

5) Метода Jamin'а эквивалентна первой половинѣ методы Regnault, такъ что посредствомъ ея опредѣляется лишь коэффиціентъ кажущейся сжимаемости χ_a, но она заключаетъ въ

себѣ данныя $\gamma=\theta'$, помощью которыхъ легко найти по указаннымъ формуламъ (V) коэффиціентъ k.

6) Можно было думать, не опираясь на теорію упругости, что по методѣ Jamin'а получатся различные коэффиціенты χ_a въ зависимости отъ толщины стѣнокъ піезометровъ. По теоріи упругости этого не должно быть, и опытъ вполнѣ оправдываетъ этотъ выводъ.

7) Чтобы получить одинаковые коэффиціенты сжимаемости по методѣ Regnault и Jamin'а, теорія требуетъ прибавить къ числу Jamin'а коэффиціентъ кубической сжимаемости стѣнокъ піезометра k, и опытъ подтверждаетъ это заключеніе.

8) Болѣе выгодно замѣнить условное уравненіе Regnault

$$\theta=\theta'+\theta''$$

тѣмъ способомъ опредѣленія χ_v коэффиціента, который указанъ мною на стр. 92, такъ какъ вмѣсто сравненія отдѣльныхъ элементовъ наблюденій, мы получаемъ сравненіе коэффиціентовъ абсолютной сжимаемости.

9) Послѣдній способъ опредѣленія коэффиціента χ_v слѣдуетъ предпочитать способу Regnault въ тѣхъ случаяхъ, когда сжимаемость тѣла ничтожна, потому что въ немъ мы имѣемъ дѣло съ суммою перемѣщеній θ, а не съ разностью θ''; онъ имѣетъ особое значеніе при разъисканіи зависимости между измѣненіемъ сжимаемости тѣла въ связи съ измѣненіемъ температуры.

10) Всѣ три способа опредѣленія коэффиціента χ_v приводятъ къ однимъ и тѣмъ же числамъ; получаемыя при этомъ разности должны быть приписаны съ одной стороны ошибкамъ наблюденій, а съ другой несовершенству формы піезометровъ.

11) Новѣйшіе опыты Amagat и мои приводятъ къ неизбѣжному заключенію, что въ изученіи явленій сжимаемости теорія упругости занимаетъ первенствующее мѣсто, и что она аетъ разъясненіе на всѣ вопросы.

Кажется непонятнымъ, какимъ образомъ методѣ Jamin'а удалось просуществовать съ 1869 года въ качествѣ строгой методы, и почему многіе новѣйшіе изслѣдователи предпочитаютъ изученіе кажущейся сжимаемости χ_a опредѣленію коэффиціента k и связаннаго съ нимъ коэффиціента χ_v.

12) Поправивъ старые опыты по сжимаемости ртути на основаніи изложенныхъ здѣсь воззрѣній, мы получаемъ числа довольно близкія между собою, поэтому мы считаемъ справедливымъ составить изъ нихъ среднее ариѳметическое, придавъ каждому числу вѣсъ пропорціональный числу піезометровъ, которыми располагалъ каждый изслѣдователь. Насколько мнѣ извѣстно, кромѣ Amagat, имѣвшаго семь піезометровъ, и меня — четыре, у остальныхъ было всего по одному, вслѣдствіе чего среднее изъ всѣхъ наблюденій, начиная отъ Colladon'а и Sturm'а до меня включительно, будетъ

$$\chi_v = 0.00000379 \text{ при } 0^\circ.$$

Приведеніе къ 0° сдѣлано на основаніи найденнаго мною термическаго коэффиціента

$$\Delta = 0.0000000877.$$

13) Если теперь нѣтъ сомнѣній относительно правильности экспериментальной методы, то все-таки нельзя считать вопросъ о сжимаемости жидкаго тѣла вмѣстѣ съ тѣмъ и окончательно рѣшеннымъ. Очевидно, что въ настоящее время на очередь выдвигается изученіе зависимости между сжимаемостью и давленіемъ, между сжимаемостью и температурою, на подобіе той, которая дана Tait'омъ въ формѣ ур. (23, гл. II, стр. 43), а для этого необходимо точно опредѣлить подобную-же зависимость для стѣнокъ піезометра, потому-что существующія указанія (см. § 17, гл. II) не вполнѣ согласны между собою.

14) Кромѣ того, давно извѣстенъ фактъ, что при сжатіи тѣла происходитъ его нагрѣваніе, а при его расширеніи — охлажденіе; однако, точныхъ измѣреній до сихъ поръ нѣтъ, хотя попытки дѣлались Colladon et Sturm'омъ, Regnault, Röntgen und Schneider'омъ и Drecker'омъ. Если наблюденія Drecker'а и очень интересны, все-таки они только косвенно рѣшаютъ затрагиваемый вопросъ.

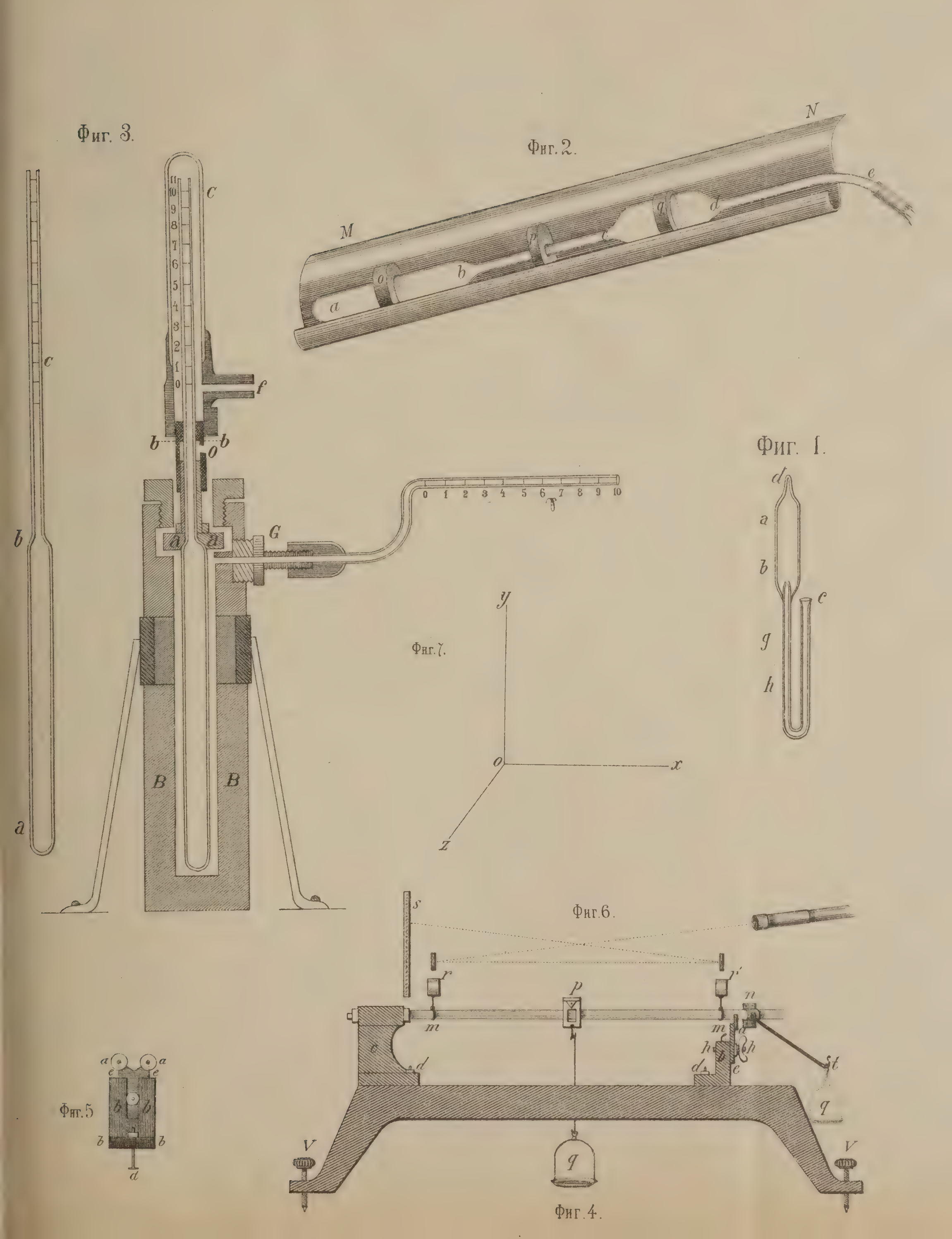
15. Наконецъ, обширное поле для изученія представляетъ собою сжимаемость растворовъ какъ солей, такъ и газовъ; изслѣдованія Röntgen und Schneider'а, Schumann'а, Drecker'а, Isambert'а и нѣкоторыхъ другихъ лицъ пока составляютъ только вступленіе въ интереснѣйшую главу молекулярной физики, которая обѣщаетъ намъ раскрыть со временемъ тайну жидкаго состоянія тѣла.

Поправки и дополненія.

стр.	напечатано:	должно быть:
16	$\sigma = 0.330$ для латуни	$\sigma = 0.352$ для латуни
16	$\sigma = 0.235$ для стекла	$\sigma = 0.247$ для стекла.
23		Кромѣ упомянутыхъ тѣлъ Cailletet изслѣдовалъ: петролеумъ, сѣрнистую кислоту.
62		Mercadier нашелъ для стекла .... $\sigma = 0.250$
63		» » для стали .... $\sigma = 0.330$
63		Naccari e Bellati нашли для каучука....... $\sigma = 0.310$; $\sigma = 0.410$

Къ статьѣ Г. Г. Де-Метца

„объ абсолютной сжимаемости ртути и стекла".



ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ XIV.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36
1892.

Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Секретарь Общества *П. Бучинскій.*

MÉMOIRES
de la section mathématique
de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie
(Odessa).

T. XIV.

СОДЕРЖАНІЕ.

TABLE DES MATIÈRES.

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ МѢСТА

ВЪ ТЕОРІИ

ОСЕЙ ВРАЩЕНІЯ.

И. Занчевскаго.

ВЫПУСКЪ ПЕРВЫЙ.

ОДЕССА.
Типографія А. Шульце, Ланжероновская улица, домъ Карузо, № 36-й.
1891.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ «Théorie nouvelle de la rotation des corps» Poinsot указалъ на ту связь, какая имѣетъ мѣсто между элементами приведенія системы импульсивныхъ силъ къ центру инерціи и соотвѣтствующимъ движеніемъ и на то геометрическое соотвѣтствіе, какое существуетъ между осью пары и винтовой осью движенія по отношенію къ эллипсоиду инерціи. Эта геометрическая теорія импульсивныхъ силъ привела его къ синтетическому разбору движенія твердаго тѣла, подвергнутаго вначалѣ дѣйствію импульсивныхъ силъ и предоставленнаго затѣмъ самому себѣ. Вскорѣ послѣ этого появились еще мемуары того-же автора [1]), гдѣ детально разбираются нѣкоторые частные случаи дѣйствія одной импульсивной силы, именно, когда сила направлена по прямой, лежащей въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи, и когда она перпендикулярна къ послѣдней. Въ обоихъ случаяхъ результирующее движеніе есть простое вращеніе и Poinsot не только даетъ построенія, опредѣляющія положеніе оси вращенія въ зависимости отъ силы, но рѣшаетъ также рядъ другихъ вопросовъ, тѣсно съ этимъ связанныхъ. Сюда напр. относятся вопросы о положеніи центра наибольшаго удара,

---

[1]) Poinsot. Questions dynamiques. Sur la percussion des corps. Liouville, Journal. 2me Série, T. II, IV.

той точки главной плоскости инерціи, которой тѣло ударяетъ съ наибольшей силой неподвижную точку, стоящую на пути его движенія, опредѣленіе происходящаго затѣмъ движенія и т. п. Тотъ несомнѣнный интересъ, который представляютъ эти вопросы для механики, а также простота и изящество ихъ рѣшенія побудили другихъ геометровъ обобщить изслѣдованія Poinsot на случай дѣйствія системы импульсивныхъ силъ, подчиненной одному условію, чтобы вызываемое движеніе было простымъ вращеніемъ. Точки, въ которыхъ ось вращенія и центральная ось силъ пересѣкаются ихъ кратчайшимъ разстояніемъ, называются центромъ вращенія и центромъ удара. При изученіи распредѣленія осей силъ, вызывающихъ вращеніе, и осей вращенія эти точки играютъ роль въ томъ смыслѣ, что до нѣкоторой степени опредѣляютъ положеніе тѣхъ соотвѣтствующихъ осей силъ и вращенія, которыя черезъ нихъ проходятъ. Но кромѣ того центръ вращенія, въ случаѣ когда дѣйствуетъ одна импульсивная сила, имѣетъ еще и то механическое значеніе, что въ немъ одномъ достаточно укрѣпить ось вращенія, называемую въ этомъ случаѣ перманентной, чтобы она и въ дальнѣйшемъ служила осью вращенія. Chelini, который вскорѣ за Poinsot сталъ заниматься тѣмъ соотвѣтствіемъ, какое существуетъ между импульсивной силой и перманентною осью, обратилъ главное свое вниманіе на распредѣленіе въ тѣлѣ этихъ точекъ [1]). Далѣе, D. Turazza [2]) дѣлаетъ обобщеніе, введя вмѣсто одной импульсивной силы — систему. Въ своемъ сочиненіи о движеніи твердаго тѣла, онъ указываетъ многія свойства центровъ удара и центровъ вращеній для

---

¹) Съ работами Chelini мы, по независящимъ отъ насъ обстоятельствамъ, успѣли ознакомиться только по изложенію ихъ другими авторами, какъ напр. Beltrami.

²) D. Turazza. Il moto dei systemi rigidi. Padova, 1868.

осей параллельныхъ и даетъ уравненіе той конической поверхности 3-го порядка осей вращенія, для которыхъ данная точка служитъ центромъ. Опредѣливъ съ другой стороны конусъ 2-го порядка осей перманентныхъ, проходящихъ черезъ данную точку, онъ въ пересѣченіи двухъ этихъ конусовъ находитъ тѣ перманентныя оси, для которыхъ эта точка служитъ перманентнымъ центромъ.

Оказывается, что существуютъ всегда три перманентныя оси, для которыхъ данная точка есть перманентный центръ, и что онѣ взаимно перпендикулярны. Что касается до метода изслѣдованія, то сущность его состоитъ въ слѣдующемъ. Одна изъ осей координатъ принимается параллельной оси вращенія, такъ что положеніе послѣдней опредѣляется двумя параметрами. Система силъ приводится къ равнодѣйствующей, проходящей черезъ произвольную точку, такъ что моменты пары являются функціями трехъ параметровъ. Всего-же пять параметровъ, которыми при случаѣ можно располагать по произволу. Такой методъ удобенъ до тѣхъ поръ, пока не приходится мѣнять направленія оси вращенія. Въ противномъ-же случаѣ, по справедливому замѣчанію Beltrami, вноситъ въ формулы несимметричность, чѣмъ затрудняется какъ изслѣдованіе, такъ и пониманіе результатовъ. Въ виду этого Beltrami предложилъ иной пріемъ, гдѣ оси силъ и вращенія не имѣютъ какого-либо особеннаго отношенія къ координатной системѣ, за которую взяты главныя оси инерціи, а координаты какой-либо точки на перманентной оси даются въ функціи двухъ параметровъ, и также точно представляются координаты какой-либо точки оси вращенія. Пользуясь этимъ, Beltrami легко доказываетъ [1]) основныя теоремы теоріи, заключающіяся въ томъ, что перманентныя оси,

---

[1]) E. Beltrami. Sulla teoria degli assi di rotazione. Collectanea in memoriam Chelini. 1881.

для которыхъ данная точка служитъ перманентнымъ центромъ, направлены по нормалямъ къ софокуснымъ эллипсоидамъ, проходящимъ черезъ эту точку, и что каждая точка пространства есть центръ удара для двухъ линій удара, направленныхъ по нормалямъ къ софокуснымъ конусамъ 2-го порядка. Далѣе Beltrami прилагаетъ свои формулы къ розысканію мѣста центровъ вращеній для осей параллельныхъ и къ другимъ подобнымъ вопросамъ. Нужно однако признать, что благодаря тому, что оси координатъ принимаются всегда одни и тѣ-же, именно главныя оси инерціи, уравненія поверхностей представляются въ формѣ очень сложной, чѣмъ, конечно, затрудняется ихъ изслѣдованіе.

Изъ всего вышеизложеннаго видно, что вниманіе изслѣдователей было обращено главнымъ образомъ на геометрическія мѣста центровъ вращеній и удара, а не на распредѣленіе самихъ осей. Причину этого, какъ кажется, слѣдуетъ искать отчасти въ механическомъ значеніи центровъ перманентныхъ, отъ которыхъ обобщеніемъ перешли къ центрамъ вращенія и удара, отчасти-же въ томъ, что центральныя оси силъ и оси вращеній не представляютъ какой-либо геометрической формы, такъ какъ любая прямая пространства можетъ быть принята за ось вращенія, и всегда можно будетъ подыскать такую центральную ось, а къ ней силу и пару, чтобы она вызвала требуемое движеніе, точно также и наоборотъ, любая прямая пространства можетъ быть принята за ось силъ; тогда легко подобрать такъ силу и пару, чтобы въ результатѣ получилось вращеніе. Нужно было сдѣлать какое-либо дополнительное условіе. Одно изъ возможныхъ условій было сдѣлано Н. Б. Делоне, который разсматривалъ [1]) импульсивныя силы, соотвѣт-

[1]) Н. Б. Делоне. Къ вопросу объ ударѣ твердыхъ тѣлъ. Двѣ статьи въ Матем. Сбор. Т. XII и XIII. Москва.

ствующія данной приведенной массѣ [1]), и оси вызываемыхъ ими винтовыхъ движеній. Этотъ интересный вопросъ, заслуживающій обстоятельнаго изслѣдованія, не даетъ однако простѣйшаго условія, которое должно лежать въ основаніи теоріи импульсивныхъ силъ, между прочимъ и потому, что какъ это не трудно доказать, даетъ только для ударовъ комплексы 2-го порядка, для осей же винтовыхъ движеній комплексы порядка 6-го. Въ этомъ отношеніи гораздо удобнѣе классификація по параметрамъ.

Извѣстно, что Ball [2]) характеризуетъ каждую систему импульсивныхъ силъ центральною осью съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ равнымъ параметру системы силъ, т. е. такъ называемымъ импульсивнымъ винтомъ; точно также каждое перемѣщеніе характеризуется осью винтоваго движенія съ нанесеннымъ на ней параметромъ, т. е. такъ называемымъ мгновеннымъ винтомъ [3]). Будемъ обозначать для краткости импульсивный винтъ параметра p, вызывающій винтъ мгновенный параметра π черезъ (C_p^π), а соотвѣтствующій винтъ мгновенный черезъ (Γ_π^p). Если положеніе (C) импульсивнаго винта дано, то тѣмъ самымъ опредѣляется однозначно тотъ параметръ p, который долженъ ему быть приписанъ, чтобы получилось движеніе (Γ_π^p) съ опредѣленнымъ параметромъ π. Если-же, наоборотъ, дается параметръ p винта (C), то его положеніе опредѣляется лишь до нѣкоторой степени, такъ что су-

---

[1]) Н. Е. Жуковскій называетъ приведенными массами массы тѣхъ двухъ сферъ, которыя ударяются съ такою-же живою силою, какъ и два данныхъ тѣла. См. N. Joukovsky. Sur la percussion des corps. Liouville, Journal, 3me Série. T. IV. 1878.

[2]) R. S. Ball. The Theory of Screws. Dublin, 1876.

[3]) Параметромъ имп. винта наз. отношеніе момента пары къ силѣ и онъ равенъ нулю въ случаѣ дѣйствія одной силы. Параметръ винта мгнов. есть отношеніе поступательной слагающей винтоваго движенія къ вращательной; онъ равенъ нулю въ случаѣ простаго вращенія.

ществуетъ нѣкоторая геометрическая форма прямыхъ, которыя могутъ быть приняты за оси винтовъ (C_p^π). Если дана ось (Г) винтоваго движенія, то тѣмъ самымъ опредѣляется ея параметръ π, если желаемъ, чтобы соотвѣтствующій импульсивный винтъ имѣлъ параметръ p. Если-же, наоборотъ, дается только параметръ π, то распредѣленіе осей (Γ_π^p) подчинено извѣстному закону. Такимъ образомъ существуютъ двѣ геометрическія формы прямыхъ (Γ_π^p) и (C_p^π) такого свойства, что каждой прямой первой соотвѣтствуетъ одна прямая во второй и наоборотъ. Обѣ эти формы суть линейныя комплексы 2-го порядка. Этотъ самый общій случай допускаетъ частныя, когда-либо $p=0$, т. е. система силъ приводится къ одной силѣ, либо $\pi=0$, т. е. движеніе есть простое вращеніе, либо когда и то и другое имѣетъ мѣсто. Всего-же 4 случая: 1) (C_p^π) и (Γ_π^p), 2) (C_o^π) и (Γ_π^o), 3) (C_p^o) и (Γ_o^p), и 4) (C_o^o) и (Γ_o^o), дающихъ 8 линейныхъ комплексовъ 2-го порядка. На послѣдніе два комплекса обратимъ впервые вниманіе G. Darboux [1]), на остальные-же D. Padelletti въ своемъ мемуарѣ [2]), написанномъ по поводу статьи U. Masoni [3]), разсматривавшаго такія импульсивныя силы, которыя оказываютъ одно и то-же дѣйствіе на одну и ту-же точку нѣкотораго твердаго тѣла. D. Padelletti показалъ, что основная теорема мемуара U. Masoni, заключающаяся въ томъ, что линіи дѣйствія искомыхъ силъ представляютъ линейную кон-

---

[1]) G. Darboux. Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps. Bull. des sciences mathém. T. IV. 1880.

[2]) D. Padelletti. Sui sistemi di forze impulsive. Rendinconto dall' academia di Napoli. An. XXIII 1884, fasc. 9. Объ этомъ мемуарѣ мы узнали уже тогда, когда первая глава этой статьи была отпечатана, а потому при формулировкѣ теоремъ на стр. 6-й и 7-й не сдѣлано надлежащей ссылки.

[3]) U. Mazoni. Sulle forze impulsive che hanno la medesima azione sopra uno stesso punto di un sistema rigida. Ibid. fasc. 7.

груенцію, а также и другія болѣе общія свойства, непосредственно вытекаютъ изъ того обстоятельства, что координаты (слагающія и моменты) системы импульсивныхъ силъ суть линейныя функціи отъ координатъ (слагающихъ и моментовъ) движенія. Отсюда слѣдуетъ, что всякому однородному уравненію n-ой степени между одними координатами соотвѣтствуетъ уравненіе такой-же степени между другими. При постоянномъ-же параметрѣ однородному уравненію n-ой степени между подобными координатами соотвѣтствуетъ такое-же уравненіе между координатами оси соотвѣтствующаго винта, которая слѣдовательно принадлежитъ къ комплексу n-аго порядка. Вопросъ, поставленный U. Masoni, приводитъ къ двумъ однороднымъ линейнымъ уравненіямъ между координатами движенія, а такъ какъ параметръ импульсивныхъ винтовъ у него равенъ нулю, то отсюда и вытекаетъ, что послѣдніе суть общіе лучи двухъ линейныхъ комплексовъ, т. е. составляютъ конгруенцію. Эти общія соображенія приводятъ D. Padelletti къ заключенію, что разсмотрѣнные выше комплексы (C_p^π) и (Γ_π^p) должны быть втораго порядка, ибо связь между параметромъ и слагающими и моментами представляется однородною функціей 2-ой степени послѣднихъ.

Основателемъ теоріи линейныхъ комплексовъ считается Plücker, который и изслѣдовалъ общее уравненіе комплекса 2-го порядка [1]). Но такъ какъ послѣднее содержитъ 19 независимыхъ параметровъ, то отсюда являются 58 различныхъ типовъ, смотря по тому простѣйшему виду, къ которому можетъ быть приведено его уравненіе при линейныхъ преобразованіяхъ. Съ каждой простѣйшей аналитической формой связаны геометрическія особенности, заключающіяся, напр., въ различныхъ видахъ такъ называе-

---

[1]) J. Plücker. Neue Geometrie des Raumes. Leipzig, 1868.

мыхъ поверхностей особенностей комплекса, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что для ихъ точекъ конусы 2-го порядка лучей комплекса обращаются въ двѣ плоскости, а кривыя 2-го порядка, обертываемыя лучами, лежащими въ одной плоскости, для касательныхъ плоскостей къ поверхности преобразуются въ двѣ точки.

Классификація комплексовъ втораго порядка создана работами Weierstrass'a, Klein'a и Weiler'a [1]). Извѣстно, что между координатами $p_1, \ldots p_6$ прямой, выраженныхъ въ функціи координатъ двухъ точекъ, на ней лежащихъ, существуетъ тождественное соотношеніе

$$P(p_k) = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0. \qquad (a)$$

Klein доказалъ, что при линейномъ преобразованіи какой-либо однородной функціи этихъ количествъ, напр., лѣвой части уравненія комплекса 2-го порядка:

$$\Omega(p_k) = 0,$$

можно совершенно отвлечься отъ той связи, какая существуетъ между координатами p_k и координатами точекъ прямой, а разсматривать p_k какъ новыя перемѣнныя и при преобразованіи полагать:

$$p_k = \sum_i a_i p'_i,$$

но при одномъ условіи, чтобы въ новыхъ перемѣнныхъ функція P имѣла прежній видъ, и мы имѣли-бы вмѣсто уравненія (a) такое:

$$P(p'_k) = 0.$$

---

[1]) C. Weierstrass. Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen; Monatsberichte d. Berl. Acad. Mai 1868.

F. Klein. Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Gr. zwischen Linien-Coord. auf eine canon. Form. Bonn, 1868. Эта статья вновь напечатана въ XXIII томѣ Mathem. An. 1884.

A. Weiler. Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Mathem. An. Bd. VII, 1874.

Извѣстно-же, что Weierstrass указалъ способы одновременнаго приведенія двухъ квадратичныхъ формъ, какими у насъ будутъ формы Ω и F, къ каноническому виду. При такомъ преобразованіи функція P приведется или къ суммѣ однихъ только квадратовъ шести функцій, линейныхъ относительно прежнихъ перемѣнныхъ, или четное число квадратовъ можетъ отсутствовать, и въ такомъ случаѣ вмѣсто каждыхъ двухъ квадратовъ войдетъ одно удвоенное произведеніе, какъ напр., это можно видѣть на слѣд. стр.; функція-же Ω составляется изъ тѣхъ-же функцій, что и P, также можетъ иногда состоять изъ однихъ квадратовъ, но уже умноженныхъ на постоянныя, вообще-же ея видъ сложнѣе, чѣмъ видъ функціи P. Такъ какъ отъ полученнаго такимъ образомъ вида функціи P легко перейти къ тому, который требуется по Klein'у, то естественно было классифицировать комплексы по тѣмъ формамъ, къ которымъ могутъ быть приведены ихъ уравненія преобразованіями Weierstrass'а. Та-же или другая форма, къ которой такимъ путемъ проводится Ω, зависитъ отъ слѣдующаго. Уравнявъ нулю дискриминантъ пучка формъ $\Omega+\lambda P$, получимъ уравненіе 6-ой степени относительно λ. Обозначимъ черезъ λ_1 одинъ изъ его корней, напр., ν-ой кратности, и предположимъ, что всѣ миноры 1-го порядка имѣютъ тотъ-же корень, но кратности ν', всѣ миноры 2-го порядка имѣютъ его въ ν''-ой кратности и т. д. Тогда $(\lambda-\lambda_1)^{\nu-\nu'}$, $(\lambda-\lambda_1)^{\nu'-\nu''}$, ... называются элементарными дѣлителями кратностей $(\nu-\nu')$, $\nu'-\nu'')$, ...

Элементарные дѣлители характерны для даннаго комплекса: они не мѣняются при линейномъ преобразованіи его уравненія, и отъ нихъ зависитъ та каноническая форма, къ которой можетъ быть оно приведено: по нимъ поэтому и производится классификація комплексовъ 2-го порядка. Допустимъ, напр., что уравненію даннаго комплекса соотвѣтствуютъ эл. дѣлители: $(\lambda-\lambda_1)$, $(\lambda-\lambda_2)^2$, $(\lambda-\lambda_3)^3$, что

кратко обозначаютъ такъ: (1 2 3). Тогда преобразованіе даетъ:

$$P = X_1^2 + 2X_2X_3 + (2X_4X_6 + X_5^2) = 0,$$

$$\Omega = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 . 2X_2X_3 + \lambda_3(2X_4X_6 + X_5^2) + 2X_4X_5 + X_2^2 = 0,$$

при этомъ послѣднее уравненіе можно еще упростить, соединяя его съ первымъ. Если напр. $\lambda_1 = \lambda_2$, то въ символическомъ обозначеніи (1 2 3) цифры 1 и 2 заключаютъ въ скобки: ((1 2)3), и подобнымъ-же образомъ поступаютъ и въ случаѣ равенства другихъ корней. Комплексы (1 2 3), ((1 2)3), ((1 2 3)),...... суть различные виды одной и той-же канонической формы. Комплексъ самой общей формы будетъ тотъ, который символически обозначается (111111). При этомъ функція P представляется въ видѣ суммы шести квадратовъ, а функція Ω:

$$\Omega = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2 + \lambda_5 X_5^2 + \lambda_6 X_6^2.$$

Къ такому виду приводятся комплексы импульсивныхъ винтовъ параметра p и соотвѣтствующихъ винтовъ перемѣщенія параметра π. Въ частныхъ-же случаяхъ, когда-либо $p=0$, либо $\pi=0$, получается форма (2 2 2), а когда и то и другое имѣетъ мѣсто, то получаемъ форму ((11)(11)(11)), т. е. тетраэдральный комплексъ.

Поверхностями особенностей будутъ: въ общихъ случаяхъ—поверхность 4-го пор. Kummer'a, для комплексовъ (C_o^π) и (Γ_o^p)—поверхность Steiner'a, также 4-го пор., для комплексовъ (C_p^o) и (Γ_π^o)— поверхность 3-го пор., наконецъ для остальныхъ двухъ (C_o^o) и (Γ_o^o) поверхностью особенностей служатъ главныя плоскости инерціи и плоскость безконечно удаленная.

Такъ какъ изъ послѣднихъ двухъ комплексовъ одинъ построенъ такъ точно относительно эллипсоида инерціи,

какъ другой относительно эллипсоида обратнаго, то для выясненія распредѣленія осей вращенія въ зависимости отъ распредѣленія импульсивныхъ винтовъ даннаго параметра, имъ соотвѣтствующихъ, нужно изслѣдовать кромѣ тетраэдральнаго еще комплексы (Γ_o^p) и (C_p^o).

Въ этомъ выпускѣ мы ограничиваемся изслѣдованіемъ комплексовъ тетраэдральнаго перманентныхъ осей и комплекса осей вращенія (Γ_o^p), вызываемыхъ импульсивными винтами даннаго параметра.

Въ гл. I даются общія уравненія комплексовъ (C_p^π) и (Γ_π^p), изслѣдуется, къ какимъ типамъ они принадлежатъ, и даются уравненія, связующія координаты импульсивнаго и мгновеннаго винтовъ. Для облегченія дальнѣйшаго изслѣдованія, въ этой главѣ всѣ уравненія преобразуются отъ осей инерціи къ новымъ осямъ, гдѣ ось Oz направлена какъ нибудь, а оси Ox и Oy лежатъ на на осяхъ сѣченія эллипсоида инерціи плоскостью перпендикулярной къ Oz.

Какъ было уже замѣчено, Plücker изслѣдовалъ общее уравненіе комплекса 2-го пор., но очевидно, что имъ не могло быть обращено вниманія на всѣ частные случаи, изъ коихъ нѣкоторые были разобраны другими геометрами. Такъ тетраэдральный комплексъ (Γ_o^o) подвергался многократному изслѣдованію, и можно указать учебникъ Reye, гдѣ различныя его свойства выведены синтетическимъ путемъ.

Не смотря на это въ гл. II этого выпуска помѣщается изслѣдованіе этого комплекса, отчасти въ виду того что различныя поверхности и кривыя комплекса, какъ онѣ описываются у Reye, кажутся намъ не вполнѣ опредѣленными, отчасти-же въ виду того, что въ теоріи осей вращенія разбираются такіе вопросы, какіе не могутъ найти себѣ мѣсто въ Geometrie der Lage. Какъ и тамъ, въ гл. II разобраны слѣдующіе случаи: распредѣленіе осей па-

раллельныхъ, лежащихъ въ одной діаметральной плоскости, проходящихъ черезъ данную точку, и лежащихъ въ какой-либо плоскости, но кромѣ того изслѣдуются каждый разъ тѣ геометрическія формы линій удара въ комплексѣ (C_o^o), которыя соотвѣтствуютъ перманентнымъ осямъ въ первой формѣ. Изслѣдованіе ведется путемъ, по преимуществу, синтетическимъ, хота затѣмъ даются уравненія встрѣчавшихся поверхностей и кривыхъ.

Комплексъ (Γ_o^p), не подвергавшійся, сколько мнѣ извѣстно, отдѣльному изслѣдованію, изслѣдуется такимъ-же порядкомъ въ гл. III аналитически, методомъ Plücker'а, при этомъ каждой его геометрической формѣ подыскивается ей соотвѣтствующая въ комплексѣ (C_p^o).

Что касается центровъ вращеній и ударовъ, то намъ казалось необходимымъ изложить методъ Beltrami по крайней мѣрѣ для случая центровъ перманентныхъ, хотя мы имъ пользуемся только для вывода общихъ теоремъ, въ болѣе-же частныхъ случаяхъ, когда результатъ можно было получить проще, онъ получался изъ тѣхъ уравненій, какія при этомъ были.

Одесса, 25-го Марта 1891 г.

Геометрическія мѣста въ теоріи осей вращенія.

И. Занчевскаго.

Des lieux géométriques dans la théorie des axes de rotation.

par I. Zantchewsky.

ГЛАВА I.

Комплексы импульсивныхъ и мгновенныхъ винтовъ.

§ 1. Мы можемъ двояко опредѣлить какую-либо прямую: или координатами двухъ ея точекъ, или координатами двухъ плоскостей, пересѣченіе которыхъ она представляетъ. Прямую, опредѣленную первымъ способомъ, называютъ лучемъ, при второмъ-же опредѣленіи—осью [1]).

Обозначимъ черезъ $(x_1 y_1 z_1)$ и (xyz) координаты двухъ точекъ M_1 и M прямой; за координаты ея можно принять проэкціи и моменты отрѣзка M_1M по отношенію къ тремъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ координатъ, т. е. выраженія:

$$x_0 = x - x_1, \quad y_0 = y - y_1, \quad z_0 = z - z_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$l_0 = y_1 z - z_1 y, \; m_0 = z_1 x - x_1 z, \; n_0 = x_1 y - y_1 x, \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

причемъ послѣднія три могутъ быть представлены въ видѣ:

$$l_0 = y_1 z_0 - z_1 y_0, \; m_0 = z_1 x_0 - x_1 z_0, \; n_0 = x_1 y_0 - y_1 x_0 \ldots\ldots \quad (3)$$

---

[1]) Объ изложенномъ въ этомъ § см. болѣе подробно у Plücker'а «Neue Geometrie des Raumes». Leipzig. 1868. p. 1—17., а также въ моей «Теоріи винтовъ». Одесса, 1889 г. стр. 1—6.

Уравненія прямой представляются однородными функціями этихъ количествъ и за нихъ могутъ быть приняты любыя два изъ слѣдующихъ:

$$\left.\begin{aligned} yz_0 &= zy_0 + l_0, \\ zx_0 &= xz_0 + m_0, \\ xy_0 &= yx_0 + n_0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

такъ что отношенія пяти изъ нихъ къ шестой опредѣляютъ прямую; кромѣ того между ними существуетъ тождественное соотношеніе:

$$l_0x_0 + m_0y_0 + n_0z_0 = 0, \tag{5}$$

такъ что независимыхъ перемѣнныхъ, согласно числу параметровъ въ уравненіяхъ прямой, четыре. Въ силу этихъ соображеній мы вправѣ положить:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1, \tag{6}$$

т. е. что длина отрѣзка M_1M равна единицѣ.

Обозначимъ черезъ $(t_1u_1v_1)$ и (tuv) координаты двухъ плоскостей, проходящихъ черезъ нашу прямую [1]), и составимъ изъ нихъ выраженія, аналогичныя предыдущимъ:

$$t_0 = t - t_1, \quad u_0 = u - u_1, \quad v_0 = v - v_1, \tag{7}$$

$$p_0 = u_1v - v_1u, \; q_0 = v_1t - t_1v, \; r_0 = t_1u - u_1t, \tag{8}$$

такъ что будемъ имѣть, какъ прежде:

$$\begin{gathered} p_0 = u_1v_0 - v_1u_0, \; q_0 = v_1t_0 - t_1v_0, \; r_0 = t_1u_0 - u_1t_0, \\ p_0t_0 + q_0u_0 + r_0v_0 = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Эти выраженія могутъ быть также приняты за координаты прямой, причемъ независимыхъ перемѣнныхъ опять четыре.

---

[1]) Подъ координатами плоскости подразумѣваютъ коэффиціенты t, u и v въ ея уравненіи, представленномъ въ видѣ:

$$tx + uy + vz + 1 = 0.$$

Между обѣими системами координатъ существуетъ простая связь:

$$x_0 : y_0 : z_0 : l_0 : m_0 : n_0 = p_0 : q_0 : r_0 : t_0 : u_0 : v_0, \qquad (10)$$

откуда слѣдуетъ, что въ каждомъ уравненіи, однородномъ относительно первой системы координатъ, можно сдѣлать замѣну

$$x_0, \ y_0, \ z_0, \ l_0, \ m_0, \ n_0$$

на

$$p_0, \ q_0, \ r_0, \ t_0, \ u_0, \ v_0$$

и обратно.

Если вмѣсто принятой системы координатныхъ осей $Oxyz$ возьмемъ другую также прямоугольную, $Ox'y'z'$, но съ тѣмъже началомъ, то преобразованіе координатъ $(x_0, y_0, \ldots)$ въ новыя $(x_0', y_0', \ldots)$ совершается такъ-же, какъ если-бы $(x_0 y_0 z_0)$ и $(l_0 m_0 n_0)$ представляли координаты точекъ. Это-же относится къ группамъ (p_0, q_0, r_0) и (t_0, u_0, v_0).

Всякому однородному уравненію n-ой степени относительно координатъ прямой соотвѣтствуетъ особое распредѣленіе прямыхъ въ пространствѣ, представляющее такъ называемый линейный комплексъ n-аго порядка.

§ 2. Каждая система импульсивныхъ силъ, дѣйствующая на твердое тѣло, характеризуется либо слагающими и моментами относительно осей $Oxyz$:

$$X, \ Y, \ Z, \ L, \ M, \ N,$$

либо положеніемъ центральной оси (C), величиной равнодѣйствующей R и моментомъ G соотвѣтствующей пары. Отношеніе:

$$G : R = p \qquad (11)$$

называютъ параметромъ, прямую-же (C) съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ равнымъ p — *импульсивнымъ винтомъ*[1]), и мы можемъ сказать, что система импульсивныхъ силъ характери-

---

[1]) Понятіе о винтѣ было введено въ механику R. Ball'емъ. См. его «The Theorie of Screws». Dublin. 1876. § 1.

зуется импульсивнымъ винтомъ и равнодѣйствующей R. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ полагать:

$$R=1. \tag{12}$$

Обозначивъ через $(x_0 y_0, \ldots)$ координаты прямой (C), будемъ имѣть [1])

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=X, & y_0=Y, & z_0=Z, \\ l_0=L-pX, & m_0=M-pY, & n_0=N-pZ, \end{array}\right\} \tag{13}$$

$$p=LX+MY+NZ, \tag{14}$$

$$X^2+Y^2+Z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2=1. \tag{15}$$

Разсматриваемой системѣ импульсивныхъ силъ соотвѣтствуетъ безконечно-малое винтовое движеніе вокругъ мгновенной оси (Γ). Назовемъ через $d\omega$ и $d\tau$ вращательную и поступательную слагающія этого движенія, а выраженіе:

$$\frac{d\tau}{d\omega}=\pi \tag{16}$$

параметромъ. Тогда безконечно-малое движеніе будетъ характеризоваться прямой (Γ) съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ π, т. е. такъ называемымъ *мгновеннымъ винтомъ* и количествомъ вращенія $d\omega$. Разлагая же перемѣщеніе на три вращенія вокругъ осей $Oxyz$ и параллельныя этимъ осямъ поступательныя движенія, мы можемъ, предполагая оси координатъ направленными по главнымъ осямъ инерціи, представить эти слагающія въ видѣ:

$$d\omega.\Xi,\ d\omega.\mathrm{H},\ d\omega.\mathrm{Z},\ d\omega.\Lambda,\ d\omega.\mathrm{M},\ d\omega.\mathrm{N}, \tag{17}$$

гдѣ:

$$\Xi^2+\mathrm{H}^2+\mathrm{Z}^2=1. \tag{18}$$

Обозначивъ через a^2, b^2, c^2 главные радіусы инерціи, а через M_0 массу тѣла, мы выразимъ связь между системой

---

[1]) См. «Теорію винтовъ». стр. 23.

импульсивныхъ силъ и ей соотвѣтствующимъ движеніемъ слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{array}{lll}\Xi = Q.\dfrac{L}{a^2}, & \mathrm{H} = Q.\dfrac{M}{b^2}, & Z = Q.\dfrac{N}{c^2}, \\ \Lambda = Q.X, & \mathrm{M} = Q.Y, & \mathrm{N} = Q.Z,\end{array}\right\} \qquad (19)$$

гдѣ

$$1 : Q = M_0 \frac{d\omega}{dt}. \qquad (20)$$

Положеніе оси (Г) винтоваго движенія опредѣлится уравненіями аналогичными ур. (13) и (14), только вмѣсто X, Y,..... войдутъ Ξ, H,..... . Обозначивъ черезъ (ξ_0, η_0,.....) координаты прямой (Г) и замѣнивъ Ξ, H,.... изъ ур. (19), получимъ, отбросивъ общій множитель Q:

$$\left.\begin{array}{lll}\xi_0 = \dfrac{L}{a^2}, & \eta_0 = \dfrac{M}{b^2}, & \zeta_0 = \dfrac{N}{c^2}, \\ \lambda_0 = X - \pi\dfrac{L}{a^2}, & \mu_0 = Y - \pi\dfrac{M}{b^2}, & \nu_0 = Z - \pi\dfrac{N}{c^2},\end{array}\right\} \qquad (21)$$

$$\pi = \frac{\dfrac{LX}{a^2} + \dfrac{MY}{b^2} + \dfrac{NZ}{c^2}}{\dfrac{L^2}{a^4} + \dfrac{M^2}{b^4} + \dfrac{N^2}{c^4}} \qquad (22)$$

§ 3. Если изъ ур. (21) опредѣлимъ X, Y,...., разсматривая π какъ данное, и вставимъ ихъ значенія въ ур. (14), то получимъ:

$$p = a^2\xi_0(\lambda_0 + \pi\xi_0) + b^2\eta_0(\mu_0 + \pi\eta_0) + c^2\zeta_0(\nu_0 + \pi\zeta_0). \qquad (23)$$

Но такъ какъ вслѣдствіе ур. (15):

$$(\lambda_0 + \pi\xi_0)^2 + (\mu_0 + \pi\eta_0)^2 + (\nu_0 + \pi\zeta_0)^2 = 1, \qquad (24)$$

то, перемноживъ ур. (23) и (24), получаемъ:

$$(a^2-p\pi)\pi\xi_0^2+(b^2-p\pi)\pi\eta_0^2+(c^2-p\pi)\pi\zeta_0^2-p(\lambda_0^2+\mu_0^2+\nu_0^2)+$$
$$+a^2\lambda_0\xi_0+b^2\mu_0\eta_0+c^2\nu_0\zeta_0=0. \qquad (25)$$

Опредѣленныя изъ ур. (21) значенія X, Y,.... внесемъ также въ ур. (13); тогда связь между координатами прямыхъ (C) и (Γ) и параметрами выразится уравненіями:

$$\left.\begin{array}{c} x_0=\lambda_0+\pi\xi_0,\ y_0=\mu_0+\pi\eta_0,\ z_0=\nu_0+\pi\zeta_0 \\ l_0=a^2\xi_0-p(\lambda_0+\pi\xi_0),\ m_0=b^2\eta_0-p(\mu_0+\pi\eta_0), \\ n_0=c^2\zeta_0-p(\nu_0+\pi\zeta_0). \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Ур. (23) опредѣляетъ параметръ, а ур. (26)—положеніе винта (C), если извѣстны параметръ и положеніе винта (Γ).

Если предположимъ параметры p и π постоянными, то координаты винта (Γ) связаны однородными ур. (25) второй степени и представляютъ слѣдовательно линейный комплексъ втораго порядка:

Оси винтовъ перемѣщенія даннаго параметра, соотвѣтствующія импульсивнымъ винтамъ иного даннаго параметра, представляютъ линейный комплексъ втораго порядка.

Если-же обратно опредѣлимъ X, Y,.... изъ ур. (13) и вставимъ полученныя значенія въ (22), то будемъ имѣть:

$$\pi=\frac{(l_0+px_0)\frac{x_0}{a^2}+(m_0+py_0)\frac{y_0}{b^2}+(n_0+pz_0)\frac{z_0}{c^2}}{\frac{(l_0+px_0)^2}{a^4}+\frac{(m_0+py_0)^2}{b^4}+\frac{(n_0+pz_0)^2}{c^4}} \qquad (27)$$

Это уравненіе даетъ намъ параметръ винта перемѣщенія, если извѣстны положеніе и параметръ импульсивнаго винта.

Вставивъ тѣ-же значенія въ ур. (21), получимъ для координатъ соотвѣтствующаго винта (Г):

$$\left.\begin{array}{l}\xi_0=\frac{l_0+px_0}{a^2},\qquad \eta_0=\frac{m_0+py_0}{b^2},\qquad \zeta_0=\frac{n_0+pz_0}{c^2}\\ \lambda_0=x_0-\pi\frac{l_0+px_0}{a^2},\ \mu_0=y_0-\pi\frac{m_0+py_0}{b^2},\ \nu_0=z_0-\pi\frac{n_0+pz_0}{c^2}\end{array}\right\}\quad(28)$$

Эти уравненія мы могли-бы получить, рѣшая относительно ξ_0, ζ_0, ... ур. (26).

Ур. (27) при данныхъ p и π даетъ такую теорему:

Импульсивные винты даннаго параметра, вызывающіе винты перемѣщенія иного даннаго параметра, представляютъ линейный комплексъ втораго порядка.

Такимъ образомъ мы имѣемъ два линейныхъ комплекса винтовъ импульсивныхъ и мгновенныхъ, находящихся между собою въ такомъ отношеніи, что каждой прямой одного изъ нихъ соотвѣтствуетъ одна опредѣленная прямая другого.

Ур. (27) можно представить въ видѣ:

$$(a^2-p\pi)\frac{p}{a^4}x_0^2+(b^2-p\pi)\frac{p}{b^4}y_0^2+(c^2-p\pi)\frac{p}{c^4}z_0^2-$$
$$-\pi\left(\frac{l_0^2}{a^4}+\frac{m_0^2}{b^4}+\frac{n_0^2}{c^4}\right)+\frac{a^2-2p\pi}{a^4}l_0x_0+\frac{b^2-2p\pi}{b^4}m_0y_0+$$
$$+\frac{c^2-2p\pi}{c^4}n_0z_0=0. \qquad (29)$$

Обратимъ вниманіе на то, что какъ между системой координатъ $(x_0, y_0, \ldots)$, такъ и между системой $(\xi_0, \eta_0, \ldots)$ должно существовать соотношеніе вида (5). Эти соотношенія и имѣютъ мѣсто: для первой системы въ силу ур. (25), для второй—въ силу ур. (29).

При частныхъ значеніяхъ параметровъ p и π уравненія комплексовъ (25) и (29) упрощаются. Такъ, если система им-

пульсивныхъ силъ приводится къ одной силѣ, то p есть нуль, и ур. (25) и (29) принимаютъ видъ:

$$\pi(a^2\xi_0^2+b^2\eta_0^2+c^2\zeta_0^2)+a^2\lambda_0\xi_0+b^2\mu_0\eta_0+c^2\nu_0\zeta_0=0, \quad (25_1)$$

$$\pi\left(\frac{l_0^2}{a^4}+\frac{m_0^2}{b^4}+\frac{n_0^2}{c^4}\right)-\frac{l_0x_0}{a^2}-\frac{m_0y_0}{b^2}-\frac{n_0z_0}{c^2}=0. \quad (29_1)$$

Если мы желаемъ, чтобы система импульсивныхъ силъ параметра p вызвала одно вращеніе вокругъ оси, то должно положить π равнымъ нулю, и мы будемъ имѣть:

$$p\ (\lambda_0^2+\mu_0^2+\nu_0^2)-a^2\lambda_0\xi_0-b^2\mu_0\eta_0-c^2\nu_0\zeta_0=0, \quad (25_2)$$

$$p\ \left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)+\frac{l_0x_0}{a^2}+\frac{m_0y_0}{b^2}+\frac{n_0z_0}{c^2}=0. \quad (29_2)$$

Наконецъ, если одна импульсивная сила вызываетъ вращеніе вокругъ оси, то оба параметра p и π суть нули, и мы получаемъ уравненія:

$$a^2\lambda_0\xi_0+b^2\mu_0\eta_0+c^2\nu_0\zeta_0=0, \quad (25_3)$$

$$\frac{l_0x_0}{a^2}+\frac{m_0y_0}{b^2}+\frac{n_0z_0}{c^2}=0. \quad (29_3)$$

Замѣтимъ, что въ общемъ случаѣ, когда параметры отличны отъ нулей, всякая прямая комплекса (25) есть ось винта перемѣщенія, и всякая прямая комплекса (29) есть ось винта импульсивнаго. Во всѣхъ-же частныхъ случаяхъ, прямыя, проходящія черезъ центръ инерціи, должны подлежать отдѣльному изслѣдованію.

Такъ, въ случаѣ когда p равно нулю, импульсивная сила, проходящая черезъ центръ инерціи, вызываетъ поступательное движеніе, слѣдовательно $d\omega=0$, и слагающія перемѣщенія не могутъ быть представлены въ видѣ (17), ибо тамъ

принято, что $d\omega$ отлично отъ нуля. Въ этомъ случаѣ π не можетъ имѣть любаго значенія, а всегда безконечно велико (16); винтъ (Г), представляя направленіе поступательнаго движенія, параллеленъ силѣ.

При $\pi=0$ комплексъ (29_2) не даетъ лучей, проходящихъ черезъ центръ инерціи, между тѣмъ какъ всегда существуетъ система силъ, эквивалентная парѣ, вызывающая вращеніе вокругъ оси, проходящей черезъ эту точку. Этотъ случай исключается благодаря принятому условію (12).

Благодаря этимъ соображеніямъ, при изслѣдованіи комплексовъ мы не будемъ обращать вниманіе на лучи, выходящіе изъ центра инерціи.

§ 4. Ур. (25) и (29) имѣютъ видъ:

$$Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+Dl_0^2+Em_0^2+Fn_0^2+2Gl_0x_0+2Hm_0y_0+ \\ +2Kn_0z_0=0. \qquad (30)$$

Для того чтобы опредѣлить, къ какому типу принадлежитъ такой комплексъ, мы должны, умноживъ лѣвую часть уравненія:

$$l_0x_0+m_0y_0+n_0z_0=0$$

на множителя 2λ, придать къ лѣвой части уравненія комплекса и уравнять нулю дискриминантъ полученной такимъ образомъ квадратичной формы [1]). Уравненіе дискриминанта будетъ:

$$\begin{vmatrix} A, & 0, & 0, & G-\lambda, & 0, & 0 \\ 0, & B, & 0, & 0, & H-\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & C, & 0, & 0, & K-\lambda \\ G-\lambda, & 0, & 0, & D, & 0, & 0 \\ 0, & H-\lambda, & 0, & 0, & E, & 0 \\ 0, & 0, & K-\lambda, & 0, & 0, & F \end{vmatrix}=0, \qquad (31)$$

---

[1]) См. A. Weiler. Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Math. An. Bd. VII. 1874. p. 145.

или, раскрывъ опредѣлитель:

$$(G-\lambda)^2(H-\lambda)^2(K-\lambda)^2+\sum BE(G-\lambda)^2(K-\lambda)^2+$$
$$+\sum BCEF(G-\lambda)^2-ABCDEF=0.$$

Лѣвая часть этого уравненія разлагается на множители:

$$\Big((G-\lambda)^2-AD\Big)\Big((H-\lambda)^2-BE\Big)\Big((K-\lambda)^2-CF\Big)=0,$$

такъ что будемъ имѣть такихъ шесть корней:

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_1=G+\sqrt{AD}, & \lambda_2=H+\sqrt{BE}, & \lambda_3=K+\sqrt{CF}, \\ \lambda_4=G-\sqrt{AD}, & \lambda_5=H-\sqrt{BE}, & \lambda_6=K-\sqrt{CF}. \end{array}\right\} \quad (32)$$

Остается разсмотрѣть, будутъ-ли эти корни обращать въ нули миноры нашего опредѣлителя. Если составить миноръ перваго порядка, выпуская изъ опредѣлителя первую горизонталь и первую вертикаль, то онъ окажется равнымъ произведенію изъ коэффиціента D на такой опредѣлитель четвертаго порядка, который обращается въ нуль при значеніяхъ λ равныхъ λ_2, λ_3, λ_5 и λ_6. Это показываетъ, что не всѣ миноры перваго порядка обращаются въ нуль при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_4$, т. е. что каждый изъ двучленовъ $(\lambda-\lambda_1)$ и $(\lambda-\lambda_4)$ есть то, что Weierstrass называетъ элементарнымъ дѣлителемъ. Такъ какъ то-же очевидно относится къ остальнымъ корнямъ, то по классификаціи Weiler'а комплексъ (30) принадлежитъ къ типу (*111111*)[1]. Особенною поверхностью комплекса служитъ поверхность Kummer'а, имѣющая 16 узловыхъ точекъ и 16 двойныхъ касательныхъ плоскостей. Къ такому типу принадлежатъ въ общемъ случаѣ комплексы (25) и (29) мгновенныхъ и импульсивныхъ винтовъ.

---

[1]) Ibid. p. 154.

При $D=E=F=0$ уравненіе (31) имѣетъ три корня двойной кратности, но ни одинъ изъ нихъ не будетъ корнемъ всѣхъ миноровъ перваго порядка. Такъ напр., миноръ, получающійся черезъ выпущеніе четвертой горизонтали и четвертой вертикали, можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія изъ коэффиціента A на опредѣлитель, обращающійся въ нуль только при значеніяхъ λ равныхъ λ_2 и λ_3. Это показываетъ, что выраженіе $(\lambda-\lambda_1)^2$ есть элементарный дѣлитель. Такъ какъ то-же относится и къ выраженіямъ $(\lambda-\lambda_2)^2$ и $(\lambda-\lambda_3)^2$, то комплексъ принадлежитъ къ типу (222) [1]). Къ такому типу принадлежатъ комплексы (25_1) и (29_2).

Комплексъ имѣетъ три двойныя линіи, лежащія въ одной плоскости. Поверхностью особенностей служитъ поверхность 3-го порядка, вида:

$$A'x^2+B'y^2+C'z^2+D'xyz=0.$$

Такъ какъ опредѣлитель (31) совершенно одинаково построенъ относительно коэффиціентовъ A, B, C, какъ относительно D, E, F, то мы вправѣ заключить, что при $A=B=C=0$ комплексъ приводится къ тому-же типу (222). Но такъ какъ роль этихъ коэффиціентовъ въ уравненіи комплекса иная, чѣмъ коэффиціентовъ D, E и F, то разсматриваемый комплексъ будетъ другимъ видомъ того-же типа [2]). То-же относится очевидно и къ комплексамъ (25_2) и (29_1). Комплексы эти также содержатъ три двойныя линіи, но выходящія изъ одной точки и составляющія трехгранный уголъ.

Уравненіе поверхности особенностей имѣетъ видъ:

$$A''x^2y^2+B''y^2z^2+C''x^2z^2+D''xyz=0.$$

Въ еще болѣе частномъ случаѣ, когда всѣ коэффиціенты A, B, C, D, E и F равны нулю, опредѣлитель, какъ и въ

---

[1]) Ibid. p. 193.
[2]) Ibid. p. 194.

предыдущемъ случаѣ, содержитъ три двойныхъ корня, но кромѣ того всѣ миноры перваго порядка содержатъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ корней въ простой кратности, и онъ вмѣстѣ съ тѣмъ не будетъ корнемъ для миноровъ втораго порядка. Комплексъ принадлежитъ къ типу $\Big((11)(11)(11)\Big)$ [1] и есть тетраэдральный комплексъ. Къ такому типу принадлежатъ комплексы (25_3) и (29_3). Поверхностью особенностей служатъ для нихъ три координатныя плоскости и плоскость безконечно удаленная.

§ 5. Такъ какъ при изслѣдованіи комплексовъ въ слѣдующихъ главахъ намъ придется относить ихъ уравненія къ осямъ какого-либо сѣченія эллипсоида инерціи и къ нормали къ этому сѣченію, то займемся здѣсь необходимыми преобразованіями.

Пусть уравненіе эллипсоида отнесено къ центру, къ прямоугольнымъ осямъ и имѣетъ видъ

$$U=1,$$

гдѣ U однородная функція второй степени. Если провести въ эллипсоидѣ какой-нибудь радіусъ векторъ $OM=r_1$, образующій съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ α_1, β_1, γ_1, той какъ извѣстно, всегда будетъ существовать въ эллипсоидѣ такое сѣченіе, для котораго r_1 будетъ служить осью. Для опредѣленія этого сѣченія нужно изъ центра эллипсоида описать шаръ радіуса r_1 и найти ту кривую, по которой онъ пересѣкаетъ эллипсоидъ инерціи; затѣмъ построить конусъ, проходящій черезъ эту кривую и имѣющій вершину въ центрѣ, и провести къ нему чрезъ OM касательную плоскость; она и дастъ искомое сѣченіе [2]).

Полагая $\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{1}{r_1^2}$, будемъ имѣть для конуса уравненіе

$$U-\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2+z^2)=0.$$

[1]) Ibid. p. 169.

[2]) См. W. Fiedler. Analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1879. I. Th. p. 118.

Обозначивъ затѣмъ черезъ U_1 то значеніе, которое получитъ функціи U, если вмѣсто x, y и z внесемъ α_1 β_1 и γ_1, будемъ имѣть уравненіе плоскости касательной къ конусу и проходящей черезъ OM:

$$\left(\frac{dU_1}{d\alpha_1}-\lambda\alpha_1\right)x+\left(\frac{dU_1}{d\beta_1}-\lambda\beta_1\right)y+\left(\frac{dU_1}{d\gamma_1}-\lambda\gamma_1\right)z=0. \tag{33}$$

Если назовемъ r_1 первой осью этого сѣченія, то вторая ось r_2 найдется какъ пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью перпендикулярной къ первой оси, т. е. съ плоскостью

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=0. \tag{34}$$

Рѣшивъ совмѣстно оба ур. (33) и (34), найдемъ для направляющихъ косинусовъ второй оси r_2 выраженія:

$$\alpha_2=C.\begin{vmatrix}\beta_1 & \dfrac{du_1}{d\beta_1}\\ \gamma_1 & \dfrac{du_1}{d\gamma_1}\end{vmatrix},\quad \beta_2=C.\begin{vmatrix}\gamma_1 & \dfrac{du_1}{d\gamma_1}\\ \alpha_1 & \dfrac{du_1}{d\alpha_1}\end{vmatrix},\quad \gamma_2=C.\begin{vmatrix}\alpha_1 & \dfrac{du}{d\alpha_1}\\ \beta_1 & \dfrac{du}{d\beta_1}\end{vmatrix}, \tag{35}$$

гдѣ C— коэффиціентъ пропорціональности.

Предположимъ, что вторая ось движется въ плоскости (P):

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

тогда первая описываетъ конусъ втораго порядка:

$$\alpha\left(z\frac{dU}{dy}-y\frac{dU}{dz}\right)+\beta\left(x\frac{dU}{dz}-z\frac{dU}{dx}\right)+\gamma\left(y\frac{dU}{dx}-x\frac{dU}{dy}\right)=0. \tag{36}$$

Этотъ конусъ будемъ называть конусомъ осей, соотвѣтствующимъ плоскости (P), или просто конусомъ осей. Въ частномъ случаѣ, когда эллипсоидъ отнесенъ къ осямъ, то

$$U=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1; \tag{37}$$

и если ввести обозначенія:

$$A_1=c^2-b^2,\ B_1=a^2-c^2,\ C_1=b^2-a^2, \tag{38}$$

то для конуса осей получаемъ уравненіе

$$A_1 \alpha yz + B_1 \beta xz + C_1 \gamma xy = 0. \tag{39}$$

Пересѣченіе конуса осей съ плоскостью (P) даетъ двѣ образующія, оси сѣченія эллипсоида плоскостью (P). Обозначивъ черезъ $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ направляющіе косинусы одной изъ нихъ, а черезъ X_1 — обратное значеніе квадрата длины лежащаго на ней радіуса вектора эллипсоида, будемъ имѣть для опредѣленія этихъ четырехъ величинъ уравненія:

$$A_1 \alpha \beta_1 \gamma_1 + B_1 \beta \alpha_1 \gamma_1 + C_1 \gamma \alpha_1 \beta_1 = 0,$$
$$\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1 = 0,$$
$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1,$$
$$X_1 = a^2 \alpha_1^2 + b^2 \beta_1^2 + c^2 \gamma_1^2 .$$

Исключивъ β изъ первыхъ двухъ уравненій, получимъ:

$$\gamma_1 \alpha \Big(\beta_1^2 (c^2 - b^2) - \alpha_1^2 (a^2 - c^2) \Big) + \alpha_1 \gamma \Big(\beta_1^2 (b^2 - a^2) - \gamma_1^2 (c^2 - a^2) \Big) = 0,$$

или

$$\gamma_1 \alpha (X_1 - c^2) - \alpha_1 \gamma (X_1 - a^2) = 0,$$

такъ что

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{X_1 - c^2}{X_1 - a^2} \frac{\alpha}{\gamma};$$

также получимъ

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{X_1 - c^2}{X_1 - b^2} \frac{\beta}{\gamma},$$

и можно положить:

$$\alpha_1 = K_1 \frac{\alpha}{a^2 - X_1}, \quad \beta_1 = K_1 \frac{\beta}{b^2 - X_1}, \quad \gamma_1 = K_1 \frac{\gamma}{c^2 - X_1}, \tag{40}$$

гдѣ:

$$K_1 = 1 : \sqrt{\frac{\alpha^2}{(a^2 - X_1)^2} + \frac{\beta^2}{(b^2 - X_1)^2} + \frac{\gamma^2}{(c^2 - X_1)^2}} \tag{41}$$

Точно также, обозначивъ черезъ α_2, β_2, γ_2 направляющіе косинусы второй оси сѣченія эллипсоида плоскостью (P), а черезъ X_2 обратное значеніе квадрата ея длины, будемъ имѣть:

$$\alpha_2 = K_2 \frac{\alpha}{a^2 - X_2}, \quad \beta_2 = K_2 \frac{\beta}{b^2 - X_2}, \quad \gamma_2 = K_2 \frac{\gamma}{c^2 - X_2}, \qquad (40_1)$$

$$K_2 = 1 : \sqrt{\frac{\alpha^2}{(a^2 - X_2)^2} + \frac{\beta^2}{(b^2 - X_2)^2} + \frac{\gamma^2}{(c^2 - X_2)^2}}, \qquad (41_1)$$

что касается до значеній X_1 и X_2, то вслѣдствіе ур. (34) ихъ можно разсматривать какъ корни квадратнаго уравненія:

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - X} + \frac{\beta^2}{b^2 - X} + \frac{\gamma^2}{c^2 - X} = 0, \qquad (42)$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X_2 &= (b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2, \\ X_1 X_2 &= b^2c^2\alpha^2 + c^2a^2\beta^2 + a^2b^2\gamma^2. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Мы будемъ принимать, что

$$a^2 > b^2 > c^2, \quad X_1 > X_2 \qquad (44)$$

т. е. что черезъ X_1 названъ бо́льшій корень ур. (42).

На основаніи ур. (43) легко повѣрить формулы

$$\left.\begin{aligned} (a^2 - X_1)(a^2 - X_2) &= -B_1C_1\alpha^2, \\ (b^2 - X_1)(b^2 - X_2) &= -C_1A_1\beta^2, \\ (c^2 - X_1)(c^2 - X_2) &= -A_1B_1\gamma^2, \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

а отсюда и соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a^2\alpha^2}{(a^2 - X_1)(a^2 - X_2)} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2 - X_1)(b^2 - X_2)} + \frac{c^2\gamma^2}{(c^2 - X_1)(c^2 - X_2)} = 0, \\ &\frac{a^2\alpha^2}{a^2 - X_1} + \frac{b^2\beta^2}{b^2 - X_1} + \frac{c^2\gamma^2}{c^2 - X_1} = 1, \\ &\frac{a^2\alpha^2}{a^2 - X_2} + \frac{b^2\beta^2}{b^2 - X_2} + \frac{c^2\gamma^2}{c^2 - X_2} = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

причемъ нужно имѣть въ виду нѣкоторыя изъ слѣдующихъ тождествъ:

$$\left.\begin{array}{l}\sum A_1=0, \qquad \sum A_1a^2=0, \qquad \sum A_1(b^2+c^2)=0;\\ \sum A_1a^2(b^2+c^2)=-\sum A_1b^2c^2=-\sum A_1a^4=A_1B_1C_1.\end{array}\right\} \quad (47)$$

Кромѣ того, такъ какъ X_1 и X_2 суть обратныя значенія квадратовъ радіусовъ векторовъ эллипсоида, то

$$\left.\begin{array}{l}X_1=K_1^2\left(\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-X_1)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-X_1)^2}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-X_1)^2}\right),\\ X_2=K_2^2\left(\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-X_2)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(b^2-X_2)^2}+\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-X_2)^2}\right).\end{array}\right\} \quad (48)$$

Обозначимъ:

$$\left.\begin{array}{l}(a^2-X_1)(b^2-X_1)(c^2-X_1)=M_1,\\ (a^2-X_2)(b^2-X_2)(c^2-X_2)=M_2,\end{array}\right\} \quad (49)$$

причемъ замѣтимъ, что благодаря сдѣланнымъ предположеніямъ (44), M_1 имѣетъ положительное, а M_2 отрицательное значеніе Перемножая ур. (49), получимъ

$$M_1.M_2=-A_1^2B_1^2C_1^2\alpha^2\beta^2\gamma^2. \quad (50)$$

Далѣе изъ ур. (41) и (45):

$$1:K_1^2=\sum\frac{\alpha^2}{(a^2-X_1)^2}=\sum-\frac{a^2-X_2}{B_1C_1(a^2-X_1)}=-\frac{1}{A_1B_1C_1}\sum\frac{A_1(a^2-X_2)}{a^2-X_1}=$$

$$=-\frac{1}{M_1.A_1B_1C_1}\sum A_1(a^2-X_2)(b^2-X_1)(c^2-X_1).$$

Произведя въ послѣднемъ выраженіи умноженіе и суммируя, мы будемъ получать послѣдовательно, имѣя въ виду ур. (47):

$$1:K_1^2=\frac{1}{M_1.A_1B_1C_1}\sum\Big(A_1a^2(b^2+c^2)X_1+A_1b^2c^2X_2\Big)=\frac{X_1-X_2}{M_1}.$$

Подобнымъ-же образомъ преобразуется и K_2^2, такъ что

$$K_1^2 = \frac{M_1}{X_1 - X_2}, \quad K_2^2 = -\frac{M_2}{X_1 - X_2}; \tag{51}$$

отсюда:

$$K_1^2 + K_2^2 = \frac{M_1 - M_2}{X_1 - X_2}. \tag{52}$$

Правую часть этого равенства легко составить, умноживъ второе изъ ур. (46) на M_1; а третье на M_2 и вычитая; тогда получимъ:

$$\sum\left(a^2\alpha^2(b^2 - X_1)(c^2 - X_1) - a^2\alpha^2(b^2 - X_2)(c^2 - X_2)\right) =$$
$$= (X_1 - X_2)\sum a^2\alpha^2\left(-(b^2 + c^2) + X_1 + X_2\right) = M_1 - M_2;$$

отсюда, имѣя въ виду первое изъ ур. (43), получимъ:

$$\frac{M_1 - M_2}{X_1 - X_2} =$$
$$= \sum a^2\alpha^2\left(-(b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + (b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right)$$
$$= \sum a^2\alpha^2(-C_1\beta^2 + B_1\gamma^2) = A_1^2\beta^2\gamma^2 + B_1^2\gamma^2\alpha^2 + C_1^2\alpha^2\beta^2.$$

Слѣдовательно:

$$K_1^2 + K_2^2 = A_1^2\beta^2\gamma^2 + B_1^2\gamma^2\alpha^2 + C_1^2\alpha^2\beta^2. \tag{53}$$

Изъ ур. (43) имѣемъ:

$$(X_1 - X_2)^2 = (X_1 + X_2)^2 - 4X_1X_2 =$$
$$= \left((b^2 + c^2)\alpha^2 + (a^2 + c^2)\beta^2 + (a^2 + c^2)\gamma^2\right)^2 - 4\left(b^2c^2\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \ldots\right),$$

или

$$(X_1 - X_2)^2 = A_1^2\alpha^4 + B_1^2\beta^4 + C_1^2\gamma^4 - 2A_1B_1\alpha^2\beta^2 -$$
$$-2B_1C_1\beta^2\gamma^2 - 2C_1A_1\gamma^2\alpha^2. \tag{54}$$

Замѣнимъ въ ур. (53) величины A_1^2.... имъ соотвѣтственно равными $(B_1+C_1)^2$,.... и сложимъ его съ ур. (54); тогда члены, содержащіе удвоенныя произведенія взаимно уничтожатся; члены, содержащіе A_1^2, будутъ:

$$A_1^2\alpha^4 + A_1^2\alpha^2\gamma^2 + A_1^2\beta^2\alpha^2 = A_1^2\alpha^2;$$

такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$K_1^2 + K_2^2 + (X_1 - X_2)^2 = A_1^2\alpha^2 + B_1^2\beta^2 + C_1^2\gamma^2. \tag{55}$$

§ 6. Займемся теперь преобразованіемъ функціи перемѣнныхъ (xyz) и $(x_1y_1z_1)$:

$$a^2xx_1 + b^2yy_1 + c^2zz_1 \tag{56}$$

къ новымъ перемѣннымъ $(x'y'z')$ и $(x_1'y_1'z_1')$, связь которыхъ съ прежними выражается уравненіями вида:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha z',$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta z',$$

$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma z',$$

гдѣ $(\alpha\beta\gamma)$ суть косинусы угловъ, образованныхъ съ главными осями инерціи какимъ-либо радіусомъ векторомъ, а $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ и $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$—косинусы угловъ, образованныхъ осями сѣченія эллипсоида плоскостью, перпендикулярною къ радіусу вектору, съ тѣми-же прямыми:

Сдѣлавъ подстановку, получимъ, имѣя въ виду ур. (40), (46) и (48):

$$a^2xx_1 + b^2yy_1 + c^2zz_1 = X_1x'x_1' + X_2y'y_1' + Pz'z_1' +$$
$$+ K_1(x'z_1' + z'x_1') + K_2(y'z_1' + z'y_1'), \tag{57}$$

гдѣ:

$$P = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 \tag{58}$$

и означаетъ величину обратную квадрата радіуса вектора поверхности, имѣющаго $(\alpha\beta\gamma)$ своими направляющими косинусами.

Положивъ въ ур. (57): $x_1=x,\ y_1=y,\ z_1=z$, получимъ лѣвую часть уравненія эллипсоида инерціи; такъ что уравненіе его будетъ:

$$X_1x^2+X_2y^2+Pz^2+2K_1xz+2K_2yz=1. \tag{59}$$

Преобразуемъ теперь къ новымъ осямъ уравненіе (25) комплекса мгновенныхъ винтовъ и формулы (26), связующія винтъ импульсивный съ винтомъ мгновеннымъ.

Лѣвая часть ур. (25) есть сумма четырехъ выраженій:

$$\begin{aligned} A&=\pi(a^2\xi_o^2+b^2\eta_o^2+c^2\zeta_o^2),\\ B&=-p\pi^2(\xi_o^2+\eta_o^2+\zeta_o^2),\\ C&=-\ p(\lambda_o^2+\mu_o^2+\nu_o^2),\\ D&=a^2\lambda_o\xi_o+b^2\mu_o\eta_o+c^2\nu_o\zeta_o. \end{aligned}$$

Какъ координаты $\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0$, такъ и координаты $\lambda_0,\ \mu_0,\ \nu_0$ преобразуются къ новымъ осямъ по тѣмъ-же формуламъ, какъ координаты точки; поэтому при переходѣ отъ одной прямоугольной системы къ другой выраженія B и C будутъ инварьянтами; что-же касается до выраженій A и D, то первое изъ нихъ имѣетъ видъ лѣвой части уравненія эллипсоида, умноженной на π, второе-же получится изъ (56) замѣной (xyz) и $(x_1y_1z_1)$ на $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ и $(\lambda_0\mu_0\nu_0)$. Такимъ образомъ, отбросивъ значки при новыхъ координатахъ, мы можемъ такъ написать преобразованное уравненіе комплекса:

$$\begin{aligned}\pi(X_1-p\pi)\xi_o^2+\pi(X^2-p\pi)\eta_o^2+\pi(P-p\pi)\zeta_o^2+2\pi K_1\xi_o\zeta_o+2\pi K_2\eta_o\zeta_o-\\ -p(\lambda_o^2+\mu_o^2+\nu_o^2)+X_1\xi_o\lambda_o+X_2\eta_o\mu_o+P\zeta_o\nu_o+K_1(\xi_o\nu_o+\zeta_o\lambda_o)+\\ +K_2(\eta_o\nu_o+\zeta_o\mu_o)=0,\end{aligned} \tag{60}$$

Что касается до ур. (26), то слѣдуетъ совершить одновременно преобразованіе надъ обѣими частями равенства. Положивъ для краткости:

$$m=\lambda_o'+\pi\xi_o',\ \ n=\mu_o'+\pi\eta_o',\ \ q=\nu_o'+\pi\zeta_o',$$

и отбросивъ значки въ новыхъ координатахъ, будемъ имѣть:

$$(x_0-m)\alpha_1+(y_0-n)\alpha_2+(z_0-q)\alpha=0,$$
$$(x_0-m)\beta_1+(y_0-n)\beta_2+(z_0-q)\beta=0,$$
$$(x_0-m)\gamma_1+(y_0-n)\gamma_2+(z_0-q)\gamma=0,$$
$$l_0\alpha_1+m_0\alpha_2+n_0\alpha=(a^2\xi_0-pm)\alpha_1+(a^2\eta_0-pn)\alpha_2+(a^2\zeta_0-pq)\alpha,$$
$$l_0\beta_1+m_0\beta_2+n_0\beta=(b^2\xi_0-pm)\beta_1+(b^2\eta_0-pn)\beta_2+(b^2\zeta_0-pq)\beta,$$
$$l_0\gamma_1+m_0\gamma_2+n_0\gamma=(c^2\xi_0-pm)\gamma_1+(c^2\eta_0-pn)\gamma_2+(c^2\zeta_0-pq)\gamma.$$

Первыя три уравненія очевидно даютъ:

$$x_0=m,\ \ y_0=n,\ \ z_0=q.$$

Умноживъ-же послѣдовательно послѣднія три на $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и сложивъ, получимъ:

$$l_0=(a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2)\xi_0+(a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2)\eta_0+$$
$$+(a^2\alpha_1\alpha+b^2\beta_1\beta+c^2\gamma_1\gamma)\zeta_0-pm,$$

или, имѣя въ виду ур. (48) и (46):

$$l_0=X_1\xi_0+K_1\zeta_0-pm,$$

Точно также найдутся и новыя координаты m_0 и n_0; такъ что будемъ имѣть при новыхъ осяхъ:

$$\left.\begin{array}{ll} x_0=\lambda_0+\pi\xi_0, & l_0=(X_1-p\pi)\xi_0+K_1\zeta_0-p\lambda_0, \\ y_0=\mu_0+\pi\eta_0, & m_0=(X_2-p\pi)\eta_0+K_2\zeta_0-p\mu_0, \\ z_0=\nu_0+\pi\zeta_0, & n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0+(P-p\pi)\zeta_0-p\nu_0. \end{array}\right\}\quad(61)$$

Если изъ этихъ уравненій опредѣлимъ $\xi_0, \eta_0, \ldots$, то получимъ формулы перехода отъ импульсивнаго винта къ мгновенному. Уравнявъ-же нулю выраженіе $\lambda_0\xi_0+\mu_0\eta_0+\nu_0\zeta_0$, получимъ уравненіе комплекса импульсивныхъ винтовъ при новыхъ осяхъ координатъ. Мы не будемъ этого дѣлать, такъ какъ эти формулы намъ не понадобятся.

ГЛАВА II.

О перманентныхъ осяхъ и совершенныхъ ударахъ.

§ 7. Разсмотримъ сначала случай, когда система импульсивныхъ силъ приводится къ одной силѣ, или просто—когда дѣйствуетъ одна импульсивная сила, которую для краткости будемъ называть *ударомъ*. Мы будемъ разсматривать только удары, способные вызвать одно вращеніе вокругъ оси; такіе удары носятъ названіе *совершенныхъ*, а соотвѣтствующая ось вращенія—*перманентною осью*.

Перманентныя оси (Г) принадлежатъ къ комплексу:

$$a^2\lambda_0\xi_0 + b^2\mu_0\eta_0 + c^2\nu_0\zeta_0 = 0. \tag{62}$$

Зная координаты прямой (Г), найдемъ координаты линіи дѣйствія соотвѣтствующаго совершеннаго удара по формуламъ (26), гдѣ нужно будетъ положить $p=\pi=0$:

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=\lambda_0, & y_0=\mu_0, & z_0=\nu_0, \\ l_0=a^2\xi_0, & m_0=b^2\eta_0, & n_0=c^2\zeta_0. \end{array}\right\} \tag{63}$$

Такой видъ будутъ имѣть эти уравненія, предполагая, что за оси координатъ взяты главныя оси инерціи. Если-же за координатныя оси взять оси какого-либо сѣченія и нормаль къ нимъ, то, положивъ $p=\pi=0$ въ ур. (60) и (61), получимъ для комплекса перманентныхъ осей уравненіе:

$$X_1\xi_0\lambda_0+X_2\eta_0\mu_0+P\zeta_0\nu_0+K_1(\xi_0\nu_0+\zeta_0\lambda_0)+K_2(\eta_0\nu_0+\zeta_0\mu_0)=0, \tag{64}$$

и для координатъ линіи удара:

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=\lambda_0, & y_0=\mu_0, & z_0=\nu_0, \\ l_0=X_1\xi_0+K_1\zeta_0, & m_0=X_2\eta_0+K_2\zeta_0, & n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0+P\zeta_0. \end{array}\right\} \quad (65)$$

Хотя сила удара не имѣетъ вліянія на положеніе перманентной оси, а лишь на угловую скорость вращенія, но для простоты она была положена (15) равной единицы. Величина соотвѣтствующей угловой скорости будетъ зависѣть отъ положенія перманентной оси и линіи удара. Дѣйствительно, изъ ур. (18) и (19) имѣемъ:

$$\Xi^2+H^2+Z^2=1=Q^2\left(\frac{L^2}{a^4}+\frac{M^2}{b^4}+\frac{N^2}{c^4}\right);$$

вставляя изъ (20) и (21) вмѣсто Q, L, M и N ихъ значенія, получимъ:

$$M_0^2\theta^2=M_0^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2=\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2, \quad (66)$$

или, по ур. (63):

$$M_0^2\theta^2=\frac{l_0^2}{a^4}+\frac{m_0^2}{b^4}+\frac{n_0^2}{c^4}. \quad (67)$$

Изъ центра инерціи O опустимъ перпендикуляръ Oc на линію удара (C) (фиг. 1) и построимъ ось (G) момента удара, проведя въ приличную сторону перпендикуляръ къ *плоскости удара* OcC. Назовемъ *плоскостью момента удара* плоскость, проходящую черезъ ось момента удара, параллельно линіи удара. Сдѣлавъ такое-же построеніе для перманентной оси, получимъ *плоскость оси вращенія* $O\gamma\Gamma$ и *плоскость момента вращенія* (τ), проходящую черезъ центръ инерціи и параллельную прямымъ (Γ) и (τ). Первыя три изъ ур. (64) показываютъ, что линія удара (C) параллельна оси (τ) момента вращенія, т. е. что прямая (C) перпендикулярна къ плоскости

$O\gamma\Gamma$, а потому кратчайшее разстояніе между (C) и (Γ) есть перпендикуляръ $c\gamma_1$, опущенный изъ точки c на прямую (Γ); четырехугольникъ $Oc\gamma_1\gamma$ есть четырехугольникъ плоскій, къ плоскости котораго прямая (C) перпендикулярна. Точка c носитъ названіе *центра удара*, а точка γ_1 — *перманентнымъ центромъ вращенія*, или просто *перманентнымъ центромъ*. Разстоянія Oc, $O\gamma$ будемъ обозначать черезъ d и δ.

Такъ какъ сила удара равна единицѣ, то

$$x_0 = cos(Cx), \quad y_0 = cos(Cy), \quad z_0 = cos(Cz),$$
$$l_0 = dcos(Gx), \quad m_0 = dcos(Gy), \quad n_0 = dcos(Gz).$$

Формула (66) показываетъ, что координаты $(\xi_0, \eta_0, \ldots)$ могутъ быть разсматриваемы какъ проэкціи и моменты относительно осей координатъ отрѣзка, равнаго $M_0\theta$, отложеннаго на перманентной оси; послѣднія-же изъ нихъ $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ суть вмѣстѣ съ тѣмъ проэкціи на оси координатъ отрѣзка равнаго $M_0\theta\delta$ отложеннаго на оси (τ) момента вращенія.

А такъ какъ ур. (62) даютъ:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2 = 1, \tag{68}$$

то

$$M_0\theta\delta = 1, \tag{69}$$

и мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 = \frac{1}{\delta} cos(\Gamma x), \quad \eta_0 = \frac{1}{\delta} cos(\Gamma y), \quad \zeta_0 = \frac{1}{\delta} cos(\Gamma z), \\ \lambda_0 = cos(\tau x), \quad \mu_0 = cos(\tau y), \quad \nu_0 = cos(\tau z). \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Ур. (69) показываетъ, что при *одной и той-же силѣ совершеннаго удара, величина угловой скорости вызываемаго вращенія обратно пропорціональна разстоянію перманентной оси отъ центра инерціи*; и что при томъ-же условіи *перманентныя оси, вращеніе вокругъ которыхъ происходитъ съ*

одинаковою угловою скоростью, суть касательныя къ сферѣ, радіусъ которой обратно пропорціоналенъ угловой скорости вращенія.

Перемноживъ ур. (67) и (68) почленно, получимъ

$$M_o^2\theta^2(x_o^2+y_o^2+z_o^2)=\frac{l_o^2}{a^4}+\frac{m_o^2}{b^4}+\frac{n_o^2}{c^4}\cdot \qquad (71)$$

другими словами: *совершенные удары, вызывающіе вращенія съ одною и тою-же угловою скоростью, принадлежатъ къ комплексу второго порядка (71);* они будутъ слѣдовательно общими лучами двухъ комплексовъ втораго порядка (29_3) и (71).

Сравненіе уравненій (25_3) и (29_3) показываетъ, что комплексъ совершенныхъ ударовъ такъ точно построенъ относительно эллипсоида, обратнаго эллипсоиду инерціи, какъ комплексъ перманентныхъ осей—относительно эллипсоида инерціи, такъ что достаточно разсмотрѣть одинъ изъ нихъ; мы остановимся на комплексѣ перманентныхъ осей.

Перманентныя оси суть тѣ прямыя пространства, которыхъ поляры относительно эллипсоида, обратнаго эллипсоиду инерціи, къ нимъ перпендикулярны [1].

Дѣйствительно, полярныя плоскости двухъ точекъ ($x_1y_1z_1$) и ($x_2y_2z_2$) перманентной оси по отношенію къ эллипсоиду:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

параллельны плоскостямъ:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=0,$$

$$\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}=0;$$

---

[1]) G. Darboux. Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps. Bull. des sciences mathém. T. IV. 1880. p. 132.

линія же пересѣченія послѣднихъ, параллельная полярѣ перманентной оси, имѣетъ своими косинусами выраженія, пропорціональныя слѣдующимъ:

$$a^2(y_1z_2-z_1y_2)=a^2\lambda_0,\ b^2(z_1x_2-x_1z_2)=b^2\mu_0,\ c^2(x_1y_2-y_1x_2)=c^2\nu_0;$$

а такъ какъ косинусы самой прямой пропорціональны выраженіямъ:

$$x_2-x_1=\xi_0,\ y_2-y_1=\eta_0,\ z_2-z_1=\zeta_0,$$

то ур. (62) какъ разъ выражаетъ условіе перпендикулярности перманентной оси и ея поляры.

Главныя плоскости инерціи отсѣкаютъ на перманентной оси части, находящіяся между собою въ постоянномъ отношеніи[1]).

Пусть ABC (фиг. 2) одна изъ перманентныхъ осей, пересѣкающая главныя плоскости инерціи въ точкахъ A, B и C. Опустимъ изъ этихъ точекъ перпендикуляры на главныя оси инерціи Ox и Oy и обозначимъ черезъ α и β углы, образованныя прямою ABC съ этими осями. Тогда можно будетъ положить:

$$\lambda_0=Of.\zeta_0,\quad \mu_0=-Oa.\zeta_0,\quad \nu_0=Oa.cos\beta-Of.cos\alpha,$$
$$\xi_0=cos\alpha,\quad \eta_0=cos\beta.$$

Подставивъ эти значенія въ ур. (62) получимъ:

$$\frac{Oa.cos\beta}{Of.cos\alpha}=\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}.$$

Умножимъ числителя и знаменателя перваго отношенія

---

[1]) Th. Reye. Die Geometrie der Lage. Leipzig, 1882. T. II. p. 172.

на AB; тогда, имѣя въ виду что:

$$AB\cos\beta = df,\ AB\cos\alpha = Oa,$$
$$AB : BC = dB : Bb = df : Of,$$

получимъ:

$$AB : BC = \frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2} = Const.$$

что и требовалось доказать.

Перманентныя оси суть тѣ прямыя пространства, которыя параллельны одной изъ осей эллипса, получающагося въ сѣченіи эллипсоида инерціи плоскостью момента вращенія[1].

Дѣйствительно, если въ ур. (35) внесемъ вмѣсто направляющихъ косинусовъ прямой (Г) величины ξ_0, η_0 и ζ_0, которыя имъ пропорціональны, то косинусы второй оси къ (Г) будутъ:

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = (b^2 - c^2)\zeta_0\eta_0 : (c^2 - a^2)\xi_0\zeta_0 : (a^2 - b^2)\eta_0\xi_0.$$

Рѣшая-же совмѣстно уравненія:

$$a^2\lambda_0\xi_0 + b^2\mu_0\eta_0 + c^2\nu_0\zeta_0 = 0,$$
$$\lambda_0\xi_0 + \mu_0\eta_0 + \nu_0\zeta_0 = 0,$$

относительно λ_0, μ_0, ν_0, получимъ:

$$\lambda_0 : \mu_0 : \nu_0 = (b^2 - c^2)\zeta_0\eta_0 : (c^2 - a^2)\xi_0\zeta_0 : (a^2 - b^2)\eta_0\xi_0,$$

а это показываетъ, что второю осью къ (Г) служитъ ось момента вращенія, такъ что самимъ сѣченіемъ будетъ плоскость момента вращенія.

Этотъ признакъ даетъ возможность построить всѣ перманентныя оси. Для этого беремъ въ эллипсоидѣ любое сѣченіе и его оси Ox и Oy. Проводя нормаль къ нимъ Oz, строимъ въ плоскостяхъ Ozx и Ozy системы прямыхъ, соотвѣтственно

---

[1]) R. Ball. The theory of Screws. Dublin. 1876. §§ 159, 160.

параллельныхъ осямъ Ox и Oy; это и будутъ перманентныя оси. Остается мѣнять положеніе сѣкущей плоскости, и мы получимъ всѣ перманентныя оси пространства. Такое-же построеніе для эллипсоида обратнаго даетъ линіи дѣйствія совершенныхъ ударовъ. Но кромѣ того, такъ какъ послѣднія параллельны осямъ соотвѣтствующихъ моментовъ вращеній, то:

Линія удара и соотвѣтствующая перманентная ось параллельны осямъ эллипса сѣченія эллипсоида инерціи плоскостью момента вращенія.

Изъ послѣднихъ свойствъ можно вывести слѣдующія слѣдствія:

§ 8. 1. Предположимъ, что ударъ (C) направленъ параллельно одной изъ главныхъ осей инерціи, напр. Oz; тогда всякая прямая плоскости xOy будетъ вмѣстѣ съ (C) представлять пару прямыхъ, параллельныхъ осямъ параллельнаго имъ сѣченія, т. е будетъ перманентною осью; слѣд.:

Всякая прямая, лежащая въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи есть перманентная ось[1]). *Соотвѣтствующій совершенный ударъ перпендикуляренъ къ этой плоскости.* Очевидно, что и обратно: *Всякая прямая, параллельная одной изъ осей инерціи, есть перманентная ось; соотвѣтствующій ударъ направленъ по прямой, лежащей въ главной плоскости инерціи, перпендикулярной къ перманентной оси.*

2. Предположимъ, что линія удара (C) перемѣщается, оставаясь параллельной какой-либо прямой Oz. Такъ какъ ось (τ) момента вращенія, параллельная (C) всегда остается направленной по Oz, то соотвѣтствующія оси (Γ) лежатъ въ діаметральной плоскости xOy, перпендикулярной къ Oz; кромѣ того всѣ онѣ параллельны той прямой этой плоскости, которая вмѣстѣ съ (τ) составляетъ пару осей: *всѣ перманентныя оси, лежащія въ одной діаметральной плоскости, между собою*

---

[1]) T. Reye. Geometrie der Lage, p. 166.

параллельны; обратно: *всѣ параллельныя между собою перманентныя оси лежатъ въ одной діаметральной плоскости* [1]), ибо если направленіе (Г) дано, то тѣмъ самимъ дается направленіе второй оси къ ней, т. е. прямой (τ) или (*C*). Такъ какъ тоже можно сказать относительно совершенныхъ ударовъ, принявъ въ основаніе эллипсоидъ обратный, то слѣд.: *Удары, вызывающіе вращенія вокругъ параллельныхъ осей* (Г), *лежатъ въ одной плоскости и параллельны той прямой, которая вмѣстѣ съ направленіемъ* (Г) *составляетъ пару осей эллипсоида инерціи.*

3. *Перманентныя оси, выходящія изъ какой-либо точки M, лежатъ на конусѣ* [2]) *осей, соотвѣтствующемъ плоскости перпендикулярной къ радіусу вектору OM.* Пусть линія удара остается параллельной какой-либо плоскости xOy, такъ что (τ) вращается въ этой плоскости вокругъ точки O. Оси (Г), проходящія черезъ какую-либо точку M, лежащую на нормали Oz къ плоскости, должны быть параллельны образующимъ конуса осей, соотвѣтствующаго плоскости xOy; онѣ лежатъ слѣдовательно на такомъ-же конусѣ. Этотъ конусъ содержитъ три образующія, параллельныя главнымъ осямъ инерціи, нормаль къ плоскости и пару прямыхъ, соотвѣтственно параллельныхъ осямъ Ox и Oy сѣченія эллипсоида плоскостью xOy. Хотя этихъ шести образующихъ болѣе чѣмъ достаточно для опредѣленія конуса, но можно указать еще седьмую, параллельную тому діаметру эллипсоида, который сопряженъ съ плоскостью xOy; въ самомъ дѣлѣ, вторая ось къ нему, будучи съ нимъ сопряженной, лежитъ въ плоскости xOy и совпадаетъ слѣдовательно съ однимъ изъ положеній оси (τ). Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что конусы, соотвѣтствующіе различнымъ точкамъ прямой Oz равны между собою. Въ частномъ случаѣ,

---

1) Ibid. p. 170.

2) Ibid. p. 168.

когда точка M лежитъ на одной изъ главныхъ осей инерціи, конусъ обращается въ двѣ плоскости, совпадающія съ главными плоскостями инерціи, на пересѣченіи которыхъ лежитъ точка M. Разложеніе конуса на двѣ плоскости происходитъ также въ томъ случаѣ, когда точка M находится на одной изъ главныхъ плоскостей инерціи; въ этомъ случаѣ одна изъ плоскостей совпадаетъ съ тою плоскостью инерціи, на которой лежитъ точка M, другая-же проходитъ черезъ нормаль къ первой и черезъ прямую, проходящую черезъ M параллельно діаметру, сопряженному съ плоскостью перпендикулярной къ OM.

Удары, вызывающіе вращенія вокругъ осей (Γ), *выходящихъ изъ точки M, перпендикулярны къ радіусу вектору OM этой точки и суть образующія одного рода гиперболическаго параболоида* [1]). Дѣйствительно, обозначимъ черезъ (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) три какія-либо образующія конуса. Вращеніе вокругъ какой-либо четвертой образующей (Γ) можетъ быть разложено на три вращенія вокругъ прямыхъ (Γ_1), (Γ_2) и (Γ_3). Если обозначимъ черезъ (C), (C_1), (C_2) и (C_3) линіи дѣйствія соотвѣтствующихъ ударовъ, то ударъ по прямой (C) можетъ быть разложенъ на три удара по прямымъ (C_1), (C_2) и (C_3), а слѣдовательно эти четыре прямыя суть образующія одной и той-же линейчатой поверхности втораго порядка, которая будетъ въ данномъ случаѣ гиперболическимъ параболоидомъ, такъ какъ всѣ прямыя (C) параллельны одной и той-же плоскости. Такъ какъ каждыя три образующія конуса не лежатъ въ одной плоскости, то не могутъ лежать въ одной плоскости и линіи дѣйствія соотвѣтствующихъ ударовъ. Въ самомъ дѣлѣ, это имѣло-бы своимъ слѣдствіемъ возможность подобрать такія три силы для ударовъ, которыя взаимно уничтожались-бы, а

---

[1]) Къ этой теоремѣ приходитъ также U. Mazoni въ своемъ мемуарѣ: «Sulle forze impulsive che hanno la medesima azione sopra uno stesso punto di un sistema rigida. Nap. Rend. 1884. T. XXIII.

слѣдовательно уничтожились-бы взаимно и соотвѣтствующія угловыя скорости. Отсюда слѣдуетъ, что параболоидъ ударовъ можетъ обращаться въ двѣ плоскости лишь въ томъ случаѣ, когда обращается въ нихъ конусъ осей вращеній, т. е. когда точка M лежитъ на одной изъ осей или въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи.

4. *Перманентныя оси, лежащія въ одной плоскости* (m), *обертывают параболу* [1]), *касательная въ вершинѣ которой, параллельна второй оси къ нормали къ плоскости.*

Пусть Oz — нормаль къ плоскости (m) и пересѣкаетъ ее въ точкѣ M, xOy — плоскость сѣченія, параллельная плоскости (m). Оси (Г), лежащія въ плоскости (m) должны обертывать кривую втораго порядка, такъ какъ черезъ какую-либо точку A этой плоскости не можетъ проходить болѣе двухъ касательныхъ къ кривой, иначе конусъ перманентныхъ осей, проходящихъ черезъ точку A, преобразовался-бы въ двѣ плоскости. Докажемъ, что къ этой кривой можно провести только одну касательную даннаго направленія, т. е. что кривая есть парабола. Для этого, замѣтивъ, что оси моментовъ (τ) для различныхъ (Г), находящихся въ плоскости (m), лежатъ на конусѣ осей, соотвѣтствующемъ плоскости xOy, проведемъ черезъ O прямую Oa, которой (Г) должна быть параллельна, и найдемъ на конусѣ вторую ось къ ней. Это будетъ ось момента (τ), соотвѣтствующая искомой (Г). Возставивъ изъ O перпендикуляръ къ плоскости τOa, проведемъ черезъ точку пересѣченія его съ плоскостью (m) прямую, параллельную Oa; это и будетъ искомая единственная касательная. Если за Oa взять вторую ось ON къ нормали Oz, то предыдущее построеніе привело-бы къ безконечно удаленной касательной параболы, которая слѣдовательно параллельна ON. *Изъ касательныхъ къ параболѣ, кромѣ безконечно удаленной, обращаютъ наше вниманіе слѣ-*

---

[1]) T. Reye. Geometrie. p. 168.

дующія: три, по которымъ плоскость (m) пересѣкаетъ главныя плоскости инерціи, одна, параллельная второй оси къ діаметру, сопряженному плоскости xOy, и двѣ, выходящія изъ M и параллельныя осямъ сѣченія xOy. Такъ какъ двѣ послѣднія взаимно перпендикулярны, то *точка M лежитъ на директрисѣ параболы.*

Въ частномъ случаѣ, когда плоскость (m) перпендикулярна къ одной изъ главныхъ осей инерціи, парабола обращается въ двѣ безконечно удаленныя точки; оси (Г) образуютъ двѣ системы параллельныхъ прямыхъ, соотвѣтственно параллельныхъ двумъ остальнымъ осямъ инерціи. Если плоскость (m) проходитъ черезъ центръ инерціи, парабола обращается также въ двѣ точки, изъ коихъ одна совпадаетъ съ центромъ инерціи, а другая безконечно удалена въ направленіи второй оси къ діаметру, сопряженному къ плоскости.

Совокупность всѣхъ параболъ, лежащихъ въ параллельныхъ плоскостяхъ (m), есть конусъ втораго порядка, имѣющій вершину въ центрѣ инерціи [1]) *и нормальный къ соотвѣтствующему конусу осей.*

Черезъ какую-либо точку P проведемъ одну изъ плоскостей (m) и допустимъ, что въ ней черезъ точку P проходятъ двѣ касательныя a и b къ соотвѣтствующей параболѣ. Такъ какъ конусы осей для различныхъ точекъ прямой OP равны между собою и одинаково расположены, то черезъ каждую точку этой прямой пройдутъ двѣ образующія, соотвѣтственно параллельныя прямымъ a и b; онѣ будутъ касательными къ параболамъ, лежащимъ въ другихъ плоскостяхъ (m) и составятъ двѣ плоскости A и B, касательныя къ поверхности, занимаемой параболами. Отсюда слѣдуетъ, что черезъ каждую точку P пространства не можетъ проходить болѣе двухъ касательныхъ плоскостей къ поверхности и что всѣ онѣ проходятъ

---

[1]) Reye. l. c. p. 170.

черезъ центръ инерціи, который слѣдовательно совпадаетъ съ вершиной конуса втораго порядка, занимаемаго параболами. Ряду касательныхъ параллельныхъ a, какъ перманентнымъ осямъ, соотвѣтствуетъ одна ось (τ) момента вращенія; а такъ какъ послѣдняя лежитъ на конусѣ осей, то можно сказать, что образующія конуса осей соотвѣтственно перпендикулярны къ касательнымъ плоскостямъ конуса параболъ, т. е. что оба конуса нормальны другъ къ другу.

Совершенные удары, вызывающіе вращенія вокругъ осей, лежащихъ въ плоскости (m), *суть образующія одного рода гиперболоида, ассимптотическій конусъ котораго равенъ конусу осей, соотвѣтствующему плоскости* (m).

Пусть (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3)—три какія-либо касательныя къ параболѣ. Вращеніе вокругъ всякой четвертой касательной (Γ) можетъ быть разложено на три, происходящихъ вокругъ осей (Γ_1), (Γ_2) и (Γ_3). Отсюда слѣдуетъ, что ударъ (C), вызывающій вращеніе вокругъ (Γ), можетъ быть разложенъ на три удара по прямымъ (C_1), (C_2) и (C_3), соотвѣтствующимъ осямъ (Γ_1), (Γ_2) и (Γ_3). Это-же требуетъ, чтобы четыре прямыя (C), (C_1), (C_2) и (C_3) были-бы образующими одного рода линейчатой поверхности втораго порядка, которая будетъ въ данномъ случаѣ гиперболоидомъ, такъ какъ прямыя (C) параллельны (τ), лежащимъ на конусѣ осей, соотвѣтствующемъ плоскости (m).

5. Для выясненія той роли, которую играютъ образующія втораго рода въ гиперболическомъ параболоидѣ и гиперболоидѣ, докажемъ такую теорему:

Если (C_1) и (C_2) суть удары, вызывающія вращенія вокругъ осей (Γ_1) и (Γ_2), и если (C_1) и (Γ_2) пересѣкаются, то пересѣкаются также (C_2) и (Γ_1) [1]).

Пусть $(\xi_0, \eta_0, \ldots)$ и $(\xi'_0, \eta'_0, \ldots)$ суть координаты осей (Γ_1) и (Γ_2); тогда координаты соотвѣтствующихъ ударовъ бу-

[1]) R. Ball. The Theory of Screws. Dublin, 1876. p. 48.

дутъ $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, a^2\xi_0, b^2\eta_0, c^2\zeta_0)$ и $(\lambda_0', \mu_0' \ldots)$. Условіе пересѣченія прямыхъ (C_1) и (Γ_2):

$$a^2\xi_0\xi_0'+b^2\eta_0\eta_0'+c^2\zeta_0\zeta_0'+\lambda_0\lambda_0'+\mu_0\mu_0'+\nu_0\nu_0'=0,$$

вслѣдствіе полной симметріи координатъ, есть также условіе пересѣченія прямыхъ (C_2) и (Γ_1).

Отсюда слѣдуетъ:

Въ гиперболическомъ параболоидѣ (въ гиперболоидѣ), котораго образующія одного рода суть линіи ударовъ, вызывающихъ вращеніе вокругъ перманентныхъ осей, выходящихъ изъ одной точки (лежащихъ въ одной плоскости), образующія втораго рода суть перманентныя оси вращеній, вызываемыхъ ударами, проходящими черезъ ту-же точку (лежащими въ той-же плоскости) [1].

§ 9. Прежде чѣмъ перейти къ аналитическому изслѣдованію распредѣленія перманентныхъ осей, укажемъ направленіе тѣхъ прямыхъ, которыя играютъ особую роль въ отношеніи къ плоскости какого-либо сѣченія и съ которыми намъ уже приходилось отчасти встрѣчаться. Пусть xOy—плоскость какого-либо сѣченія, Ox и Oy направлены по его осямъ, Oz или OM нормаль къ нимъ, OM_1—діаметръ сопряженный плоскости сѣченія, OK—его проэкція на ту-же плоскость, ON—діаметръ сѣченія сопряженный съ OK, OT—нормаль къ нему. Такъ какъ ON есть діаметръ сопряженный съ OK и OM_1, то онъ сопряженъ съ плоскостью M_1OK, и такъ какъ діаметръ OM перпендикуляренъ къ ON, то они составятъ пару осей эллипсоида.

Принявъ въ основаніе ур. (59) эллипсоида инерціи и обозначивъ для краткости:

$$K=\sqrt{K_1^2+K_2^2},\quad T=\sqrt{K_2^2X_1^2+K_1^2X_2^2+X_1^2X_2^2},\quad T_1=\sqrt{K_2^2X_1^2+K_1^2X_2^2},$$

[1]) Теорема, относящаяся къ параболоиду, принадлежитъ U. Mazoni, l. c. p. 104.

будемъ имѣть для направляющихъ косинусовъ прямыхъ ON, OT, OM_1 и OK выраженія:

$$\frac{K_2}{K},\quad -\frac{K_1}{K},\quad 0 \text{ — для прямой } ON,$$

$$\frac{K_1}{K},\quad \frac{K_2}{K},\quad 0 \quad » \quad OT,$$

$$\frac{X_2K_1}{T},\quad \frac{X_1K_2}{T},\quad -\frac{X_1X_2}{T} \quad » \quad OM_1,$$

$$\frac{X_2K_1}{T_1},\quad \frac{X_1K_2}{T_1},\quad 0 \quad » \quad OK.$$

Уравненіе плоскости, сопряженной направленію OM:

$$K_1x+K_2y+Pz=0.$$

§ 10. Разсмотримъ случай параллельныхъ перманентныхъ осей (Г). Проведя черезъ центръ инерціи прямую параллельную направленію (Г), пріймемъ ее за ось Oz въ ур. (64) и (65), положивъ въ нихъ:

$$\xi_0=\eta_0=0,\quad \nu_0=0;$$

получимъ:

$$K_1\lambda_0+K_2\mu_0=0, \tag{72}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=\lambda_0, & y_0=\mu_0, & z_0=\nu_0, \\ l_0=K_1\zeta_0, & m_0=K_2\zeta_0, & n_0=P\zeta_0. \end{array}\right\} \tag{73}$$

Ур. (72) даетъ направленіе ON (фиг. 3) для оси (τ) момента всѣхъ осей (Г), перпендикулярныхъ къ плоскости xOy; онѣ пересѣкаютъ слѣдовательно эту плоскость по прямой OT.

Линіи соотвѣтствующихъ ударовъ параллельны ON и, такъ какъ

$$l_0:m_0:n_0=\cos(Gx):\cos(Gy):\cos(Gz)=K_1:K_2:P,$$

то онѣ лежатъ въ одной плоскости, сопряженной направленію (Г). Линіи ударовъ перпендикулярны къ плоскости zOТ, поэтому кратчайшее разстояніе $c\gamma_1$ между двумя соотвѣтствующими прямыми (C) и (Г) пересѣкается осью Oz въ точкѣ q подъ прямымъ угломъ. Обозначивъ $\gamma_1 q$ и cq черезъ δ и δ_1, будемъ имѣть въ данномъ случаѣ:

$$\zeta_0 = 1 : \delta, \quad n_0 = \delta_1,$$

и послѣднее изъ ур. (73) даетъ:

$$\delta\delta_1 = P, \qquad (74)$$

т. е. *кратчайшее разстояніе между перманентною осью и линіей удара раздѣляется прямой, проходящей черезъ центръ инерціи и параллельной перманентной оси, на двѣ части, произведеніе которыхъ равно обратному значенію квадрата параллельнаго оси вращенія радіуса вектора эллипсоида инерціи* [1]).

Возвышая въ квадратъ и складывая три послѣднихъ ур. (73), получаемъ соотношеніе между разстояніями $Oc = d$ и $O\gamma = \delta$ двухъ соотвѣтствующихъ прямыхъ (C) и (Г) отъ центра инерціи:

$$d\delta = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + P^2}. \qquad (75)$$

Это произведеніе также постоянно при данномъ направленіи (Г).

Если Oz есть одна изъ главныхъ осей инерціи, всѣ прямыя ей параллельныя могутъ быть приняты за оси (Г). Оси (Г) съ одною и тою-же угловою скоростью отстоятъ отъ главной оси Oz на одномъ и томъ-же разстояніи $\frac{1}{M_0\theta}$, т. е. суть про-

---

[1]) D. Turazza. Il moto dei systemi rigidi. Padova. 1868. p. 42., ур. (23).

изводящія прямаго круглаго цилиндра, ось котораго есть Oz, а радіусъ равенъ $\frac{1}{M_0\theta}$. Линіи соотвѣтствующихъ ударовъ лежатъ въ плоскости xOy и при данномъ θ касаются окружности, имѣющей центръ въ центрѣ инерціи, а радіусъ основанія (75)

$$d=c^2M_0\theta,$$

гдѣ c есть радіусъ инерціи, параллельный Oz.

Къ болѣе интереснымъ результатамъ прійдемъ, если, принявъ во вниманіе, что параллельныя оси (Г) лежатъ въ одной діаметральной плоскости, пріймемъ ее за плоскость xOy въ ур. (64) и (65), положивъ тамъ:

$$\zeta_0=0,\ \lambda_0=\mu_0=0,\ \nu_0=1;$$

тогда получимъ:

$$K_1\xi_0+K_2\eta_0=0, \tag{76}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=0, & y_0=0, & z_0=1, \\ l_0=X_1\xi_0, & m_0=X_2\eta_0, & n_0=0. \end{array}\right\} \tag{77}$$

Ур. (76) опредѣляетъ направленіе пучка параллельныхъ осей (Г), лежащихъ въ плоскости сѣченія, и показываетъ, что онѣ параллельны прямой ON (фиг. 4).

Линія удара перпендикулярна къ плоскости xOy и пересѣкаетъ ее въ точкѣ c, центрѣ удара. Обозначивъ черезъ $(x_1\ y_1)$ координаты этой точки, будемъ имѣть:

$$X_1\xi_0=l_0=y_1,\ X_2\eta_0=m_0=-x_1. \tag{78}$$

Опредѣливъ отсюда ξ_0 и η_0, напишемъ (4) уравненіе прямой (Г):

$$\frac{xx_1}{X_2}+\frac{yy_1}{X_1}+1=0. \tag{79}$$

Хотя это уравненіе показываетъ, что прямая (Г) параллельна тому діаметру эллипса сѣченія, который сопряженъ направленію Oc, однако то-же будетъ имѣть мѣсто по отношенію къ другому эллипсу [1]:

$$\frac{x^2}{X_2}+\frac{y^2}{X_1}=1, \tag{80}$$

который назовемъ *центральнымъ*.

Продолжимъ Oc до встрѣчи съ прямой (Г) въ точкѣ c'. Координаты $(x'y')$ этой точки найдутся, рѣшая совмѣстно ур. (79) и уравненіе прямой Oc:

$$x:y=x_1:y_1$$

и будутъ равны:

$$x'=-\frac{X_1X_2x_1}{X_1x_1^2+X_2y_1^2},\quad y'=-\frac{X_1X_2y_1}{X_1x_1^2+X_2y_1^2};$$

отсюда:

$$Oc'^2=\frac{X_1^2X_2^2Oc^2}{(X_1x_1^2+X_2y_1^2)^2}.$$

Съ другой стороны центральный эллипсъ отсѣкаетъ отъ прямой Oc радіусъ векторъ ρ, длина котораго опредѣляется уравненіемъ:

$$\rho^2=\frac{X_1X_2\,.\,Oc^2}{X_1x_1^2+X_2y_1^2},$$

такъ что будемъ имѣть:

$$Oc.Oc'=\rho^2. \tag{81}$$

---

[1]) Poinsot пользуется такимъ эллипсомъ при изслѣдованіи распредѣленія перманентныхъ осей въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи. Questions dynamiques. Sur la percussion des corps. Liouville. Journal. 1857. T. II. p. 321.

Это уравненіе показываетъ, что центръ удара и точка c' образуютъ на прямой Oc инволюцію, такъ что по одной изъ нихъ можно легко найти другую; когда c' будетъ центромъ удара, прямая (Г) пройдетъ черезъ точку c [1]). Вмѣсто того, чтобы строить центральный эллипсъ можно, воспользовавшись формулой (74), искать геометрическое мѣсто перманентныхъ центровъ, такъ какъ мѣсто центровъ ударовъ c есть прямая Oc. Въ ур. (74) введемъ $\delta_1 = cq = Oq tg(CON)$, $\delta = \gamma_1 q$ и обозначимъ черезъ ρ_1 тотъ діаметръ эллипса сѣченія, который параллеленъ (Г); тогда будемъ имѣть:

$$\gamma_1 q . Oq = \frac{1}{\rho_1^2 tg(CON)},$$

такъ какъ $\gamma_1 q$ и Oq суть прямоугольныя координаты перманентнаго центра γ_1 по отношенію къ осямъ ON и OT, то мѣсто точки γ_1 есть равносторонняя гипербола, для которой эти прямыя суть ассимптоты [2]),

Въ томъ случаѣ когда (Г) лежитъ въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи, она можетъ занимать тамъ произвольное положеніе, хотя связь между центромъ удара и направленіемъ (Г) остается та-же, какъ и въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ. Перемѣщая c по какой-либо прямой Oc, мы будемъ перемѣщать (Г) такъ, что она всегда останется параллельной діаметру сопряженному съ Oc. Такъ какъ гипербола перманентныхъ центровъ будетъ мѣняться съ измѣненіемъ направленія Oc, то

---

[1]) Ср. Poinsot. l. c. 323, гдѣ даются эти теоремы лишь для случая осей, лежащихъ въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи. См. также D. Turazza, l. c. § 75. Turazza не пользуется эллипсомъ (80), такъ что ур. (81) у него дается въ формѣ $Oc . Oc' = const.$, хотя должно замѣтить, что обобщеніе сдѣлано въ другомъ направленіи; вмѣсто одной импульсивной силы предполагается система такихъ силъ. Этотъ случай изслѣдуется въ 3-й главѣ этого сочиненія.

[2]) Turazza, l. c. § 73 съ обобщеніемъ, указаннномъ въ [1]).

удобнѣе остановиться на центральномъ эллипсѣ Poinsot. При этомъ тѣмъ изъ прямыхъ (Г), которыя обертываютъ окружность съ центромъ въ O и радіуса $\delta = \frac{1}{M_0\theta}$ соотвѣтствуютъ равныя угловыя скорости θ. Ур. (78) въ примѣненіи къ главной плоскости инерціи даютъ:

$$cos(\Gamma x) = \frac{y_1}{a^2 M_0 \theta}, \quad cos(\Gamma y) = -\frac{x_1}{b^2 M_0 \theta};$$

откуда:

$$\frac{x_1^2}{b^4 M_0^2 \theta^2} + \frac{y_1^2}{a^4 M_0^2 \theta^2} = 1.$$

т. е. *удары, вызывающіе вращеніе съ одинаковою угловою скоростью вокругъ осей, лежащихъ въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи xOy, направлены по производящимъ эллиптическаго цилиндра, мнимая ось котораго есть ось Oz, а двѣ дѣйствительныя оси направлены по двумъ другимъ осямъ инерціи.*

§ 11. Для полученія конуса осей, соотвѣтствующаго плоскости xOy какого-либо сѣченія, мы должны будемъ въ ур. (36) положить $\alpha = \beta = 0$, а за функцію U взять лѣвую часть ур. (59); тогда получимъ:

$$(X_1 - X_2)xy + K_1 yz - K_2 xz = 0. \tag{82}$$

Если такой конусъ перенести параллельно самому себѣ въ точку M оси Oz (фиг. 5), то онъ представитъ геометрическое мѣсто перманентныхъ осей (Г), проходящихъ черезъ эту точку. Представивъ себѣ этотъ конусъ въ такомъ положеніи, получимъ пересѣченіе его съ плоскостью xOy, положивъ въ ур. (82) $z = OM = -R$:

$$(X_1 - X_2)xy - K_1 Ry + K_2 Rx = 0. \tag{83}$$

Это равносторонняя гипербола, ассимптоты которой параллельны осямъ Ox и Oy сѣченія. Касательная въ началѣ

координатъ есть прямая OT, такъ что ON — нормаль къ гиперболѣ. Координаты центра C_0 гиперболы суть:

$$\alpha_0 = R\frac{K_1}{X_1 - X_2}, \quad \beta_0 = -R\frac{K_2}{X_1 - X_2}, \qquad (84)$$

а уравненіе кривой, отнесенной къ центру:

$$xy = -R^2\frac{K_1K_2}{X_1 - X_2}.$$

При перемѣщеніи точки M вдоль OM получаемъ пучокъ гиперболъ, имѣющихъ общую точку M, общую касательную въ ней и одинаково направленныя ассимптоты. Для полнаго опредѣленія каждой изъ такихъ кривыхъ достаточно знать еще одну ея точку. Но такъ какъ извѣстно, что въ числѣ образующихъ конуса есть одна MK, параллельная діаметру OM_1 сопряженному въ эллипсоидѣ съ плоскостью сѣченія, то проведя черезъ M такую прямую найдемъ на пересѣченіи съ плоскостью xOy на прямой OK точку K, принадлежащую гиперболѣ. Величина и направленіе осей конуса опредѣляются системой уравненій:

$$(X_1 - X_2)\mu - K_2\nu = p\lambda,$$
$$(X_1 - X_2)\lambda + K_1\nu = p\mu,$$
$$-K_2\lambda + K_1\mu = p\nu,$$

$$V(p) = \begin{vmatrix} p, & -(X_1 - X_2), & K_2 \\ -(X_1 - X_2), & p, & -K_1 \\ K_2, & -K_1, & p \end{vmatrix} = 0, \qquad (85)$$

гдѣ:

$$V(p) = p^3 - p\Big((X_1 - X_2)^2 + K_1^2 + K_2^2\Big) + 2(X_1 - X_2)K_1K_2. \qquad (86)$$

Причемъ замѣтимъ, что, обозначивъ черезъ p_1, p_2 и p_3 три корня этого уравненія, будемъ имѣть:

$$p_1p_2p_3 = -2(X_1 - X_2)K_1K_2. \qquad (87)$$

Коэффиціенты ур. (85) можно выразить въ функціи косинусовъ α, β и γ угловъ, образованныхъ прямой OM съ главными осями инерціи. Воспользовавшись для этой цѣли ур. (55) и (51), получимъ:

$$p^3 - p(A_1^2\alpha^2 + B_1^2\beta^2 + C_1^2\gamma^2) + A_1B_1C_1\alpha\beta\gamma = 0. \qquad (88)$$

Если разсматривать въ этомъ уравненіи p какъ постоянное, то оно представитъ коническую поверхность—мѣсто тѣхъ прямыхъ OM, для точекъ которыхъ одна изъ осей конуса (82) имѣетъ данное значеніе. Очевидно, что черезъ каждую прямую OM проходитъ три такихъ поверхности.

Производящія конуса осей, касающіяся шара:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{M_0^2\theta^2},$$

суть перманентныя оси съ одною и тою-же угловою скоростью θ и будутъ дѣйствительны, только когда:

$$1 : M_0\theta \leqslant R;$$

въ послѣднемъ случаѣ онѣ суть также производящія прямаго круглаго конуса, ось котораго есть прямая MO, а вершина въ M. Сѣченіе этого конуса съ плоскостью xOy есть кругъ, центръ котораго въ O, а радіусъ r легко опредѣляется изъ фиг. 6, гдѣ:

$$MB^2 = MO^2 - BO^2 = \frac{R^2M_0^2\theta^2 - 1}{M_0^2\theta^2},$$

$$tgDMO = BO : MB = \frac{1}{\sqrt{R^2M_0^2\theta^2 - 1}},$$

$$r = OD = MO\,tgDMO = \frac{R}{\sqrt{R^2M_0^2\theta^2 - 1}},$$

Этотъ кругъ пересѣкаетъ гиперболу вообще въ четырехъ точкахъ, соединивъ которыя съ M, получимъ четыре перма-

пентныя оси съ одинаковою угловою скоростью 0. Наименьшему значенію $\frac{1}{M_0 R}$ соотвѣтствуютъ двѣ производящія параллельныя осямъ Ox и Oy сѣченія.

Перманентнымъ осямъ, лежащимъ на конусѣ, соотвѣтствуетъ параболоидъ ударовъ. Координаты линіи удара найдутся изъ ур. (65), полагая тамъ $\nu_0=0$; тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &x_0=\lambda_0, \quad y_0=\mu_0, \quad z_0=\nu_0=0, \\ &l_0=X_1\xi_0+K_1\zeta_0, \; m_0=X_2\eta_0+K_2\zeta_0, \; n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0+P\zeta_0. \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Но такъ какъ оси (Г) пересѣкаютъ Oz на разстояніи R отъ начала, то по формуламъ (3) можно положить:

$$\lambda_0=-R\eta_0, \quad \mu_0=R\xi_0, \qquad (90)$$

такъ что, помня первыя три ур. (89):

$$\left.\begin{aligned} l_0&=yz_0-zy_0=-zy_0=-z\mu_0=-zR\xi_0, \\ m_0&=zx_0-xz_0=zx_0=z\lambda_0=-zR\eta_0, \\ n_0&=xy_0-yx_0=x\mu_0-y\lambda_0=(x\xi_0+y\eta_0)R. \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

Уравнивая значенія l_0, m_0, n_0 изъ ур. (89) и (91), получимъ уравненія прямой (C):

$$\begin{aligned} &(X_1+Rz)\xi_0+K_1\zeta_0=0, \\ &(X_2+Rz)\eta_0+K_2\zeta_0=0, \\ &(K_1-xR)\xi_0+(K_2-yR)\eta_0+P\zeta_0=0, \end{aligned}$$

откуда, исключая ξ_0, η_0, ζ_0, найдемъ уравненіе поверхности:

$$\left.\begin{aligned} &(K_1x+K_2y+Pz)R^2z+\Big(P(X_1+X_2)-(K_1^2+K_2^2)\Big)Rz+ \\ &+K_2X_1Ry+K_1X_2Rx+PX_1X_2-X_1K_2^2-X_2K_1^2=0. \end{aligned}\right\} \quad (92)$$

Направляющими плоскостями параболоида служатъ плоскость

xOy и плоскость сопряженная направленію OM въ эллипсоидѣ. Такъ какъ линіи ударовъ, лежащія на параболоидѣ, параллельны плоскости xOy, то опредѣлимъ, на какомъ разстояніи z отъ этой плоскости находится та изъ нихъ, которой соотвѣтствуетъ какая-либо перманентная ось ML, лежащая на конусѣ. Имѣя въ виду ур. (89) и (90), опредѣлимъ изъ ур. (64) величину ζ_0:

$$\zeta_0 = -\frac{1}{R}\frac{(X_1 - X_2)x_0 y_0}{K_1 x_0 + K_2 y_0}; \tag{93}$$

слѣдовательно:

$$l_0 = \frac{X_1 y_0}{R} + K_1 \zeta_0 = \frac{1}{R}\frac{X_1 K_2 y_0 + X_2 K_1 x_0}{K_1 x_0 + K_2 y_0} y_0.$$

Сравнивая-же это уравненіе съ первымъ ур. (91), получаемъ:

$$z = -\frac{1}{R}\frac{X_1 K_2 y_0 + X_2 K_1 x_0}{K_1 x_0 + K_2 y_0}. \tag{94}$$

Линія удара пересѣкаетъ плоскость OML въ центрѣ удара c, причемъ прямая Oc есть діаметръ сѣченія OML, сопряженный направленію ML. Зная направленіе Oc и разстояніе z точки c отъ плоскости xOy, опредѣлимъ вполнѣ линію удара. Если изъ точки c опустить перпендикуляръ cc' на Oz, то прямая cc' параллельна плоскости xOy и уравненіе ея проэкціи на эту плоскость есть:

$$y : x = -x_0 : y_0.$$

Исключивъ отношеніе $x_0 : y_0$ изъ этого уравненія и изъ ур. (94), получимъ гиперболическій параболоидъ — мѣсто прямыхъ cc'. Геометрическое мѣсто центровъ ударовъ есть очевидно пересѣченіе этого параболоида съ параболоидомъ ударовъ.

Такъ какъ:

$$\cos(COK) = \frac{X_1 K_2 y_0 + X_2 K_1 x_0}{T_1}, \quad \cos(COT) = \frac{K_1 x_0 + K_2 y_0}{K},$$

то ур. (94) можно написать:

$$z = -\frac{T_1}{KR}\frac{Cos(COK)}{Cos(COT)}. \tag{95}$$

Перманентныя оси, лежащія конусѣ и параллельныя осямъ Ox и Oy сѣченія, имѣютъ наименьшія угловыя скорости. Ихъ вызываютъ удары, направленныя по производящимъ параболоида, соотвѣтственно параллельнымъ осямъ Oy и Ox. Полагая въ уравненіяхъ прямой (C) сначала $\eta_0 = \zeta_0 = 0$, а затѣмъ $\xi_0 = \zeta_0 = 0$, получимъ координаты z' и x', z'' и y'' точекъ пересѣченія этихъ производящихъ съ плоскостями xOz и yOz:

$$z' = -\frac{X_1}{R},\quad x' = \frac{K_1}{R},$$

$$z'' = -\frac{X_2}{R},\quad y'' = \frac{K_2}{R}.$$

§ 12. Перманентныя оси, лежащія въ одной плоскости (m), обертываютъ параболу, и всѣ параболы, лежащія въ параллельныхъ плоскостяхъ, образуютъ конусъ втораго порядка, вершина котораго лежитъ въ центрѣ инерціи, и притомъ конусъ, нормальный къ конусу осей. Но конусъ нормальный къ конусу (82) будетъ представленъ уравненіемъ:

$$K_1x^2 + K_2y^2 + (X_1 - X_2)^2z^2 + 2K_2(X_1 - X_2)yz - 2K_1(X_1 - X_2)xz + \\ + 2K_1K_2xy = 0.$$

Поэтому для полученія параболы, лежащей въ плоскости (m), перпендикулярной къ OM, нужно внести $z = R$ въ уравненіе конуса; получимъ:

$$(K_1x + K_2y)^2 + (X_1 - X_2)R\Big(2K_2y - 2K_1x + (X_1 - X_2)R\Big) = 0. \tag{96}$$

Извѣстно, что сѣченіе двухъ конусовъ, нормальныхъ другъ къ другу и имѣющихъ общую вершину, какою-либо плоскостью, суть кривыя обратныя (*polarreciprok*) по отношенію къ основанію перпендикуляра, опущеннаго изъ общей вершины на сѣкущую плоскость [1]). Пусть напр. AB (фиг. 7) есть касательная въ точкѣ A къ гиперболѣ сѣченія плоскостью (m) конуса осей. Опустивъ изъ M перпендикуляръ MB на касательную, найдемъ на немъ такую точку A_1, чтобы:

$$MA_1.MB = -R^2,$$

точка A_1 будетъ принадлежать параболѣ. Знакъ минусъ въ этомъ уравненіи показываетъ, что разстоянія MA_1 и MB откладываются въ прямопротивуположную сторону. Однако эти разстоянія будутъ откладываться въ ту-же сторону, если построить параболу обратную кривой пересѣченія конуса осей, имѣющаго вершину въ M, съ плоскостью xOy, т. е. кривой (83). Для построенія вершины параболы достаточно продолжить ON до встрѣчи во второй разъ съ гиперболой и построить касательную къ ней въ этой точкѣ; точка параболы, соотвѣтствующая этой касательной, и будетъ ея вершиной.

Для полученія гиперболоида ударовъ, соотвѣтствующаго перманентнымъ осямъ, обертывающимъ параболу, положимъ въ ур. (65) $\zeta_0 = 0$, тогда получимъ:

$$l_0 = X_1\xi_0,\ m_0 = X_2\eta_0,\ n_0 = K_1\xi_0 + K_2\eta_0. \tag{97}$$

Воспользовавшись затѣмъ ур. (90), мы получимъ для линіи удара уравненія:

$$Ryz_0 - y_0(Rz + X_1) = 0\ ,$$

$$Rxz_0 - x_0(Rz + X_2) = 0\ ,$$

$$y_0(Rx - K_1) - x_0(Ry - K_2) = 0.$$

---

[1]) Salmon - Fiedler. Analytische Geometrie des Raumes. Leipzig. 1879. I. p. 157.

Остается исключить отсюда x_0, y_0, z_0 для полученія искомой поверхности:

$$R(X_1-X_2)xy+RK_1yz-RK_2xz-K_2X_1x+K_1X_2y=0. \quad (98)$$

Гиперболоидъ проходитъ черезъ начало координатъ и имѣетъ въ числѣ своихъ образующихъ ось Oz и двѣ другія параллельныя осямъ Ox и Oy сѣченія. Координаты центра:

$$\alpha=\frac{K_1}{2R},\ \beta=\frac{K_2}{2R},\ \gamma=-\frac{X_1+X_2}{2R}, \quad (99)$$

и уравненіе поверхности, отнесенное къ центру:

$$2(X_1-X_2)xy+2K_1yz-2K_2xz-\frac{(X_1+X_2)K_1K_2}{2R^2}=0.$$

Для опредѣленія величины и направленія осей будемъ имѣть тѣ-же ур. (85), какія мы имѣли для конуса осей, такъ что имѣя въ виду ур. (87), получимъ уравненіе поверхности, отнесенное къ центру и осямъ:

$$p_1x^2+p_2y^2+p_3z^2+\frac{p_1p_2p_3}{4R^2}=0. \quad (100)$$

Такъ какъ ось Oz есть одна изъ образующихъ гиперболоида и именно того рода, къ которому принадлежатъ перманентныя оси, то черезъ начало координатъ проходитъ образующая другого рода, пересѣкаемая перманентными осями. Эта образующая есть діаметръ OM_1, сопряженный плоскости сѣченія. Если (ξ_0, η_0 0) величины, опредѣляющія направленіе одной изъ осей (Г), то линія удара пересѣкаетъ OM_1 въ разстояніи ρ отъ начала въ точкѣ M_1, координаты которой:

$$\rho\frac{X_2K_1}{T},\quad \rho\frac{X_1K_2}{T},\quad -\rho\frac{X_1X_2}{T}.$$

Для опредѣленія ρ воспользуемся послѣднимъ изъ ур. (97):

$$n_0 = x_1 y_0 - y_1 x_0 = x_1 R\xi_0 + y_1 R\eta_0 = K_1\xi_0 + K_2\eta_0;$$

вставивъ сюда вмѣсто x_1 и y_1 координаты точки M_1, получимъ:

$$\rho = \frac{T}{R}\,\frac{K_1\xi_0 + K_2\eta_0}{X_2 K_1\xi_0 + X_1 K_2\eta_0}$$

или, какъ при выводѣ ур. (95):

$$\rho = \frac{TK}{T_1 R}\cdot\frac{cos(\Gamma OT)}{cos(\Gamma OK)} = \frac{K}{Rcos(M_1 OK)}\,\frac{cos(\Gamma OT)}{cos(\Gamma OK)}\,. \quad (101)$$

Этимъ разстояніемъ и своимъ направленіемъ линія удара вполнѣ опредѣляется.

§ 13. Точка на перманентной оси (Г), названная перманентнымъ центромъ, играетъ очень важную роль въ механикѣ. Она обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что центробѣжныя силы, развивающіяся при вращеніи твердаго тѣла вокругъ перманентной оси, при приведеніи ихъ къ этой точкѣ оказываются эквивалентными одной силѣ, моментъ-же пары равенъ нулю. Подъ вліяніемъ совершеннаго удара вращеніе вокругъ оси (Г) происходитъ совершенно свободно лишь въ первый моментъ. Если-же мы желаемъ, чтобы и затѣмъ тѣло вращалось вокругъ той-же оси, то ее нужно укрѣпить вообще говоря въ двухъ точкахъ. Въ томъ только случаѣ, когда одна изъ точекъ прикрѣпленія совпадаетъ съ перманентнымъ центромъ оси вращенія, укрѣпленіе въ другой точкѣ излишне, такъ какъ центробѣжныя силы, развивающіяся при вращеніи, полностью уничтожаются реакціей первой точки. Наконецъ, въ еще болѣе частномъ случаѣ, когда перманентная ось совпадаетъ съ одной изъ главныхъ осей инерціи, центробѣжныя силы эквивалентны нулю, такъ что всякое укрѣпленіе оси вращенія излишне.

Укажемъ методъ, предложенный Beltrami [1]), для полученія координатъ перманентныхъ центровъ, видоизмѣнивъ его такимъ образомъ, чтобы результатъ не зависѣлъ отъ выбора координатныхъ осей, и слѣдовательно отъ вида уравненія комплекса.

Въ силу первыхъ трехъ ур. (63), а также ур. (5), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0\lambda_0 + \eta_0\mu_0 + \zeta_0\nu_0 = 0\,, \\ l_0\lambda_0 + m_0\mu_0 + n_0\nu_0 = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (102)$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно отношеній $\lambda_0 : \mu_0 : \nu_0$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= y\zeta_0 - z\eta_0 = (m_0\zeta_0 - n_0\eta_0)\alpha\,, \\ \mu_0 &= z\xi_0 - x\zeta_0 = (n_0\xi_0 - l_0\zeta_0)\alpha\,, \\ \nu_0 &= x\eta_0 - y\xi_0 = (l_0\eta_0 - m_0\xi_0)\alpha\,, \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

гдѣ x, y и z координаты какой-либо точки прямой (Г), а множитель α—коэффиціентъ пропорціональности. Мы удовлетворимъ этимъ уравненіямъ, если, оставивъ β неопредѣленнымъ, положимъ:

$$x = (\beta\xi_0 + l_0)\alpha, \;\; y = (\beta\eta_0 + m_0)\alpha, \;\; z = (\beta\zeta_0 + n_0)\alpha. \quad (104)$$

Такъ могутъ быть представлены координаты какой-либо точки прямой (Г). Перманентный центръ можетъ быть опредѣленъ какъ точка пересѣченія прямой (Г) съ плоскостью, проходящей черезъ соотвѣтствующую прямую (C) перпендикулярно къ (Г), т. е. съ плоскостью:

$$(y\nu_0 - z\mu_0 - l_0)(\eta_0\nu_0 - \zeta_0\mu_0) + (z\lambda_0 - x\nu_0 - m_0)(\zeta_0\lambda_0 - \xi_0\nu_0) + \\ + (x\mu_0 - y\lambda_0 - n_0)(\xi_0\mu_0 - \eta_0\lambda_0) = 0.$$

---

[1]) E. Beltrami. Sulla teoria degli assi di rotazione. Collectanea in memoriam Chelini. p. 340.

Въ самомъ дѣлѣ, эта плоскость проходитъ черезъ прямую (C), такъ какъ первые множители трехъ членовъ лѣвой части суть лѣвыя части уравненій прямой (C); кромѣ того она перпендикулярна къ прямой (Γ), такъ какъ уравненіе ея можно представить въ видѣ:

$$\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z = l_0(\eta_0\nu_0 - \zeta_0\mu_0) + m_0(\zeta_0\lambda_0 - \xi_0\nu_0) + \\ + n_0(\xi_0\mu_0 - \eta_0\lambda_0).$$

Преобразуемъ правую часть этого уравненія, на основаніи ур. (103). Коэффиціентъ при l_0 можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$\alpha l_0(\xi_0^2 + y_0^2 + \zeta_0^2) + \alpha\xi_0(l_0\xi_0 + m_0\eta_0 + n_0 z_0).$$

Умноживъ выраженія подобныя этому на l_0, m_0 и n_0, сложимъ; тогда, имѣя въ виду, что возвышая въ квадратъ и складывая ур. (103), находимъ:

$$(l_0^2 + m_0^2 + n_0^2)(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2) - (l_0\xi_0 + m_0\eta_0 + n_0\zeta_0)^2 = \frac{1}{\alpha^2}, \quad (105)$$

получимъ уравненіе искомой плоскости въ окончательной формѣ:

$$\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z = \frac{1}{\alpha}. \quad (106)$$

Внеся сюда вмѣсто x, y и z ихъ значенія (104), получимъ соотношеніе, которое должно имѣть мѣсто между α и β въ случаѣ перманентнаго центра:

$$\beta(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2) + a^2\xi_0^2 + b^2\eta_0^2 + c^2\zeta_0^2 = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (107)$$

Подставляя ур. (103) въ ур. (62) комплекса, убѣдимся, что они ему удовлетворяютъ, если вмѣсто l_0, m_0, n_0 внести значенія (63), такъ что ур. (104) опредѣляютъ точку на перманентной оси вращенія. Отсюда, подобно тому какъ это было сдѣлано для первыхъ трехъ ур. (26) на стр. 20, легко

докажемъ, что ур. (104) не мѣняютъ своего вида при преобразованіи координатъ.

Предположимъ, что оси координатъ совпадаютъ съ главными осями инерціи; тогда будутъ имѣть мѣсто всѣ ур. (63), и мы получимъ изъ ур. (104):

$$\xi_0 = \frac{x}{(a^2+\beta)\alpha}, \quad \eta_0 = \frac{y}{(b^2+\beta)\alpha}, \quad \zeta_0 = \frac{z}{(c^2+\gamma)\alpha}. \quad (108)$$

Внеся эти значенія въ ур. (106), получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2+\beta} + \frac{y^2}{b^2+\beta} + \frac{z^2}{c^2+\beta} = 1. \quad (109)$$

Если x, y и z означаютъ координаты какой-либо точки M, то ур. (108) даютъ для каждаго значенія β направленіе одной изъ прямыхъ (Г), проходящихъ черезъ эту точку. Если же точка M есть перманентный центръ, то она должна лежать на одномъ изъ софокусныхъ эллипсоидовъ, представляемыхъ ур. (109); тогда, какъ показываетъ ур. (108), ось (Г) направлена по нормали къ одному изъ софокусныхъ эллипсоидовъ, проходящихъ черезъ эту точку. Такъ какъ черезъ каждую точку пространства проходятъ три такихъ поверхности и онѣ между собою ортогональны, то мы получаемъ такую теорему:

Каждая точка пространства служитъ перманентнымъ центромъ для трехъ перманентныхъ осей; онѣ взаимно перпендикулярны и направлены по нормалямъ къ софокуснымъ эллипсоидамъ (109), проходящимъ черезъ эту точку [1]).

Разсмотримъ распредѣленіе перманентныхъ центровъ для осей, лежащихъ въ какой-либо плоскости. Принявъ за плоскость xOy плоскость ей параллельную, будемъ имѣть по ур. (97) и (104):

$$x = \alpha(X_1+\beta)\xi_0, \quad y = \alpha(X_2+\beta)\eta_0, \quad z = \alpha(K_1\xi_0 + K_2\eta_0).$$

---

[1]) Beltrami, l. c. p. 348.

Такъ какъ $\zeta_0=0$, $z=R$, то изъ этихъ уравненій и ур. (106) слѣдуетъ, что координаты проэкцій разсматриваемыхъ перманентныхъ центровъ на плоскость xOy удовлетворяютъ такимъ уравненіямъ:

$$\frac{x^2}{X_1+\beta}+\frac{y^2}{X_2+\beta}=1, \tag{110}$$

$$\frac{K_1 x}{X_1+\beta}+\frac{K_2 y}{X_2+\beta}=R. \tag{111}$$

Послѣднее уравненіе представляетъ поляру точки съ координатами $\frac{K_1}{R}$, $\frac{K_2}{R}$ къ одному изъ софокусныхъ эллипсовъ (110), такъ что мы можемъ сказать:

Проэкціи перманентныхъ центровъ осей, лежащихъ въ какой-либо плоскости, на параллельную ей діаметральную плоскость, суть точки касанія касательныхъ проведенныхъ изъ одной и той-же точки къ системѣ софокусныхъ эллипсовъ.

Методъ, употребленный для розысканія перманентныхъ центровъ, можно приложить также къ опредѣленію центра удара.

Обозначивъ для краткости:

$$l=\frac{x_0}{a^2}, \quad m=\frac{y_0}{b^2}, \quad n=\frac{z_0}{c^2}, \tag{112}$$

и имѣя въ виду ур. (29_3), получимъ вмѣсто ур. (102):

$$ll_0+mm_0+nn_0=0,$$
$$x_0l_0+y_0m_0+z_0n_0=0.$$

Рѣшая эти уравненія относительно отношеній $l_0:m_0:n_0$ и поступая въ дальнѣйшемъ такъ-же, какъ въ предыдущемъ случаѣ, мы должны будемъ въ окончательномъ результатѣ (104) сдѣлать замѣну l_0, m_0, n_0 на l, m, n, а ξ_0, η_0, ζ_0—на x_0, y_0, z_0.

Тогда получимъ для координатъ какой-либо точки линіи удара уравненія:

$$x=\alpha_1\left(\beta_1+\frac{1}{a^2}\right)x_0,\ y=\alpha_1\left(\beta_1+\frac{1}{b^2}\right)y_0,\ z=\alpha_1\left(\beta_1+\frac{1}{c^2}\right)z_0. \quad (113)$$

Если эта точка есть центръ удара, то координаты ея должны удовлетворять уравненію плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи перпендикулярно къ линіи удара, т. е. плоскости:

$$x_0x+y_0y+z_0z=0. \quad (114)$$

Подставляя сюда вмѣсто x, y, z ихъ значенія изъ (113), получимъ то соотношеніе, которому должно удовлетворять β_1 въ случаѣ центра удара:

$$\beta_1+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=0. \quad (115)$$

Если будемъ разсматривать одну и ту-же точку, то для того чтобы она была центромъ удара для линій удара, черезъ нее проходящихъ, необходимо, чтобы x_0, y_0, z_0 удовлетворяли ур. (114). Сдѣлавъ эту подстановку изъ ур. (113), получимъ:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}+\beta_1}+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}+\beta_1}+\frac{z^2}{\frac{1}{c^2}+\beta_1}=0. \quad (116)$$

При измѣненіи β_1 это уравненіе представитъ систему софокусныхъ конусовъ 2-го порядка, Такъ какъ черезъ каждую точку пространства проходитъ два такихъ конуса и они взаимно ортогональны, то получается такая теорема:

Каждая точка пространства есть центръ удара для двухъ линій удара; онѣ перпендикулярны между собою и къ прямой, соединяющей точку съ центромъ инерціи, и на-

правлены по нормалямъ къ софокуснымъ конусамъ (116), *проходящимъ черезъ точку* [1]).

Послѣднее свойство вытекаетъ изъ значеній для x_0, y_0, z_0, получающихся изъ ур. (113).

Обратимъ вниманіе на то, что такъ какъ центръ удара совпадаетъ съ основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ центра инерціи на линію удара, то какая-либо точка M будетъ служить центромъ для тѣхъ ударовъ, линіи дѣйствія которыхъ перпендикулярны къ OM. А такъ какъ мы знаемъ, что такихъ линій двѣ и онѣ параллельны осямъ сѣченія эллипсоида обратнаго эллипсоиду инерціи плоскостью перпендикулярной къ OM, то отсюда слѣдуетъ, что послѣдняя теорема заключается уже въ тѣхъ уравненіяхъ, которыя были выведены въ I главѣ для опредѣленія направленія осей какого-либо сѣченія. Нужно только въ ур. (42), (40) и (40_1) замѣнить a^2, b^2 и c^2 обратными ихъ значеніями и тогда получимъ конусъ (116) и направленія линій ударовъ, какъ онѣ даются ур. (113).

Какъ видно изъ ур. (61), и въ случаѣ когда система импульсивныхъ силъ вызываетъ вращеніе, ось импульсивнаго винта (C) параллельна оси момента прямой (Г), т. е. прямая (C) перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ центръ инерціи и ось вращенія. Точка, въ которой эта плоскость пересѣкаетъ ось (C), называется *центромъ импульса*, а проэкція ея на ось вращенія — *центромъ вращенія*; въ этихъ точкахъ прямыя (C) и (Г) пересѣкаются ихъ кратчайшимъ разстояніемъ. Аналитически положеніе этихъ точекъ опредѣляется уже иными формулами, на которыхъ мы останавливаться не будемъ, такъ какъ при изслѣдованіи распредѣленія самихъ импульсивныхъ винтовъ и осей вращенія есть возможность, по крайней мѣрѣ въ тѣхъ простыхъ случаяхъ, которыя разсматриваются Beltrami, прійти инымъ путемъ къ распредѣленію этихъ центровъ

---

[1]) Beltrami, l. c. p. 347.

ГЛАВА III.

Комплексъ осей вращенія, соотвѣтствующихъ импульсивнымъ винтамъ даннаго параметра.

§ 14. Перейдемъ теперь къ болѣе общему случаю, когда на твердое тѣло дѣйствуетъ система импульсивныхъ силъ, приводящаяся къ импульсивному винту даннаго параметра. Силу удара мы опять предположимъ равной единицѣ, такъ какъ она вліяетъ только на величину угловой скорости, а не на положеніе оси вращенія.

Мы уже видѣли, что импульсивные винты даннаго параметра p вызываютъ вращенія вокругъ лучей комплекса:

$$a^2\lambda_0\xi_0 + b^2\mu_0\eta_0 + c^2\nu_0\zeta_0 - p(\lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2) = 0, \tag{117}$$

и если (ξ_0, η_0, ...) координаты одного какого-либо луча (Γ) этого комплекса, то соотвѣтствующій импульсивный винтъ лежитъ на прямой (C), координаты которой (x_0, y_0, ...) опредѣляются по формуламъ (26), гдѣ нужно будетъ положить $\pi = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &x_0 = \lambda_0, && y_0 = \mu_0, && z_0 = \nu_0, \\ &l_0 = a^2\xi_0 - p\lambda_0, && m_0 = b^2\eta_0 - p\mu_0, && n_0 = c^2\zeta_0 - p\nu_0. \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Эти уравненія построены въ предположеніи, что за оси координатъ приняты главныя оси инерціи. Въ томъ-же случаѣ, когда за ось Oz взята какая-либо прямая, а за оси Ox и Oy

оси перпендикулярнаго къ ней сѣченія эллипсоида инерціи, вмѣсто предыдущихъ уравненій будемъ имѣть такія:

$$X_1\lambda_0\xi_0 + X_2\mu_0\eta_0 + P\nu_0\zeta_0 + K_1(\xi_0\nu_0 + \zeta_0\lambda_0) + K_2(\eta_0\nu_0 + \zeta_0\mu_0) - $$
$$- p(\lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2) = 0. \qquad (119)$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \lambda_0, \quad l_0 = X_1\xi_0 + K_1\zeta_0 - p\lambda_0, \\ y_0 &= \mu_0, \quad m_0 = X_2\eta_0 + K_2\zeta_0 - p\mu_0, \\ z_0 &= \nu_0, \quad n_0 = K_1\xi_0 + K_2\eta_0 + P\zeta_0 - p\nu_0. \end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

Оси (Г), вращеніе вокругъ которыхъ происходитъ съ одинаковою угловою скоростью θ, по прежнему касательны къ сферѣ, радіусъ которой равенъ $\frac{1}{M_0\theta}$. Въ случаѣ осей вращенія, лежащихъ въ одной плоскости, сфера можетъ быть замѣнена, какъ въ §§ 10 и 12, окружностью пересѣченія ея съ плоскостью, и вопросъ о нахожденіи осей съ данной угловою скоростью приводится къ нахожденію общихъ касательныхъ къ окружности и той кривой, которую обертываютъ оси, лежащія въ плоскости. Въ случаѣ осей, выходящихъ изъ одной точки, можно разсматривать пересѣченіе ихъ конуса съ конусомъ касательныхъ изъ той-же точки къ сферѣ. Вмѣсто конусовъ можно разсматривать кривыя ихъ сѣченія съ діаметральной плоскостью, какъ это было сдѣлано въ § 11; общія точки этихъ кривыхъ будутъ соотвѣтствовать осямъ съ одною и тою-же угловою скоростью. Соотвѣтствующіе импульсивные винты могутъ быть найдены каждый разъ по общимъ правиламъ, какія будутъ даваться для перехода отъ оси вращенія къ соотвѣтствующему импульсивному винту. Мы не будемъ въ дальнѣйшемъ останавливаться на этихъ вопросахъ, замѣтимъ только, что импульсивные винты, вызывающіе вращенія съ одною и тою-же угловою скоростью, должны во первыхъ принадлежать къ комплексу (29_2),

во вторыхъ къ другому, уравненіе котораго получится, если исключить ξ_0, η_0, ζ_0 изъ ур. (66) и (118):

$$\left(\frac{l_0+px_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{m_0+py_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{n_0+pz_0}{c^2}\right)^2=M_0^2 0^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2),$$

такъ что должны быть общими лучами этихъ двухъ комплексовъ втораго порядка.

§ 15. Подставляя въ ур. (117):

$$\xi_0=0,\quad \eta_0=0,\quad \nu_0=0, \tag{121}$$

мы видимъ, что оно не удовлетворяется, такъ что въ этомъ случаѣ нѣтъ осей вращенія, параллельныхъ какой-либо оси Oz инерціи. Сдѣлавъ тѣ-же положенія въ ур. (119), находимъ:

$$K_1\lambda_0\zeta_0+K_2\mu_0\zeta_0-p(\lambda_0^2+\mu_0^2)=0. \tag{122}$$

Обозначивъ черезъ (x_1y_1) координаты точки γ (фиг. 8), въ которой ось (Г) пересѣкаетъ плоскость xOy, будемъ имѣть:

$$\lambda_0=y_1\zeta_0,\quad \mu_0=-x_1\zeta_0,$$

такъ что по внесеніи этихъ значеній въ ур. (122), получимъ мѣсто точки γ:

$$p(x_1^2+y_1^2)-K_1y_1+K_2x_1=0. \tag{123}$$

Это есть окружность, касательная въ началѣ координатъ къ прямой OT и пересѣкающая оси Ox и Oy еще въ точкахъ A и B, отстоящихъ отъ начала на разстояніяхъ $-\frac{K_2}{p}$ и $\frac{K_1}{p}$; координаты центра C' круга:

$$\alpha'=-\frac{K_2}{2p},\quad \beta'=\frac{K_1}{2p}. \tag{124}$$

И такъ:

Параллельныя оси вращенія образуютъ прямой круглый цилиндръ, проходящій черезъ центръ инерціи. Вторая ось къ радіусу вектору эллипсоида инерціи, параллельному образующимъ цилиндра, нормальна къ цилиндру. Радіусъ цилиндра обратно пропорціоналенъ параметру импульсивнаго винта.

Сдѣлавъ положенія (121) въ ур. (120), получимъ для координатъ прямой (C):

$$\left.\begin{array}{lll} x_0=\lambda_0, & y_0=\mu_0, & z_0=0, \\ l_0=K_1\zeta_0-p\lambda_0, & m_0=K_2\zeta_0-p\mu_0, & n_0=P\zeta_0. \end{array}\right\} \quad (125)$$

Прямая (C) пересѣкаетъ плоскость $O\gamma\Gamma$ въ центрѣ c импульса; ось Oz пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ кратчайшее разстояніе $c\gamma_1$ между осью вращенія и импульсивнымъ винтомъ, раздѣляя его на двѣ части $q\gamma_1=\delta$ и $qc=\delta_1$, причемъ, какъ показываетъ послѣднее уравненіе (ср. § 10):

$$\delta\delta_1 = P. \quad (126)$$

Кратчайшее разстояніе между осью вращенія и импульсивнымъ винтомъ раздѣляется прямой, проходящей черезъ центръ инерціи и параллельной оси вращенія, на двѣ части, произведеніе которыхъ равно обратному значенію квадрата параллельнаго оси вращенія радіуса вектора эллипсоида инерціи [1].

На основаніи ур. (125) уравненія прямой (C) могутъ быть написаны въ формѣ:

$$\begin{aligned} px_0-zy_0-K_1\zeta_0&=0, \\ zx_0+py_0-K_2\zeta_0&=0, \\ yx_0-xy_0+P\zeta_0&=0, \end{aligned}$$

[1]) D. Turazza. Il moto dei systemi rigidi. Padova. 1868, p. 42.

такъ что, исключивъ отсюда x_0, y_0 и ζ_0, получимъ мѣсто прямыхъ (C):

$$Pz^2+K_1xz+K_2yz+K_1py-K_2px+Pp^2=0. \qquad (127)$$

Это гиперболическій параболоидъ, одна направляющая плоскость котораго параллельна плоскости, сопряженной направленію прямыхъ (Г), а другая перпендикулярна къ этимъ прямымъ.

Такъ какъ импульсивные винты параллельны плоскости xOy, то можно искать разстоянія z, на которыхъ они находятся отъ этой плоскости, въ зависимости отъ угловъ, образованныхъ ими съ осями Ox и Oy сѣченія. Изъ ур. (122) имѣемъ:

$$\zeta_0=\frac{p}{K_1x_0+K_2y_0};$$

далѣе, на основаніи перваго изъ уравненій прямой (C):

$$zy_0=px_0-\frac{K_1p}{K_1x_0+K_2y_0},$$

откуда получимъ:

$$z=p\frac{K_2x_0-K_1y_0}{K_1x_0+K_2y_0}, \qquad (128)$$

Имѣя-же въ виду, что K_1 и K_2 пропорціональны направляющимъ косинусамъ прямой OT, выраженіе для z можно написать такъ:

$$z=ptg.(C,OT). \qquad (129)$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ ур. (126) опредѣляетъ вполнѣ положеніе импульсивнаго винта.

Такъ какъ кратчайшее разстояніе $c\gamma_1$ между осями (C) и

(Г) параллельно плоскости xOy, то уравненіе проэкціи этой прямой на эту плоскость будетъ:

$$y:x=-x_0:y_0.$$

Соединивъ это уравненіе съ ур. (128), получимъ:

$$z=p\frac{K_2y+K_1x}{K_1y-K_2x}. \tag{130}$$

Такимъ образомъ прямыя $c\gamma_1$, лежатъ на гиперболическомъ параболоидѣ, направляющими плоскостями котораго служатъ: одна перпендикулярная къ прямымъ (Г), другая перпендикулярная къ прямой ON, составляющей съ направленіемъ (Г) пару осей эллипсоида инерціи. Пересѣченіе параболоида съ цилиндромъ (123) есть кривая 3-го порядка, представляющая геометрическое мѣсто центровъ вращеній всѣхъ параллельныхъ осей (Г), предполагая, что параметръ импульсивнаго винта сохраняетъ одно и то-же значеніе p. Для полученія поверхности, на которой лежатъ эти кривыя, мы должны исключить p изъ ур. (123) и (130); получимъ плоскость:

$$K_1y-K_2x=0 \tag{131}$$

и поверхность третьяго порядка[1]):

$$z=\frac{K_2y+K_1x}{x^2+y^2} \tag{132}$$

Но, какъ показываетъ ур. (123), въ плоскости (131), проходящей черезъ ось Oz и прямую OT, лежатъ только центры вращеній, соотвѣтствующіе $p=0$, т. е. перманентные центры, причемъ, какъ мы знаемъ, они образуютъ въ ней рав-

---

[1]) Ср. объ этомъ у Beltrami, l. c. p. 354.

постороннюю гиперболу (§ 10); остается слѣдовательно разсмотрѣть поверхность (132).

Повернувъ оси координатъ Ox и Oy на уголъ φ, получимъ уравненіе поверхности въ формѣ:

$$z(x^2+y^2)=(K_1 cos\varphi+K_2 sin\varphi)x+(-K_1 sin\varphi+K_2 cos\varphi)y, \quad (133)$$

откуда видно, что всякая плоскость $y=0$, проходящая черезъ ось Oz, пересѣкаетъ поверхность по равносторонней гиперболѣ, представляющей мѣсто центровъ вращеній лежащихъ въ ней осей (Г)[1]. Положивъ въ ур. (133):

$$tg\varphi=\frac{K_2}{K_1},\ \ y=0\ ,$$

получимъ гиперболу, лежащую въ плоскости zOT:

$$zx=\sqrt{K_1^2+K_2^2}. \quad (134)$$

Поверхность (133) пересѣкается плоскостями $z=h$ по кругамъ, уравненія которыхъ, предполагая, что прямая OT принята за ось Ox:

$$h(x^2+y^2)=x\sqrt{K_1^2+K_2^2}. \quad (135)$$

Эти круги касаются плоскости ONz, и ихъ центры лежатъ въ плоскости OTz на равносторонней гиперболѣ:

$$hx=\frac{1}{2}\sqrt{K_1^2+K_2^2}\,,$$

параллельной гиперболѣ (134). Подставивъ въ ур. (135) опять z вмѣсто h и положивъ затѣмъ $z=mx$, убѣдимся, что всякая плоскость, проходящая черезъ прямую ON, пересѣчетъ

[1]) D. Turazza, l. c. § 73. См. также у Beltrami, l. c. p. 357.

поверхность по эллипсамъ, проэктирующимся по кругамъ на плоскость xOy. Для полученія поверхности, на которой лежатъ центры импульсовъ, мы должны исключить p изъ ур. (127) и (130); получимъ двѣ плоскости:

$$z=0, \quad K_1x+K_2y+Pz=0,$$

служащія направляющими плоскостями параболоида (127). Соединяя послѣднее уравненіе съ ур. (127), получимъ новую плоскость:

$$K_1y-K_2x+Pp=0, \tag{136}$$

которая своимъ пересѣченіемъ съ послѣдней изъ направляющихъ плоскостей опредѣляетъ прямую—геометрическое мѣсто центровъ импульсовъ, соотвѣтствующихъ данному значенію параметра p [1]). Прямыя, соотвѣтствующія различнымъ p, пересѣкаютъ плоскость xOy въ точкахъ, лежащихъ на прямой (136), уравненіе которой получится также, если внести $z=0$ въ уравненіе (127) параболоида.

§ 16. Ур. (117) показываетъ, что въ главныхъ плоскостяхъ инерціи не существуетъ осей вращенія. Для изслѣдованія-же распредѣленія этихъ осей въ какой-либо другой діаметральной плоскости, положимъ въ ур. (119):

$$\lambda_0=\mu_0=0, \quad \zeta_0=0; \tag{137}$$

тогда получимъ:

$$K_1\xi_0+K_2\eta_0-p=0. \tag{138}$$

Но уравненіе прямой, лежащей въ плоскости xOy, съ координатами ξ_0, η_0, $\nu_0=1$ есть:

$$y\xi_0-x\eta_0+1=0,$$

---

[1]) D. Turazza, l. c. §§ 71—73.

поэтому ур. (138) выражаетъ, что оси вращенія проходятъ черезъ точку F (фиг. 9), координаты которой:

$$x' = \frac{K_2}{p}, \quad y' = -\frac{K_1}{p}, \tag{139}$$

симметрично расположенной относительно центра инерціи съ той точкой N, въ которой прямая ON пересѣкаетъ цилиндръ осей перпендикулярныхъ къ діаметральной плоскости:

Въ каждой діаметральной плоскости, за исключеніемъ главныхъ плоскостей инерціи, есть пучокъ перваго порядка осей вращенія, вызываемыхъ импульсивными винтами даннаго параметра. Центръ пучка лежитъ на второй оси къ нормали къ плоскости, въ разстояніи отъ центра инерціи обратно пропорціональномъ параметру.

Для полученія соотвѣтствующихъ импульсивныхъ винтовъ внесемъ значенія (137) въ ур. (120); получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &x_0=0, \qquad y_0=0, \qquad z_0=1, \\ &l_0=X_1\xi_0, \quad m_0=X_2\eta_0, \quad n_0=K_1\xi_0+K_2\eta_0-p=0. \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Такъ какъ эти уравненія p не содержатъ, то изъ нихъ можно получить тѣ-же слѣдствія, какъ въ § 10. Импульсивный винтъ перпендикуляренъ къ діаметральной плоскости, пересѣкаетъ ее въ центрѣ импульса c, причемъ ось (Г) параллельна діаметру центральнаго эллипса (80), сопряженному направленію Oc. При переходѣ отъ одной оси (Г) къ другой ей параллельной, параметръ импульсивнаго винта будетъ мѣняться, а центръ c импульса будетъ перемѣщаться по прямой Oc, сопряженной въ центральномъ эллипсѣ направленію (Г). Если (Г) измѣнитъ свое направленіе и станетъ параллельной Oc, то прямая, занимаемая центрами импульсовъ, станетъ параллельной первоначальному направленію (Г) [1]). Продолживъ Oc до встрѣчи въ

---

[1]) D. Turazza, l. c. § 76.

точкѣ c' съ прямой (Г), получимъ между разстояніями Oc и Oc' соотношеніе (81), такъ что когда точка c' сдѣлается центромъ импульса, точка c будетъ лежать на соотвѣтствующей оси (Г)[2]. Обозначивъ по прежнему черезъ x_1 и y_1 координаты точки c, будемъ имѣть:

$$\xi_0 = \frac{y_1}{X_1}, \quad \eta_0 = -\frac{x_1}{X_2}.$$

На основаніи этихъ уравненій и ур. (139), мы можемъ написать ур. (138) въ видѣ:

$$\frac{x_1 x'}{X_2} + \frac{y_1 y'}{X_1} + 1 = 0.$$

Это уравненіе показываетъ, что центры импульсивныхъ винтовъ одинаковаго параметра лежатъ на полярѣ точкѣ N относительно центральнаго эллипса. Импульсивный винтъ пересѣкаетъ поляру въ той ея точкѣ, которая лежитъ на діамерѣ сопряженномъ направленію оси вращенія. Кромѣ того, такъ какъ уравненіе построено вполнѣ симметрично относительно относительно координатъ x_1, y_1 и x', y', то получается такая теорема[3]: *мѣсто центровъ удара, соотвѣтствующихъ осямъ вращенія, проходящимъ черезъ одну и ту-же точку, есть ось вращенія, соотвѣтствующая этой точкѣ какъ центру удара.*

§ 17. Мы видѣли, что въ томъ случаѣ когда $p=0$, т. е. въ случаѣ удара совершеннаго, перманентная ось характеризовалась тѣмъ, что она была параллельной оси сѣченія эллипсоида инерціи плоскостью момента вращенія. Такимъ образомъ каждая прямая Oz пересѣкалась подъ прямымъ угломъ двумя

---

[2]) D. Turazza, l. c. p. 43.

[3]) Эта теорема для случая перманентныхъ осей, лежащихъ въ одной изъ главныхъ плоскостей инерціи, доказана Poinsot: Sur la percussion des corps. Liouville, Journal. T. II, 1857, p. 325.

системами осей (Г), соотвѣтственно параллельными осямъ Ox и Oy сѣченія нормальнаго къ Oz. Посмотримъ, какъ расположены въ болѣе общемъ, разсматриваемомъ теперь случаѣ, оси вращенія (Г), перпендикулярныя къ какой-либо прямой Oz, проходящей черезъ центръ инерціи. Полагая для этой цѣли въ ур. (119):

$$\zeta_0=\nu_0=0, \tag{141}$$

получимъ:

$$X_1\lambda_0\xi_0+X_2\mu_0\eta_0-p(\lambda_0^2+\mu_0^2)=0. \tag{142}$$

Обозначимъ черезъ z разстояніе $O\gamma$ (фиг. 10) оси вращенія отъ центра инерціи, а черезъ α уголъ, образованный ею съ осью Ox; тогда:

$$\xi_0=\frac{cos\alpha}{z},\quad \eta_0=\frac{sin\alpha}{z}, \tag{143}$$

$$\lambda_0=-z\eta_0=-sin\alpha,\quad \mu_0=z\xi_0=cos\alpha.$$

Подставивъ эти значенія въ ур. (142), получимъ:

$$z=-\frac{(X_1-X_2)sin2\alpha}{2p}; \tag{144}$$

или, если x и y текущія координаты оси (Г), то:

$$tg\alpha=y:x,$$

и

$$z=-\frac{X_1-X_2}{p}\,\frac{xy}{x^2+y^2}. \tag{145}$$

Это цилиндроидъ [1]) съ главными параметрами $\frac{X_1}{p}$, $\frac{X_2}{p}$, построенными на осяхъ сѣченія:

Ось вращенія, вызываемаго импульсивнымъ винтомъ даннаго параметра, есть образующая цилиндроида, главныя оси

[1]) Довольно подробное описаніе цилиндроида и его свойствъ можно найти напр., у Schell'я: «Theorie der Bewegung und der Kräfte». Leipzig. 1880. II, Cap. X.

котораго суть оси сѣченія эллипсоида инерціи плоскостью момента вращенія, а главные параметры прямо пропорціональны осямъ сѣченія и обратно пропорціональны параметру импульсивнаго винта.

Наибольшее значеніе z соотвѣтствуетъ направленію $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и есть:

$$\rho = \pm \frac{X_2 - X_1}{2p}. \qquad (146)$$

Если на каждомъ радіусѣ векторѣ откладывать по обѣ стороны отъ центра инерціи абсолютное значеніе разстоянія ρ, то получится поверхность, обладающая тѣмъ свойствомъ, что за ея предѣлами нѣтъ осей вращенія, въ томъ смыслѣ, что радіусы векторы поверхности суть наибольшія разстоянія, на которыхъ, считая отъ центра инерціи, могутъ существовать такія оси. Мы получимъ уравненіе этой поверхности, отнесенное къ главнымъ осямъ инерціи, если въ ур. (146) замѣнимъ выраженіе $(X_2 - X_1)$ его значеніемъ изъ (54) и внесемъ затѣмъ $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$ вмѣсто α, β и γ; тогда получимъ поверхность шестаго порядка:

$$4p^2\rho^6 = A_1^2x^4 + B_1^2y^4 + C_1^2z^4 - 2A_1B_1x^2y^2 - 2B_1C_1y^2z^2 - 2C_1A_1z^2x^2.$$

Импульсивный винтъ (C) пересѣкаетъ плоскость $O\gamma\Gamma$ въ точкѣ c, центрѣ импульса, и кратчайшее разстояніе $c\gamma_1$, раздѣляется плоскостью xOy въ точкѣ q на двѣ части $q\gamma_1 = z$ и $qc = z_1$, произведеніе которыхъ равно обратному значенію квадрата направленнаго по Oq радіуса вектора эллипса сѣченія, т. е.:

$$zz_1 = X_1 cos^2\alpha + X_2 Sin^2\alpha. \qquad (147)$$

Такъ какъ кратчайшее разстояніе cP между осью (C) и осью Oz параллельно (Γ), то, внеся въ ур. (147) вмѣсто z

его значеніе изъ уравненія цилиндроида, получимъ мѣсто прямыхъ cP:

$$z_1 = \frac{p}{X_2 - X_1} \frac{X_1 x_1^2 + X_2 y_1^2}{xy}, \qquad (148)$$

т. е. ту поверхность, на которой должны находиться центры импульсовъ. Такъ какъ съ другой стороны они должны находиться на цилиндрической поверхности, описываемой кратчайшими разстояніями $c\gamma_1$, то найдемъ основаніе цилиндра—мѣсто точки q. Радіусъ векторъ $Oq = \rho_1$ очевидно равенъ моменту прямой (C) относительно оси Oz, а вмѣстѣ съ тѣмъ тотъ-же моментъ дается послѣднимъ изъ уравненій (120), гдѣ вмѣсто ξ_0, η_0, ... нужно будетъ внести ихъ значенія изъ (141) и (143); такимъ образомъ получимъ:

$$\rho_1 = \frac{K_1 \cos\alpha + K_2 \sin\alpha}{z},$$

или, замѣнивъ z его значеніемъ изъ (144), получимъ кривую, описываемую точкою q:

$$(X_1 - X_2)xy + p(K_1 x + K_2 y) = 0. \qquad (149)$$

Это равносторонняя гипербола, ассимптоты которой параллельны осямъ сѣченія. Пересѣченіе прямаго цилиндра, имѣющаго эту кривую своимъ основаніемъ, и поверхности (148) есть кривая—мѣсто центровъ импульсовъ, а пересѣченіе того-же цилиндра съ цилиндроидомъ (145) даетъ кривую, занимаемую центрами вращеній. Эти кривыя будутъ видоизмѣняться съ измѣненіемъ параметра p, но всегда будутъ лежать на поверхностяхъ, уравненія которыхъ получаются исключеніемъ p съ одной стороны между ур. (148) и (149), съ другой—между ур. (145) и (149). Такимъ образомъ получимъ для поверх-

ности центровъ ударовъ конусъ втораго порядка, съ вершиной въ центрѣ инерціи:

$$X_1x^2+X_2y^2-K_1xz-K_2yz=0,$$

а для мѣста центровъ вращеній уже извѣстную намъ поверхность третьяго порядка:

$$z=\frac{K_1x+K_2y}{x^2+y^2}.$$

§ 18. Обратимся теперь къ изслѣдованію конуса осей вращенія, проходящихъ черезъ какую-либо точку M пространства. Принявъ OM за ось Oz въ ур. (119) и (120), можно будетъ положить:

$$OM=R,\ \lambda_0=-R\eta_0,\ \mu_0=R\xi_0,\ \nu_0=0. \tag{150}$$

Если перенесемъ оси координатъ параллельно самимъ себѣ въ точку M, то вмѣсто ξ_0, η_0, ζ_0 можно будетъ писать текущія координаты x, y, z образующей конуса. Такимъ образомъ ур. (119) преобразуется въ такое:

$$pR(x^2+y^2)+(X_1-X_2)xy+K_1yz-K_2xz=0. \tag{151}$$

Этотъ конусъ обращается въ конусъ перманентныхъ осей при $p=0$ и въ цилиндръ параллельныхъ осей при $R=\infty$, причемъ для полученія уравненія цилиндра нужно преобразовать предварительно уравненіе конуса къ центру инерціи. Положивъ въ ур. (151) $z=-R$, получимъ кривую сѣченія конуса плоскостью xOy:

$$pR(x^2+y^2)+(X_1-X_2)xy-K_1Ry+K_2Rx=0. \tag{152}$$

Кривая при всѣхъ значеніяхъ p и R касается въ центрѣ инерціи прямой OT; ассимптоты ея параллельны двумъ образующимъ цилиндроида, проходящимъ черезъ точку M. Пока эти

образующія дѣйствительны, кривая—гипербола, въ крайнихъ точкахъ цилиндроида двѣ образующія сливаются въ одну, и кривая станетъ параболой, наконецъ, когда точка M выходитъ за предѣлы цилиндроида, кривая сѣченія есть эллипсъ. Какъ видно изъ ея уравненія, кривая при всякомъ значеніи R проходитъ черезъ точки $A\left(-\frac{K_2}{p}, 0\right)$ и $B\left(0, \frac{K_1}{p}\right)$ (фиг. 8), лежащія на осяхъ сѣченія, тѣ точки, въ которыхъ эти оси пересѣкаютъ цилиндръ осей параллельныхъ OM. Координаты центра C'' кривой суть:

$$\alpha'' = -R\,\frac{2pRK_2 + (X_1 - X_2)K_1}{4p^2R^2 - (X_1 - X_2)^2},$$

$$\beta'' = R\,\frac{2pRK_1 + (X_1 - X_2)K_2}{4p^2R^2 - (X_1 - X_2)^2},$$

Если обозначить черезъ C' и C_0 центры круга и гиперболы, получающихся въ сѣченіи, если положить одинъ разъ $R = \infty$, другой разъ $p = 0$, то точка C'' раздѣляетъ разстояніе $C'C_0$ внѣшне въ отношеніи $\left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right)^2 : p^2R^2$.

Каждому значенію параметра p соотвѣтствуетъ на прямой OM такая точка, что соотвѣтствующій конусъ осей вращенія обращается въ двѣ плоскости. Розыскивая условіе этого обращенія изъ ур. (151), получимъ:

$$pR = -\frac{(X_1 - X_2)K_1K_2}{K_1^2 + K_2^2}. \qquad (153)$$

Геометрическое мѣсто такихъ точекъ составитъ поверхность, уравненіе которой, по отношенію къ главнымъ осямъ инерціи, легко получимъ, если правую часть ур. (153) преобразуемъ на основаніи ур. (50), (51) и (53):

$$p(A_1^2y^2z^2 + B_1^2z^2x^2 + C_1^2x^2y^2) + A_1B_1C_1xyz = 0. \qquad (154)$$

Это такъ называемая поверхность особенностей комплекса

втораго порядка осей вращенія. Она обладаетъ по отношенію къ послѣднему не только тѣмъ свойствомъ, что для ея точекъ конусы втораго порядка осей вращенія преобразуются въ двѣ плоскости, но также, какъ будетъ это видно далѣе, и тѣмъ, что кривыя втораго порядка, обертываемыя осями, лежащими въ какой-либо плоскости, для плоскостей касательныхъ къ поверхности преобразуются въ двѣ точки. Мы могли-бы ее получить, отыскивая мѣсто точекъ F (§ 16), центровъ пучковъ перваго порядка, лежащихъ въ діаметральныхъ плоскостяхъ. Что касается до формы поверхности, то простое изслѣдованіе показываетъ, что главныя оси инерціи служатъ для нея двойными линіями, и плоскости, проходящія черезъ одну изъ нихъ, напр. Oz, пересѣкаютъ поверхность по эллипсамъ. Если предположимъ, что $p>0$, и что плоскость образуетъ съ осью Ox уголъ $\frac{\pi}{2}+\theta$, то если θ измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, центръ эллипса лежитъ на положительной оси Oz, и ось его, лежащая на этой прямой, сначала возрастаетъ отъ нуля до $-\frac{C_1}{2p}$, причемъ $tg\theta=-\frac{A_1}{B_1}$, а затѣмъ убываетъ опять до нуля; вторая-же ось отъ значенія $\frac{B_1}{p}$ убываетъ до значенія $-\frac{A_1}{p}$. При измѣненіи θ отъ $\frac{\pi}{2}$ до π, эллипсы располагаются *ниже* плоскости xOy. Подобное-же произойдетъ, если будемъ проводить плоскости черезъ оси Oy и Ox. Замѣтимъ, что координаты какой-либо точки поверхности могутъ быть представлены въ видѣ:

$$x=-\frac{A_1\beta\gamma}{p},\quad y=-\frac{B_1\gamma\alpha}{p},\quad z=-\frac{C_1\alpha\beta}{p},\qquad (155)$$

гдѣ α, β, γ параметры, связанныя уравненіемъ:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Подставивъ значеніе (153) въ уравненіе (151) конуса, находимъ тѣ двѣ плоскости, въ которыя онъ обращается:

$$K_1 y - K_2 x = 0, \tag{156}$$

$$K_1 x - K_2 y + \frac{K_1^2 + K_2^2}{X_1 - X_2} z = 0, \tag{157}$$

причемъ начало координатъ въ точкѣ M. Изъ нихъ первая проходитъ черезъ прямыя OM и OT и по своему положенію не зависитъ отъ того, гдѣ на прямой OM взята точка M, вторая-же проходитъ черезъ M и тѣ точки A и B, въ которыхъ цилиндръ осей, соотвѣтствующій разсматриваемому значенію параметра p, пересѣкаетъ оси Ox и Oy. Дѣйствительно, въ силу равенства (153), ур. (157) удовлетворяется, если положить (§ 15):

$$x = -\frac{K_2}{p},\ y = 0,\ z = -R, \text{ или } x = 0,\ y = \frac{K_1}{p},\ z = -R;$$

при перемѣщеніи точки M вдоль OM, эта плоскость остается себѣ параллельной.

Такъ какъ $z_0 = \nu_0 = 0$, то импульсивные винты, вызывающіе вращенія вокругъ производящихъ конуса, параллельны плоскости xOy. Для полученія поверхности, геометрическаго мѣста этихъ винтовъ, составимъ уравненіе оси одного изъ нихъ, воспользовавшись для этой цѣли ур. (120), (150) и (4):

$$\left.\begin{aligned} (X_1 + Rz)\xi_0 + pR\eta_0 + K_1\zeta_0 &= 0, \\ -pR\xi_0 + (X_2 + Rz)\eta_0 + K_2\zeta_0 &= 0, \\ (K_1 - Rx)\xi_0 + (K_2 - Ry)\eta_0 + P\zeta_0 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

и исключимъ отсюда перемѣнныя ξ_0, η_0, ζ_0; тогда получимъ:

$$\begin{aligned} (K_1 x + K_2 y + Pz)R^2 z + \big(P(X_1 + X_2) - (K_1^2 + K_2^2)\big)Rz + \\ + (K_2 X_1 + pRK_1)Ry + (K_1 X_2 - pRK_2)Rx + \\ + PX_1 X_2 - X_1 K_2^2 - X_2 K_1^2 + Pp^2 R^2 = 0. \end{aligned} \tag{159}$$

Это гиперболическій параболоидъ, одна направляющая плоскость котораго параллельна плоскости xOy, а другая— плоскости сопряженной направленію Oz. Для опредѣленія разстоянія, на которомъ импульсивный винтъ даннаго направленія находится отъ плоскости xOy, опредѣлимъ ζ_0 изъ уравненія комплекса:

$$\zeta_0 = \frac{Rp(x_0^2+y_0^2)-(X_1-X_2)x_0y_0}{R(K_1x_0+K_2y_0)},$$

и внеся это значеніе въ первое изъ ур. (158), опредѣлимъ:

$$z = \frac{pR(K_2x_0-K_1y_0)-(X_2K_1x_0+X_1K_2y_0)}{R(K_1x_0+K_2y_0)}.$$

Обозначимъ черезъ z' то значеніе, которое принимаетъ z, если положимъ:

$$x_0 : y_0 = K_1 : K_2,$$

другими словами черезъ z' обозначается разстояніе отъ плоскости xOy образующей параболоида, параллельной прямой OT:

$$z' = -\frac{X_1K_2^2+X_2K_1^2}{R(K_1^2+K_2^2)}; \tag{160}$$

тогда:

$$z-z' = \left(p+\frac{(X_1-X_2)K_1K_2}{R(K_1^2+K_2^2)}\right)\frac{K_2x_0-K_1y_0}{K_1x_0+K_2y_0}, \tag{161}$$

или, какъ въ § 15:

$$z-z' = \left(p+\frac{(X_1-X_2)K_1K_2}{R(K_1^2+K_2^2)}\right)tg(C,OT). \tag{162}$$

Если вспомнимъ, что импульсивный винтъ пересѣкаетъ плоскость, проходящую черезъ центръ инерціи и ось (Г), въ такой точкѣ c (центрѣ импульса), что прямая Oc есть діаметръ сѣченія, сопряженный направленію (Г), то уравненіемъ (162) положеніе импульсивнаго винта вполнѣ опредѣляется.

Въ частномъ случаѣ, когда между p и R существуетъ соотношеніе (153), конусъ осей преобразуется въ двѣ плоскости, а уравненіе, опредѣлявшее z, распадается на два:

$$K_1x_0+K_2y_0=0, \tag{163}$$

$$z=z'.$$

Изъ нихъ первое даетъ направленіе ON для тѣхъ импульсивныхъ винтовъ, которые вызываютъ вращенія вокругъ осей, лежащихъ въ плоскости MOT (156) (ср. § 16), слѣдовательно второе опредѣляетъ плоскость, въ которой лежатъ импульсивные винты, вызывающіе вращенія вокругъ осей, лежащихъ въ плоскости MAB (157). Для полученія мѣста первой группы винтовъ можно исключить ζ_0 изъ перваго и третьяго изъ ур. (158), затѣмъ воспользоваться соотношеніемъ между ξ_0 и η_0, вытекающимъ изъ ур. (150) и (163):

$$\xi_0:\eta_0=K_1:K_2,$$

и наконецъ внести вмѣсто p его значеніе изъ ур. (153); тогда получимъ уравненіе:

$$K_1x+K_2y+Pz+\frac{P}{R}\,\frac{X_1K_1^2+X_2K_2^2}{K_1^2+K_2^2}-K_1^2-K_2^2=0; \tag{164}$$

получили плоскость, параллельную плоскости сопряженной направленію OM въ эллипсоидѣ, результатъ, который нужно было предвидѣть на основаніи изложеннаго въ § 16.

Для опредѣленія положенія импульсивныхъ винтовъ въ плоскости $z=z'$, замѣтимъ, что для разсматриваемаго значенія p мы будемъ имѣть такое значеніе для ζ_0:

$$\zeta_0=-\frac{X_1-X_2}{R(K_1^2+K_2^2)}\,(K_2x_0+K_1y_0).$$

Воспользовавшись-же ур. (150) и подставляя въ третье изъ уравненій (158) прямой (C), будемъ имѣть:

$$x\xi_0+y\eta_0=\frac{K_1}{R}\left(1-P\frac{X_1-X_2}{K_1^2+K_2^2}\right)\xi_0+\frac{K_2}{R}\left(1+P\frac{X_1-X_2}{K_1^2+K_2^2}\right)\eta_0,$$

откуда видно, что импульсивные винты, лежащіе въ плоскости $z=z'$, проходятъ черезъ точку M':

$$x'=\frac{K_1^2+K_2^2-P(X_1-X_2)}{K_1^2+K_2^2}\frac{K_1}{R},\quad y'=\frac{K_1^2+K_2^2+P(X_1-X_2)}{K_1^2+K_2^2}\frac{K_2}{R},\quad z=z', \tag{165}$$

при перемѣщеніи точки M вдоль OM, точка M' перемѣщается по другой прямой OM', проходящей черезъ центръ инерціи.

Такимъ образомъ, черезъ каждую точку M прямой OM проходитъ пучокъ перваго порядка осей (Г), лежащій въ плоскости MOT; соотвѣтствующіе импульсивные винты перпендикулярны къ этой плоскости и лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ (164). Точки M прямой OM служатъ центрами и другихъ пучковъ перваго порядка осей (Г), лежащихъ въ параллельныхъ плоскостяхъ MAB; соотвѣтствующіе имъ винты (C) лежатъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ OM, образуя пучки перваго порядка, центры M' которыхъ лежатъ на другой прямой OM'. Въ этомъ смыслѣ каждой прямой OM въ системѣ осей (Г) соотвѣтствуетъ прямая OM' въ системѣ винтовъ (C), и каждой точкѣ первой прямой — точка на второй. Изъ ур. (165) видно, что при данномъ направленіи OM:

$$OM.OM'=const.$$

§ 19. Посмотримъ теперь, каково геометрическое мѣсто осей вращенія, лежащихъ въ одной плоскости (m). Принявъ оси сѣченія, параллельнаго плоскости (m), за оси Ox и Oy, а нормальный къ нему радіусъ векторъ за ось Oz, преобразуемъ

уравненіе комплекса къ осевымъ координатамъ по правилу, указанному въ § 1. Получимъ:

$$X_1p_0t_0+X_2q_0u_0+Pr_0v_0+K_1(p_0v_0+r_0t_0)+K_2(q_0v_0+r_0u_0)-$$

$$-p(t_0^2+u_0^2+v_0^2)=0. \qquad (166)$$

Для полученія обертки въ какой-либо плоскости мы должны внести въ это уравненіе вмѣсто координатъ ихъ значенія по формуламъ (7) и (8), подразумѣвая подъ t_1, u_1 и v_1 координаты разсматриваемой плоскости. Обозначивъ черезъ R ординату z точки M пересѣченія нашей плоскости съ осью Oz, мы будемъ имѣть уравненіе плоскости въ видѣ:

$$-\frac{z}{R}+1=0$$

и нужно будетъ положить:

$$t_1=0,\ u_1=0,\ v_1=-\frac{1}{R}.$$

Перемѣнныя t, u, v означаютъ координаты перемѣнной плоскости, пересѣкающей данную по прямымъ (Г). Если среди безчисленнаго числа плоскостей, проходящихъ черезъ каждую изъ прямыхъ (Г), будемъ выбирать только такія, которыя перпендикулярны къ плоскости (m), или къ ей параллельной—xOy, то нужно положить $v=0$, и тогда выраженія (7) и (8) будутъ пропорціональны такимъ:

$$p_0=u, \quad q_0=-t, \quad r_0=0,$$

$$t_0=Rt, \quad u_0=Ru, \quad v_0=1.$$

Подставивъ эти значенія въ ур. (166), получимъ въ линейныхъ координатахъ уравненіе проэкціи искомой обертки

или уравненіе ея самой, если перенесемъ оси координатъ параллельно имъ самимъ въ точку M:

$$pR^2(t^2+u^2)-(X_1-X_2)Rtu+K_2t-K_1u+p=0,$$

или въ координатахъ точки:

$$(K_1^2-4p^2R^2)x^2+(K_2^2-4p^2R^2)y^2+2\Big(K_1K_2-2pR(X_1-X_2)\Big)xy+$$
$$2R\Big(-K_1(X_1-X_2)+2pRK_2\Big)x+2R\Big(K_2(X_1-X_2)-2pRK_1\Big)y+$$
$$+\Big((X_1-X_2)^2-4p^2R^2\Big)R^2=0. \qquad (167)$$

Во всѣхъ случаяхъ, когда p отлично отъ нуля, это кривая центральная и координаты центра:

$$x'=\frac{K_2}{2p}, \quad y'=-\frac{K_1}{2p}, \quad z'=R;$$

при перемѣщеніи плоскости параллельно самой себѣ, центръ перемѣщается по прямой, перпендикулярной къ плоскости сѣченія и пересѣкающей эту плоскость въ точкѣ, раздѣляющей пополамъ разстояніе OF центра инерціи отъ центра пучка осей вращенія, лежащихъ въ діаметральной плоскости. При измѣненіи параметра, центръ опишетъ прямую параллельную прямой ON.

Уравненіе обертки, отнесенное къ центру, будетъ:

$$(K_2^2-4p^2R^2)t^2-2\Big(K_1K_2-2pR(X_1-X_2)\Big)tu+(K_1^2-4p^2R^2)u^2=4p^2.$$

Она обращается въ двѣ точки, если между p и R существуетъ соотношеніе:

$$(K_1^2-4p^2R^2)(K_2^2-4p^2R^2)=\Big(K_1K_2-2pR(X_1-X_2)\Big)^2; \quad (168)$$

причемъ координаты этихъ точекъ относительно центра кривой суть:

$$x_1 = \frac{\sqrt{K_2^2-4p^2R^2}}{2p}, \quad y_1 = -\frac{\sqrt{K_1^2-4p^2R^2}}{2p},$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{K_2^2-4p^2R^2}}{2p}, \quad y_2 = \frac{\sqrt{K_1^2-4p^2R^2}}{2p},$$

гдѣ подъ p нужно подразумѣвать одинъ изъ четырехъ корней ур. (168).

Обозначимъ по прежнему черезъ $V(p)$ функцію (86), а черезъ p_k одинъ изъ трехъ дѣйствительныхъ корней ур. (85), представляющій обратное значеніе квадрата длины одной изъ полуосей конуса (82). Мы можемъ представить ур. (168) въ видѣ:

$$D = -2pRV(2pR) = 0,$$

гдѣ черезъ D обозначенъ дискриминантъ ур. (167).

Если отбросить корень $p=0$, то остальные три корня имѣютъ видъ:

$$p = \frac{p_k}{2R},$$

т. е. значенія параметра, обращающія обертку въ двѣ точки, обратно пропорціональны длинамъ полуосей конуса осей, соотвѣтствующаго плоскости сѣченія. Если-же будемъ считать p даннымъ и искать тѣ значенія R, при которыхъ обертка обращается въ двѣ точки, то окажется, что это будетъ имѣть мѣсто въ четырехъ точкахъ O, M_1, M_2, M_3 прямой OM, причемъ, такъ какъ изъ корней p_k только одинъ отрицателенъ (87), то при $p>0$, одна изъ точекъ, напр. M_3, лежитъ ниже плоскости xOy. Выше точки M_2 и въ промежуткѣ M_1O, дискриминантъ отрицателенъ, поэтому кривая будетъ эллипсомъ, въ промежуткѣ M_2M_1 — гиперболой, подъ плоскостью xOy — опять гиперболой, такъ какъ R мѣняетъ знакъ, ниже M_3

— опять эллипсомъ. Если въ ур. (88) внести $2pR$ вмѣсто p и $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{R}$, $\frac{z}{R}$ вмѣсто α, β, γ, то получимъ поверхность шестаго порядка:

$$4p^3R^6 - pR^2(A_1^2x^2 + B_1^2y^2 + C_1^2z^2) + A_1B_1C_1xyz = 0, \quad (169)$$

обладающую тѣмъ свойствомъ, что кривыя, обертываемыя осями вращеній, лежащими въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ ея точки и перпендикулярныхъ къ соотвѣтствующимъ радіусамъ векторамъ, обращаются въ двѣ точки. Докажемъ, что сами плоскости обертываютъ при этомъ поверхность особенностей комплекса. Для этой цѣли найдемъ выраженія для координатъ x_1, y_1, z_1 основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ центра инерціи па касательную плоскость къ поверхности (154). Обозначимъ черезъ f лѣвую часть ур. (154), черезъ δ' длину вышеупомянутаго перпендикуляра, а черезъ x, y и z координаты точки касанія, тогда легко найдемъ:

$$\delta' = -\frac{A_1B_1C_1xyz}{\Delta},$$

гдѣ:

$$\Delta^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2.$$

Если-же вмѣсто координатъ x, y и z введемъ ихъ выраженія (155), то получимъ:

$$\delta' = \frac{A_1^2B_1^2C_1^2\alpha^2\beta^2\gamma^2}{p^3\Delta},$$

и напр.:

$$\cos(\delta'x) = \frac{(2\alpha^2-1)p\delta'}{A_1\beta\gamma},$$

такъ что:

$$x_1 = \frac{(2\alpha^2-1)p\delta'^2}{A_1\beta\gamma}, \quad y_1 = \frac{(2\beta^2-1)p\delta'^2}{B_1\gamma\alpha}, \quad z_1 = \frac{(2\gamma^2-1)p\delta'^2}{C_1\alpha\beta}.$$

Имѣя-же въ виду съ одной стороны, что $R = \delta'$, съ другой —соотношеніе между косинусами α, β и γ, подстановкой убѣдимся, что эти значенія координатъ ур. (169) удовлетворяютъ.

Для полученія импульсивныхъ винтовъ, вызывающихъ вращенія вокругъ касательныхъ къ кривой, лежащей въ плоскости (m), мы должны имѣть въ виду, что въ данномъ случаѣ:

$$\zeta_0 = 0, \ \lambda_0 = x_0 = -R\eta_0, \ \mu_0 = y_0 = R\xi_0, \tag{170}$$

и что слѣдовательно координаты l_0, m_0 и n_0 по ур. (120) могутъ быть представлены въ видѣ:

$$l_0 = X_1\xi_0 + pR\eta_0, \ m_0 = X_2\eta_0 - pR\xi_0, \ n_0 = K_1\xi_0 + K_2\eta_0 - pz_0;$$

такъ что уравненія прямой (C) будутъ:

$$\left.\begin{array}{r}(Rz + X_1)\xi_0 + pR\eta_0 - yz_0 = 0,\\ -pR\xi_0 + (Rz + X_2)\eta_0 + xz_0 = 0,\\ (Rx - K_1)\xi_0 + (Ry - K_2)\eta_0 + pz_0 = 0.\end{array}\right\} \tag{171}$$

Для полученія поверхности остается исключить ξ_0, η_0 и z_0; получимъ гиперболоидъ:

$$pR^2(x^2 + y^2 + z^2) + K_2Rxz - (X_1 - X_2)Rxy - K_1Ryz +$$
$$+ (K_2X_1 - pK_1R)x - (K_1X_2 + pK_2R)y + pR(X_1 + X_2)z +$$
$$+ p(p^2R^2 + X_1X_2) = 0.$$

Всѣ гиперболоиды, соотвѣтствующіе различнымъ p, имѣютъ одинъ и тотъ-же центръ, координаты котораго:

$$x_1 = \frac{K_1}{2R}, \ y_1 = \frac{K_2}{2R}, \ z_1 = -\frac{X_1 + X_2}{2R}.$$

Уравненіе поверхности, отнесенное къ центру, будетъ:

$$2pR(x^2+y^2+z^2)+2K_2xz-2(X_1-X_2)xy-2K_1yz+$$

$$+\frac{1}{4R^2}V(2pR)=0, \qquad (172)$$

гдѣ V есть функція вида (86).

Для отысканія направленія и длинъ полуосей поверхности, составимъ извѣстную систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned}(2pR-S)\lambda-(X_1-X_2)\mu+K_2\nu&=0,\\ -(X_1-X_2)\lambda+(2pR-S)\mu-K_1\nu&=0,\\ K_2\lambda-K_1\mu+(2pR-S)\nu&=0,\\ V(2pR-S)&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (173)$$

причемъ послѣднее уравненіе есть результатъ исключенія косинусовъ λ, μ и ν изъ первыхъ трехъ. Такъ какъ извѣстный членъ его есть $V(2pR)$, то, обозначивъ черезъ S_1, S_2, S_3 его корни, будемъ имѣть:

$$S_1S_2S_3=V(2pR);$$

съ другой стороны, если сравнить систему ур. (173) съ подобной-же системой § 11, то можно написать вообще:

$$2pR-S_k=p_k, \qquad k=1,\ 2,\ 3.$$

поэтому уравненіе гиперболоида, отнесенное къ центру и къ осямъ, должно имѣть такой видъ:

$$(p_1-2pR)x^2+(p_2-2pR)y^2+(p_3-2pR)z^2+$$

$$+\frac{1}{4R^2}(p_1-2pR)(p_2-2pR)(p_3-2pR)=0.$$

Уравненіе поверхности, представленное въ такой формѣ, даетъ понятіе о томъ, какъ она будетъ видоизмѣняться при отдѣльномъ измѣненіи величинъ p, R и произведенія pR.

Ассимптотическій конусъ поверхности, какъ видно изъ ур. (172), не равенъ конусу (151) осей вращенія. Но если составимъ уравненіе конуса нормальнаго къ ассимптотическому, то легко убѣдимся, что сѣченіе его плоскостью, параллельной плоскости сѣченія и отстоящей отъ вершины конуса на разстояніи R, есть кривая (167), обертываемая осями вращенія, лежащими въ плоскости, отстоящей отъ плоскости сѣченія на такомъ-же разстояніи R.

Такъ какъ ось вращенія (Г), лежащая въ плоскости перпендикулярной къ оси Oz (фиг. 1), одновременно перпендикулярна и къ оси Oz и къ оси соотвѣтствующаго импульсивнаго винта (C), то она параллельна кратчайшему разстоянію PQ между этими двумя прямыми. Для полнаго опредѣленія положенія прямой (C), соотвѣтствующей данной оси вращенія (Г), достаточно поэтому знать длину $PQ=\Delta$ вышеупомянутаго кратчайшаго разстоянія, а также ординату $OP=z_1$ точки пересѣченія послѣдняго съ осью Oz. Обозначимъ черезъ α уголъ, образованный осью (Г) съ осью Ox, тогда координаты точки Q будутъ $\Delta cos\alpha$, $\Delta sin\alpha$ и $-z_1$; имѣя-же въ виду ур. (70), и подставляя координаты точки Q въ первыя два изъ ур. (171), получимъ:

$$(X_1-Rz_1)cos\alpha=(\Delta\delta z_0-pR)sin\alpha,$$
$$(X_2-Rz_1)sin\alpha=(pR-\Delta\delta z_0)cos\alpha.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій получаемъ:

$$Rz_1=X_1cos^2\alpha+X_2sin^2\alpha, \tag{174}$$

$$\Delta\delta z_0-pR=\left(X_1-X_2\right)sin\alpha cos\alpha. \tag{175}$$

Такъ какъ правая часть перваго изъ этихъ уравненій представляетъ обратное значеніе квадрата параллельнаго (Г) радіуса вектора эллипсоида, а за прямую Oz мы можемъ взять

любую изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ O и лежащихъ въ плоскости перпендикулярной къ (Г), то: кратчайшія разстоянія соотвѣтствующихъ прямыхъ (C) и (Г) отъ какой-либо прямой, проходящей черезъ центръ инерціи и лежащей въ плоскости перпендикулярной къ (Г), пересѣкаютъ эту третью прямую въ двухъ точкахъ, произведеніе разстояній которыхъ отъ центра инерціи равно обратному значенію квадрата параллельнаго (Г) радіуса вектора эллипсоида. Если прямую Oz взять параллельно кратчайшему разстоянію прямыхъ (C) и (Г), то ур. (174) выразитъ теорему (126) Turazza; съ другой стороны, какъ видно изъ фиг. 1, оно есть прямое слѣдствіе послѣдней. Въ самомъ дѣлѣ изъ подобныхъ треугольниковъ $pq\gamma_1$ и Qcq, гдѣ $cq = \delta_1$, $q\gamma_1 = \delta$, $pq = R$, $Qq = z_1$, имѣемъ:

$$\delta : R = z_1 : \delta_1,$$

откуда:

$$\delta\delta_1 = Rz_1.$$

Что касается до ур. (175), то въ немъ:

$$\delta z_0 = q\gamma_1 cos(p\gamma_1 q) = p\gamma_1 = M\gamma,$$

слѣдовательно, если $M\gamma = \Delta_1$:

$$\Delta\Delta_1 = pR + (X_1 - X_2) sin\alpha cos\alpha. \qquad (176)$$

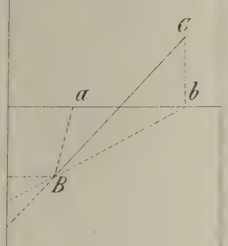
Это уравненіе, представляющее соотношеніе между кратчайшими разстояніями прямыхъ (C) и (Г) отъ оси Oz, вмѣстѣ съ ур. (174) и извѣстнымъ направленіемъ кратчайшаго разстоянія Δ опредѣляетъ положеніе прямой (C).

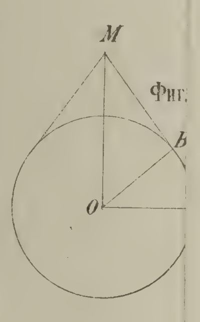
ВАЖНѢЙШІЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Стран.	*Строка:*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ читать:*
4	въ выноскѣ	23	16
10	5 сн.	Особенною поверхностью	Поверхностью особенностей
19	7 сн.	X^2	X_2
29 33	въ выноскѣ	Mazoni	Masoni
38	8 и 11 св.	$tg(CON)$	$tg(cON)$
42	2 св.	$\frac{1}{M_0 R}$	$\theta = \frac{1}{M_0 R}$
43	1 сн.	$cos(COK)$	$cos(C,OK)$
44	2 св.	$cos(COT)$	$cos(C,OT)$
44	6 сн.	$K_1 x^2 + K_2 y^2$	$K_1^2 x^2 + K_2^2 y^2$
47	7 св.	$cos(\Gamma OT)$ $cos(\Gamma OK)$	$cos(\Gamma, OT)$ $cos(\Gamma, OK)$
49	11 св.	$n_0 z_0$	$n_0 \zeta_0$
49	3 сн.	ур. (104) опредѣляютъ	ур. (104) при всякихъ ξ_0, η_0, ζ_0 опредѣляютъ

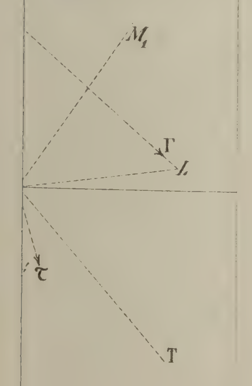
Къ стат

Фиг. 2.

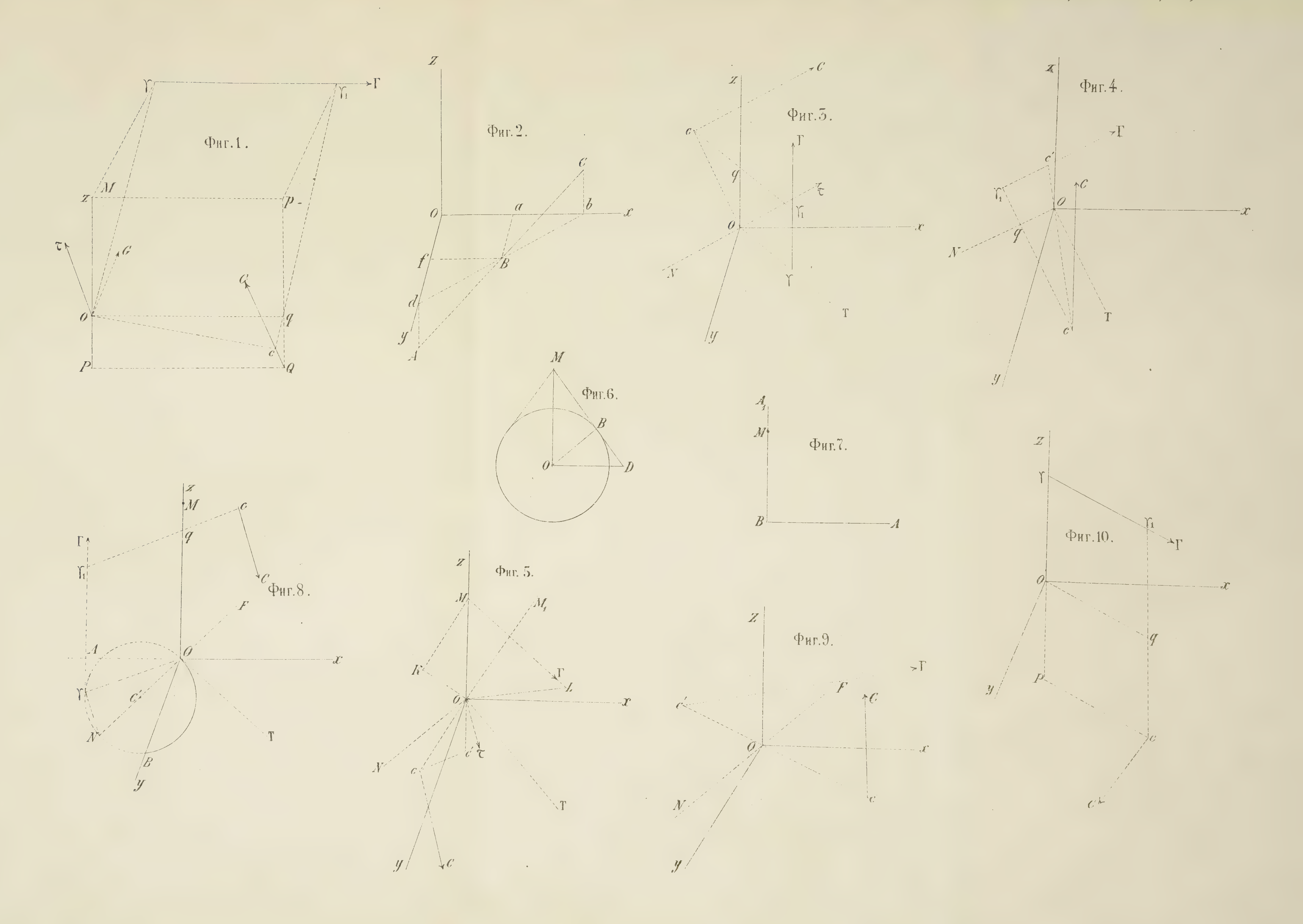




Фиг. 5.



Къ статьѣ И. Занчевскаго „Геометрическія мѣста въ теоріи осей вращенія".



Къ теоріи вѣкового охлажденія земли.

М. П. Рудзкаго.

Sur la théorie du refroidissement séculaire du globe terrestre.

M. P. Rudzki.

---

§ 1. Вступленіе. Условія въ поверхности.

Вопросъ вѣкового охлажденія земли разбирался Фурье[1]), Пуассономъ, Риманомъ, Бишофомъ, Томсономъ и другими.

Въ послѣднее время онъ былъ затропутъ въ извѣстномъ спорѣ Фэя[2]) и Лаппарана о фигурѣ земли и Э. Дрыгальскимъ[3]).

Выводы, помѣщенные здѣсь, по большей части независимы отъ предположенія о первоначальномъ распредѣленіи температуры внутри земли. Предполагается, что земля есть тѣло, теряющее теплоту; но такое заключеніе неминуемо слѣдуетъ изъ повсемѣстнаго увеличенія температуры по мѣрѣ углубленія. Впрочемъ, если дается предпочтеніе какой-либо гипотезѣ, то

---

[1]) Fourrier. Annales de Chimie et Physique, XIII томъ.
Poisson. Theorie mathematique de la chaleur.
Riemann. Partielle Differentialgleichungen.
Thomson W. «Cooling of the Earth» прибавл. къ «Treatise on Nat. Phil.» Thomson et Tait II изданіе.
Bischof G. Die Wärmelehre des Inneren Unseres Planeten.

[2]) Статьи Фэя въ Comptes Rendus за 1886 г. въ «Revue Scientifique». Лаппарана въ «Revue Scientifique».

[3]) E. v. Drygalski. Die Bewegungen der Continente zur Eiszeit. Verhandl. des VIII deutschen Geographentages.

уже несомнѣнно гипотезѣ Лапласа и Фурье, такъ какъ она лучше всего согласуется съ цѣлымъ рядомъ фактовъ, съ самыми разнообразными данными, заимствованными изъ Геологіи и Астрономіи.

Прямое доказательство, что она справедлива, не существуетъ. Не будемъ напрасно пытаться доказать ее, но взаимно не будемъ разсматривать другихъ гипотезъ, придуманныхъ съ цѣлью выяснить увеличеніе температуры по мѣрѣ углубленія. Несмотря на авторитетъ Пуассона и Мора, ихъ гипотезы преданы забвенію. Крайне оригинальная гипотеза Лошмидта[1]), основанная на нѣсколько противурѣчащемъ опыту предположеніи, что внѣшнія силы могутъ производить вліяніе на частичныя скорости, почти не нашла поклонниковъ.

Упуская изъ виду вѣковыя измѣненія въ распредѣленіи суши и моря и въ направленіи холодныхъ и теплыхъ теченій, можно сказать, что дно Океановъ содержится во всякомъ мѣстѣ въ извѣстной постоянной температурѣ. Глубокомѣрныя экспедиціи послѣднихъ десятковъ лѣтъ обнаружили эти температуры. Для болѣе изслѣдованнаго Атлантическаго Океана имѣются уже удовлетворительныя карты температуръ морского дна въ родѣ напримѣръ карты въ атласѣ Гамбургской Обсерваторіи.

Физическія условія выражаются аналитически крайне просто. Функція, выражающая температуру земли должна въ области, соотвѣтствующей дну Океановъ принимать въ извѣстной поверхности, извѣстныя опредѣленныя значенія.

Что касается поверхности суши, то здѣсь встрѣчаются болѣе сложныя условія. Поверхность ея нагрѣвается лѣтомъ и днемъ, охлаждается зимою и ночью. Здѣсь идетъ обмѣнъ между отчасти ясными, отчасти темными лучами солнца и исключительно темными лучами земли. Пуассонъ[2]), разбирая условія

---

[1]) Loschmidt. Ueber den Zustand des Wärmegleichgewichtes. Sitzber. Akad. Wiss. Wien II Abth. LXXIII томъ, стр. 128, 366.

[2]) Poisson, loc. cit. Глава XI.

потери теплоты въ поверхности суши, взялъ во вниманіе прибыль теплоты отъ воздуха, солнца и звѣздъ, но выраженіе, предложенное имъ неудовлетворительно. Оно составлено въ томъ предположеніи, что токъ теплоты, выходящій изъ земли прямо пропорціоналенъ разности температуръ т. е. въ основаніе разсужденія принятъ Ньютоновъ законъ лучеиспусканія. Между тѣмъ въ выраженіе тока входитъ членъ, пропорціональный разности температуры поверхности земли и междупланетнаго пространства. Но эта послѣдняя температура неизвѣстна въ точности. Съ другой стороны она навѣрно ниже самыхъ низкихъ температуръ, наблюдаемыхъ на поверхности земли. Извѣстно-же, что въ Восточной Сибири случаются морозы, во время которыхъ термометръ падаетъ на шестьдесятъ слишкомъ градусовъ ниже нуля. Пулье и Фрэлихъ [1]) вычисляютъ для междупланетнаго пространства температуры еще далеко ниже этихъ крайне низкихъ температуръ. Первый нашелъ—143° С., второй—127° С. и—131° С. — Такимъ образомъ разность между температурой поверхности земли и междупланетнаго пространства можетъ превышать сто градусовъ С. Между тѣмъ Ньютоновъ законъ лучеиспусканія справедливъ только для очень малыхъ разностей температуръ. Опыты Делароша [2]) показали, что онъ абсолютно непримѣнимъ къ разностямъ въ 80 и больше градусовъ. Уже для разностей въ нѣсколько десятковъ градусовъ онъ даетъ невѣрные результаты.

Но точный законъ лучеиспусканія неизвѣстенъ. Поэтому мы должны иначе поставить вопросъ. Обходя законъ лучеиспусканія и вообще упрощая задачу, мы возьмемъ въ основаніе дальнѣйшихъ разсужденіе то основное положеніе теоріи теплоты, что температура тѣла, внутри котораго передача теплоты совершается по законамъ теплопроводности вполнѣ опредѣлена,

---

[1]) Fröhlich. Repert. für Meteorologie VI томъ.

[2]) Jamin et Bouty. Cours de Physique, 207 ** II томъ.

коль скоро извѣстны: распредѣленіе температуры внутри тѣла въ извѣстный моментъ и, начиная съ этого момента, температура его поверхности. Мы потомъ ближе разсмотримъ эту постановку вопроса. Теперь мы должны сдѣлать нѣкоторыя предварительныя замѣчанія.

§ 2. Вліяніе конвекціи на геотермическій градіентъ.

Передача теплоты внутри земли совершается нетолько путемъ теплопроводности, но тоже путемъ конвекціи. — Посмотримъ каково ея вліяніе. — Конвективные токи невозможны въ ядрѣ земли. Еслибъ даже, какъ полагаютъ А. Риттеръ и Г. Спенсеръ, всѣ вещества ядра земли находились въ сверхъ критическомъ состояніи [1]), то еще частицы газа, котораго плотность почти равна плотности металловъ, который находится подъ давленіемъ не то сотенъ тысячъ, а милліоновъ атмосферъ, не моглибы двигаться. — Въ ядрѣ земли передача теплоты должна совершаться по законамъ теплопроводности, хотя, конечно, коэффиціенты теплопроводности и теплоемкости тѣлъ, находящихся въ тѣхъ исключительныхъ условіяхъ, которыя тамъ господствуютъ, составляютъ нѣчто совершенно для насъ неизвѣстное. Конвекція играетъ главную роль въ земной корѣ.

Имѣются два вида конвекціи: вулканическая, и та, которая совершается посредствомъ воздушныхъ и водяныхъ теченій.

Вулканическая конвекція ограничивается нѣкоторыми областями. Она дѣйствуетъ прерывистымъ образомъ, особенно, если вулканъ не принадлежитъ къ разряду постоянно «работающихъ» какъ напримѣръ Стромболи.

---

[1]) Критической температурой называется такая, при которой, не смотря на самое сильное давленіе, тѣло обращается въ газъ. Гульдбергъ полагаетъ, что даже для платина эта температура не выше 7000°. Однако нельзя полагаться на эти результаты. Guldberg. Zeitschrift für phys. Chemie. Bd. I, стр. 231.

Сюда-же должна быть отнесена потеря теплоты, выходящей вмѣстѣ съ газами и парами въ мофеттахъ и сольфатарахъ. Теплые ключи составляютъ переходное явленіе къ водяной конвекціи.

Вулканическая конвекція вызываетъ сразу громадныя потери теплоты. Однако, благодаря своему мѣстному и прерывистому характеру она въ итогѣ производитъ меньшее вліяніе, чѣмъ явленія повсемѣстныя и постоянныя, хотя на первый видъ болѣе слабыя. Ради сравненія приведемъ слѣдующее вычисленіе. Тоже самое количество теплоты, которое, благодаря теплопроводному току, въ продолженіе одного года выходитъ наружу сквозь одинъ квадратный метръ земной поверхности, равно той работѣ, которая нужна для того, чтобы поднять на высоту ста метровъ столбъ лавы, имѣющій въ основаніи 8 квадр. метр. и 1000 метровъ высоты. Температура плавленія лавы опредѣляется никакъ не ниже 1300° С., считая отъ абсолютнаго нуля. Ея теплоемкость при столь высокой температурѣ неизвѣстна, но можно предположить, что теплоемкость единицы массы въ пять разъ меньше теплоемкости единицы массы воды [1]). Тогда съ нашимъ столбомъ лавы подымается столько единицъ теплоты, сколько, благодаря теплопроводному току уходитъ сквозь 1100 кв. метр. земной поверхности. При этомъ вычисленіи было предположено, что теплопроводный токъ уноситъ въ годъ 50 единицъ C. G. S. сквозь одинъ квад. сантиметръ земной поверхности. По Г. Г. Дарвину [2]) напряженность этого тока опредѣляется въ 45,9 единицъ C. G. S. По комитету отъ «British Association» въ 41 един. C. G. S. по Эли де-Бомону 52, по Лаппарану 51 [3]).

[1]) Everett. Physical Units and Constants. London, 1879, стр. 80, Теплоемкость стекла между 0° и 300°—0,1990. Для трапа выходитъ почти тоже самое число. См. стр. 101.

[2]) Precession of a viscous spheroid. Phil. Trans. 1879 г.

[3]) Forel. La faune profonde. Nouv. Mem. Soc. Helv. XXIX, стр. 18.

Вулканическая конвекція занимаетъ нѣкоторое мѣсто въ общемъ балансѣ расхода теплоты, но на величину геотермическаго градіента она имѣетъ вліяніе только въ вулканическихъ областяхъ.

Круговращеніе воды и воздуха повсемѣстно въ области суши. Послѣднее ограничено верхнимъ слоемъ почвы. Мы не будемъ точно разбирать условій въ этомъ слоѣ. Для насъ важенъ вопросъ, каково вліяніе конвекціи на величину геотермическаго градіента. Между тѣмъ этотъ поверхностный слой имѣетъ настолько незначительную толщину, что увеличеніе градіента или уменьшеніе, ограниченное этимъ слоемъ имѣетъ крайне малое вліяніе на общее поднятіе или пониженіе всѣхъ геоизотермовъ. Объ этомъ поверхностномъ слоѣ почвы мы скажемъ только то, что нужно для болѣе яснаго уразумѣнія условій, существующихъ въ нѣсколько болѣе глубокихъ пластахъ.

Въ этомъ поверхностномъ слоѣ въ иныхъ мѣстахъ обнаруживаются особенности, доказывающія, что конвекція играетъ въ немъ весьма важную роль.

Кривая *среднихъ* температуръ всюду постоянно повышается по мѣрѣ углубленія, начиная съ самой поверхности. Въ Сиднеѣ, Мельбурнѣ, Нукусѣ, Тифлисѣ и Гриничѣ на промежуткѣ нѣсколькихъ первыхъ метровъ она дѣлаетъ изгибъ внизъ. Это явленіе было впервые замѣчено и оговорено Академикомъ Вильдомъ [1]), потомъ Э. Лейстомъ [2]). Для примѣра я привожу данныя для Нукуса, причемъ замѣчаю, что въ точности этихъ наблюденій особенно Нукусскихъ и Тифлисскихъ не можетъ быть ни малѣйшаго сомнѣнія. Наблюденія въ Нукусѣ и Тифлисѣ дѣлались чрезвычайно тщательно, въ первой мѣстности черезъ

---

[1]) H. Wild. Ueber Bodentemp. zu St.-Petersburg und Nukuss. Repert. für Meteorologie, VI томъ.

[2]) E. Leyst. Die Bodentemperaturen in Pawtowsk. Относительно Тифлиса см. наблюденія Тифлиской Обсерваторіи 1880—1883 года.

всякіе два часа, во второй ежечасно. Данныя для прочихъ мѣстъ находятся въ работѣ Вильда, изъ которой я извлекаю слѣдующія числа (табл. XVIII).

Средняя температура въ Нукусѣ.

Въ глубинѣ	за 1875	1876	1877 годъ
10 сант.	» 13°,54	12°,93	12°,56 »
20 »	» 13°,69	13°,24	12°,98 »
40 »	» 14°,70	14°,35	14°,56 »
80 »	» 15°,21	15°,15	15°,88 »
160 »	» 15°,11	15°,22	14°,82 »
280 »	» 14°,31	14°,46	14°,69 »
400 »	» 13°,86	14°,01	14°,21 »

Дальше повышеніе температуры.

Такой изгибъ кривой среднихъ температуръ можетъ быть объясненъ только вліяніемъ конвекціи. При чисто теплопроводномъ процессѣ онъ можетъ быть объясненъ только вѣковыми колебаніями климата. Но какъ справедливо замѣчаетъ Э. Лейстъ[1]) эти послѣднія отражаются въ тѣмъ большей глубинѣ, чѣмъ ихъ періодъ длиннѣе. Между тѣмъ этотъ изгибъ кривой среднихъ температуръ замѣчается въ глубинѣ значительно меньшей, чѣмъ та, въ которой замѣтны годичныя колебанія температуры. — Лейстъ даетъ слѣдующее по моему вполнѣ раціональное объясненіе этого явленія для Нукуса[2]). «Дожди падаютъ здѣсь главнымъ образомъ въ холодное время года отъ Января до Мая. Температура дождевой воды въ среднемъ на 6° ниже средней температуры высшаго поверхностнаго слоя. Почвенная вода

---

[1]) Loc. cit., стр. 304.

[2]) Loc. cit., стр. 307.

стоитъ въ Нукусѣ на глубинѣ 4 метровъ и пополняется именно этой холодной дождевой водою, а потому температура почвы въ этой глубинѣ понижается». Вообще Лейстъ думаетъ, что въ поверхностномъ слоѣ круговращеніе воды играетъ крупную роль.

Въ этомъ поверхностномъ слоѣ перемежаются періоды высыханія и пропитанія водою. Растенія тянутъ воду вверхъ своими корнями. Несомнѣнно часто случается, во время засухи, что вода подходитъ вверхъ въ волосныхъ порахъ и скважинахъ.

Изслѣдованія Дальтона, Маріотта и Грэве показали [1]), что по всей вѣроятности, въ Европѣ только немногимъ больше одной трети атмосферной воды проникаетъ въ почву, остальное испаряется на поверхности. Изъ этой трети только небольшая часть идетъ глубже, большая совершаетъ свой круговоротъ въ поверхностныхъ слояхъ почвы. Замѣтимъ, что всѣ ключи и источники, которые сейчасъ послѣ дождей усиливаютъ свою дѣятельность, несомнѣнно питаются водою, совершающей, если можно такъ сказать, малый круговоротъ, а такихъ источниковъ очень много.

Количество атмосферной воды совершающей большой круговоротъ, конечно, не можетъ быть точно оцѣнено, но оно значительно меньше одной трети общаго количества выпадающаго на долю извѣстной области.

Отдѣлимъ мысленно поверхностный слой въ нѣсколько или въ крайнемъ случаѣ въ нѣсколько десятковъ метровъ. Ниже этого слоя нигдѣ не встрѣчаются аномаліи въ родѣ вышеуказанныхъ. Извѣстно, что артезіанская вода вообще не получается изъ кристаллическихъ породъ, развѣ только въ такомъ случаѣ [2]), когда онѣ сильно потрескапы. Такъ какъ въ осно-

---

[1]) Ср. Мушкетовъ. Физическая Геологія, стр. 167, II часть.

[2]) Ср. Мушкетовъ, loc. cit., II часть, стр. 172.

ваніи геологическихъ формацій всюду въ той или другой глубинѣ залегаютъ кристаллическія и метаморфическія породы, то, по всей вѣроятности, нижній предѣлъ круговращенія воды нигдѣ не лежитъ глубже, какъ на разстояніи нѣсколькихъ километровъ отъ поверхности. Притомъ на такихъ глубинахъ, которыя находятся ниже всѣхъ окрестныхъ овраговъ и впадинъ, вода можетъ возвращаться на поверхность только благодаря гидростатическому давленію. Это конечно не способствуетъ скорости круговращенія, ибо, благодаря гидростатическому давленію можетъ вытекать только излишекъ сверхъ того количества воды, которое нужно для совершеннаго пропитанія пластовъ водою.

Вообще для существованія восходящаго [1]) источника нужно, чтобы питающая его вода не могла какъ-нибудь уходить бокомъ.

Весьма сомнительно, существуетъ-ли круговращеніе воды въ пластахъ, залегающихъ подъ дномъ Океановъ. Подводные ключи прѣсной воды, питаемые атмосферной влагой, падающей на сосѣднюю сушу, встрѣчаются довольно часто вблизи береговъ. Но другое дѣло, можетъ-ли морская вода проникать, скажемъ въ центральныхъ областяхъ Океановъ, подъ дно а потомъ опять возвращаться. Замѣтимъ, что илы, покрывающіе столь обширныя пространства дна, крайне непроницаемы для воды. Нисходящіе источники (соленой воды разумѣется) почти невозможны вслѣдствіе недостатка болѣе рѣзкихъ скатовъ и наклонностей дна. На громадномъ пространствѣ дно бываетъ почти горизонтально. Наконецъ для восходящихъ источниковъ, какъ вообще для всѣхъ, нѣтъ, такъ сказать, двигающей причины. Дѣйствительно. Вообразимъ даже, что нѣкоторая скважина выходитъ обоими концами на поверхность дна. Нѣтъ никакой надобности, чтобы вода двигалась въ этой скважинѣ въ томъ

---

[1]) Ср. Мушкетовъ, loc. cit., II часть, стр. 170.

или другомъ направленіи, ибо давленіе всегда и всюду равномѣрно. Здѣсь, т. е. на днѣ моря, нѣтъ той измѣнчивости разныхъ факторовъ, которая даетъ толчекъ къ круговращенію воды въ пластахъ, залегающихъ въ области суши.

Нѣкоторые ученые предполагаютъ, что вода нашихъ Океановъ и атмосферная вода медленно всякаетъ въ глубину. Если даже совершается такой процессъ, то во всякомъ случаѣ нѣтъ причины думать, чтобы онъ совершался съ большей скоростью подъ дномъ Океановъ, именно вслѣдствіе крайне малой водопроницаемости пластовъ, залегающихъ на днѣ. Впрочемъ вліяніе этого явленія во всякомъ случаѣ совсѣмъ ничтожно.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что можно-бы сравнить землю съ шаромъ, внутри котораго передача теплоты совершается по законамъ теплопроводности, но въ нѣкоторой области, соотвѣтствующей нашимъ материкамъ, этотъ шаръ покрытъ тонкой въ сравненіи съ радіусомъ шара оболочкой, въ которой передача теплоты совершается не только по законамъ теплопроводности, но тоже по законамъ конвекціи. Вліяніе ея вообще увеличивается отъ основанія оболочки до поверхности. Въ самомъ поверхностномъ слоѣ оно сильно усложняется, а вмѣстѣ съ тѣмъ играетъ чуть-ли не самую важную роль.

Оставляя въ сторонѣ эти поверхностные слои, разсмотримъ вліяніе конвекціи въ болѣе глубокихъ пластахъ оболочки.

Вода проникаетъ въ глубину по трещинамъ и скважинамъ и кромѣ того повсемѣстнымъ просачиваніемъ сквозь породы, возвращается на поверхность по скважинамъ и трещинамъ. Температура воды въ жилахъ конечно не остается безъ вліянія на температуру окружающихъ водяную жилу породъ, но то-же самое количество воды производитъ тѣмъ меньшее вліяніе на сосѣднія породы, чѣмъ разрѣзъ жилы больше. Вслѣдствіе этого на градіентѣ отразится прежде всего вліяніе воды, просачивающейся сквозь породы сверху внизъ. Это вліяніе

можетъ быть оцѣнено въ качественномъ отношеніи, какъ это сейчасъ увидимъ.

Вообразимъ себѣ мысленно слой пористаго твердаго вещества. Пусть теплопроводный токъ идетъ въ вертикальномъ направленіи къ плоскостямъ напластованія, да притомъ снизу вверхъ, въ то время, какъ въ прямопротивуположномъ направленіи идетъ токъ воды, обладающей извѣстной температурой. Будемъ разсматривать безконечно тонкій призматическій или цилиндрическій элементъ объема. Его основанія параллельны къ плоскостямъ напластованія. (Мы предполагаемъ, что эти плоскости горизонтальны). Площадь этихъ основаній равна единицѣ поверхности. Проведемъ вертикальную ось координатъ, и обозначимъ ее посредствомъ z. Ея положительное направленіе считается съ низу вверхъ.

Положимъ, что въ единицу времени [1]) теплопроводный токъ вноситъ въ элементъ объема сквозь нижнее основаніе:

$$s \text{ единицъ теплоты}$$

сквозь верхнее уноситъ:

$$s + \frac{ds}{dz}dz \text{ единицъ теплоты.}$$

Въ то-же самое время вода выноситъ сквозь нижнее основаніе:

$$q \text{ единицъ теплоты}$$

а вноситъ сквозь верхнее

$$q + \frac{dq}{dz}dz \text{ единицъ теплоты.}$$

---

[1]) *Примѣчаніе.* Предполагается безконечно малая единица времени.

Тогда въ элементѣ остается:

$$-\left(\frac{ds}{dz}-\frac{dq}{dz}\right)\cdot dz \text{ единицъ теплоты.}$$

Объемъ элемента равенъ: dz, теплоемкость вещества: c,[1]) его плотность: ρ. Вслѣдствіе измѣненія количества теплоты въ элементѣ, его температура измѣняется. При томъ вообще плотность и теплоемкость могутъ измѣняться; послѣ истеченія единицы времени, плотность будетъ: $\rho+d\rho$; теплоемкость будетъ: $c+dc$. — Извѣстно, что, если измѣненіе количества теплоты въ извѣстномъ объемѣ раздѣлимъ на произведеніе объема на плотность вещества и на его теплоемкость, то получимъ измѣненіе температуры вещества.

Отсюда, такъ какъ: $\frac{dV}{dt}$ [гдѣ V обозначаетъ температуру, а t время] есть измѣненіе температуры въ единицу времени; получаемъ равенство:

$$-\left(\frac{ds}{dz}-\frac{dq}{dz}\right)=c\rho\cdot\frac{dV}{dt}\cdot \qquad \text{I}$$

Образуя это равенство, мы пренебрегли безконечно малыми величинами.

Положимъ, что ось z начинается въ той глубинѣ, гдѣ конвекція исчезаетъ, т. е. гдѣ $q=o$. Интегрируя обѣ стороны уравненія: I отъ $z=o$ до $z=z$ получимъ:

$$s-q=s_0-\int_0^z c\rho\frac{dV}{dt}dz.$$

Въ этомъ уравненіи: c и ρ величины существенно положительныя, тоже самое, согласно условіямъ задачи, справедливо относительно q и s_0. Въ поверхностномъ слоѣ s бываетъ то положительно, то отрицательно. Въ тѣхъ слояхъ, которые мы

---

[1]) *Прим.* c и ρ—теплоемкость и плотность породы, пропитанной водою

разсматриваемъ, скажемъ примѣрно ниже такъ называемой нейтральной поверхности s всегда положительно.

Опытъ показываетъ, что измѣненіе температуры внутреннихъ слоевъ земли совсѣмъ неуловимо для нашихъ инструментовъ. Вспомнимъ только термометръ Лавуазіе въ подвалахъ Парижской обсерваторіи. Поэтому можно положить, что $\frac{dV}{dt}$ почти равно нулю или другими словами, мы предполагаемъ, что эти температуры почти стаціонарны. Въ такомъ случаѣ:

$$s - q = s_0 , \qquad \text{II}$$

между тѣмъ, при отсутствіи тока воды было-бы:

$$s = s_0. \qquad \text{III}$$

Замѣтимъ, что въ случаѣ: II, s должно увеличиваться по направленію къ поверхности, ибо q уменьшается отъ поверхности до горизонта $z=o$. Въ случаѣ: II s постоянно. Геотермическій градіентъ обратно пропорціоналенъ напряженности теплопроводнаго тока, коль скоро коэффиціенты теплопроводности одинаковы. Присутствіе конвективнаго тока, направленнаго сверху внизъ увеличиваетъ s, а вслѣдствіе этого уменьшаетъ градіентъ. Замѣтимъ, что, если-бы сдѣлать предположеніе, что тѣло охлаждается, т. е. что: $\frac{dV}{dt}$ отрицательно, то градіентъ долженъ тогда еще больше уменьшиться. Изъ этого можно вывести заключеніе, что подъ поверхностью суши въ той оболочкѣ, въ которой совершаются конвективныя явленія, градіентъ вообще меньше, нежели при отсутствіи конвективнаго тока, идущаго сверху внизъ.

Не вижу фактовъ, прямо противурѣчащихъ этому заключенію. Скорѣе замѣчаю нѣкоторые пожалуй говорящіе въ его пользу. Извѣстно, что градіентъ вблизи поверхности вообще

на половину меньше, чѣмъ на большихъ глубинахъ. Вильдъ опредѣляетъ среднiй градiентъ въ поверхностныхъ слояхъ въ 15 метровъ, Лейстъ въ 12, въ то время какъ среднiй градiентъ для болѣе глубокихъ пластовъ больше 30 метровъ. Быть можетъ, что замѣчаемое въ кристаллическихъ породахъ увеличенiе градiента противъ средняго (въ гнейссахъ Минасъ Гераесъ въ Бразилiи градiентъ: 86 метровъ) происходитъ отчасти отъ отсутствiя конвективнаго тока, нетолько отъ большей теплопроводности.

На основанiи сказаннаго смѣемъ предполагать, что подъ дномъ Океановъ *«ceteris paribus»* градiентъ долженъ быть больше, чѣмъ подъ поверхностью суши.

Этимъ прекращаемъ разборъ влiянiя конвекцiи. Можно-бы многое сказать про нее, но считаемъ неумѣстнымъ начинать изслѣдованiе конвективныхъ явленiй, столь мало вообще разработанныхъ, со случая сравнительно сложнаго. Впрочемъ то, къ чему мы стремились: оцѣнка влiянiя конвекцiи на градiентъ, уже достигнуто. Повторяемъ еще разъ слова *«на градiентъ»*, отмѣчая такимъ образомъ, что мы не опредѣляемъ баланса расхода и прихода теплоты въ поверхностныхъ слояхъ суши.

Мы должны сдѣлать еще два замѣчанiя. Первое, что такъ называемая горная влажность очевидно не играетъ никакой роли въ конвективныхъ явленiяхъ. Она есть въ физическомъ смыслѣ одна изъ составныхъ частей породы. Ея влiянiе ограничивается теплоемкостью и теплопроводностью породъ.

Второе. Конвективныя явленiя отражаются и въ теплопроводныхъ, особенно въ поверхностномъ слоѣ, гдѣ рыхлая почва то пропитывается водою, то высыхаетъ. А. Литтровъ [1]) нашелъ, что влажная почва лучше проводитъ теплоту, чѣмъ сухая. Легко уразумѣть причину этого явленiя, если вспомнить, что въ су-

---

[1]) A Littrow. Ueber relative Wärmeleitungsfähigkeit. Sitzb. Akad. Wiss. Wien, LXXXI, II Abt., стр. 110.

хой почвѣ скважины и поры наполнены крайне плохо проводящимъ теплоту воздухомъ, а въ влажной лучше проводящей водою.

Можно бы подумать, что въ тѣхъ мѣстахъ, какъ напримѣръ Нукусъ, гдѣ кривая среднихъ температуръ на нѣкоторомъ промежуткѣ по направленіи къ поверхности подымается, въ общемъ итогѣ теплопроводный токъ не только не причиняетъ убытка, но скорѣе прибыль теплоты. Изъ опытовъ Литтрова слѣдуетъ, что такое заключеніе было бы нѣсколько преждевременно. Въ Нукусѣ напримѣръ почва пропитывается влагою и лучше проводитъ теплоту именно въ холодное время года (отъ Января до Мая) т. е. въ то время, когда теплопроводный токъ уноситъ теплоту наружу.

Вслѣдствіе этого легко можетъ случиться, что расходъ теплоты въ это время превышаетъ прибыль, получаемую въ сухое и жаркое время, когда почва хуже проводитъ теплоту. Впрочемъ теплота уходитъ и съ водою, возвращающейся на поверхность земли.

§ 3. Нѣкоторыя общія положенія объ охлажденіи тѣлъ.

Мы будемъ сравнивать землю съ охлаждающимся шаромъ, котораго поверхность содержится въ извѣстныхъ температурахъ. Полученный въ предъидущемъ параграфѣ результатъ, что градіентъ «ceteris paribus» долженъ быть больше подъ дномъ Океана будетъ служить основаніемъ для нѣкоторой поправки результатовъ. Мы потомъ возвратимся къ этому вопросу и посмотримъ на него съ другой стороны. Теперь мы сдѣлаемъ нѣкоторые общіе выводы, касающіеся законовъ охлажденія тѣлъ, внутри которыхъ передача теплоты совершается по законамъ теплопроводности. Эти выводы бросятъ нѣкоторый свѣтъ на споръ Фэя [1]) и Лаппарана и на работу Дрыгальскаго. Съ дру-

---

[1]) *Примѣчаніе.* Работы этихъ авторовъ, равно какъ Дрыгальскаго, были упомянуты въ началѣ 1-го параграфа.

гой стороны они ведутъ къ нѣкоторымъ не лишеннымъ интереса заключеніямъ.

Мы должны припомнить читателю, что Фэй защищалъ мнѣніе, будто земля болѣе охлаждена подъ Океанами, чѣмъ подъ поверхностью суши. Лаппаранъ отчасти оспаривалъ это мнѣніе. Дрыгальскій хотѣлъ изслѣдовать деформаціи, происходящія отъ мѣстнаго болѣе или менѣе скораго охлажденія земной коры.

Первое положеніе можетъ быть высказано слѣдующими словами: *Если два одинаковыя, однородныя тѣла A и B, поставленныя въ одинаковыя впрочемъ условія, теряютъ теплоту по законамъ теплопроводности, но поверхность тѣла A содержится въ нѣкоторой температурѣ: ζ, а тѣло B свободно испускаетъ лучи теплоты въ среду, которой температура есть тоже: ζ, то въ любое время, въ тѣхъ-же самыхъ внутреннихъ точкахъ, тѣло A будетъ имѣть всегда температуру болѣе низкую, или въ крайнемъ случаѣ равную температурѣ тѣла B.*

Это слѣдуетъ прямо изъ принциповъ аналитической теоріи теплоты. Дѣйствительно, мы предполагаемъ, что первоначальныя температуры обоихъ тѣлъ, ихъ фигура, вещество одинаковы. Единственная разница въ томъ, что поверхность тѣла A содержится въ температурѣ ζ, а поверхность втораго тѣла свободно испускаетъ лучи теплоты. Температура поверхности тѣла B никакъ не можетъ сдѣлаться[1]) ниже ζ т. е. температуры среды, она всегда больше этой температуры, хотя разность температуръ можетъ сдѣлаться крайне малой. Т. е. температура поверхности тѣла B будетъ $\zeta + \varphi$, гдѣ φ есть всегда положительная величина.

Но температура тѣла всюду и во всякое время опредѣлена, коль скоро извѣстны: 1) первоначальная температура,

---

[1]) Мы говоримъ объ охлажденіи. Eo ipso предполагается, что первоначальная температура по крайней мѣрѣ вблизи поверхности была выше ζ.

2) температура поверхности. Возьмемъ третье тѣло C абсолютно сходное во всѣхъ отношеніяхъ съ тѣлами A и B и будемъ содержать его поверхность въ перемѣнной температурѣ $\zeta+\varphi$. Тогда тѣло C всегда и всюду будетъ имѣть абсолютно тѣ-же самыя температуры, что и B. Все, что справедливо для C, справедливо для B. Но касательно условій въ поверхности теперь тѣла A и C совсѣмъ сходны, ихъ поверхности содержатся въ температурахъ, одна ζ другая $\zeta+\varphi$.

Аналитическія выраженія для температуры тѣлъ: A, B, C удовлетворяютъ тому-же самому дифференціальному уравненію:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{k}{c}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right\} \qquad \text{I}$$

здѣсь c обозначаетъ коэффиціентъ теплоемкости, отнесенной къ объему, k коэффиціентъ теплопроводности, t время, V температуру, x, y, z прямолинейныя координаты. Температура тѣла A должна удовлетворять слѣдующему условію въ поверхности:

$$V_A=\zeta \qquad \text{II}$$

температура тѣла C удовлетворяетъ условію въ поверхности:

$$V_C=\zeta+\varphi. \qquad \text{III}$$

Теорія дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ съ постоянными коэффиціентами говоритъ, что, если вторичныя условія линейны, то аналитическія рѣшенія могутъ быть раздѣлены на части. Замѣтимъ кстати, что и условіе для момента $t=o$

$$V_A=V_B=V_C=\psi(x, y, z)$$

[гдѣ ψ выражаетъ первоначальное распредѣленіе температуры] тоже линейно.

Разложимъ: V_A на части: зависимыя отъ температуры

поверхности и отъ первоначальной температуры, тоже самое сдѣлаемъ съ V_C, получимъ:

$$V_A = V_\psi + V_\zeta$$

$$V_C = V_\psi + V_\zeta + V_\varphi.$$

Причемъ для $t = o$, $V_\zeta = o$, $V_\varphi = o$, $V_\psi = \psi$.
Для поверхности тѣлъ, во всякое время:

$$V_\psi = o \quad V_\zeta = \zeta, \quad V_\varphi = \varphi.$$

Причемъ всѣ эти функціи удовлетворяютъ уравненію I.
Вычтемъ V_A изъ V_C, или, такъ какъ $V_B = V_C$, изъ V_B

$$V_C - V_A = V_B - V_A = V_\varphi$$

V_φ никогда не можетъ быть отрицательной величиной. Оно всегда или положительно, или въ крайнемъ случаѣ равно нулю. Дѣйствительно. V_φ независитъ отъ другихъ подобныхъ ему функцій. Но еслибы предположить, что $\zeta = o$, $\psi = o$ то тогда: $V_\psi = o$, $V_\zeta = o$. Пусть это будетъ абсолютный нуль шкалы температуръ, тогда, допуская, что V_φ можетъ сдѣлаться отрицательнымъ мы бы допустили возможность нелѣпости, отрицательной температуры.

И такъ $V_\varphi > o$, и будучи независимымъ отъ прочихъ температуръ, оно всегда останется положительнымъ.

Такимъ образомъ наше замѣчаніе доказано. Оно можетъ быть распространено на тѣла, состоящія изъ частей, разнаго, но порознь однороднаго вещества. Дѣйствительно. Въ отдѣляющихъ поверхностяхъ имѣются тогда условія

$$V_{\rm I} = V_{\rm II}$$

$$k_{\rm I} \frac{dV_{\rm I}}{dn} = k_{\rm II} \frac{dV_{\rm II}}{dn}$$

Здѣсь $V_{\rm I}$ и $V_{\rm II}$ обозначаютъ температуры сосѣднихъ частей, n есть нормаль къ отдѣляющей поверхности. Эти условныя уравненія тоже *линейны*. Первое выражаетъ тотъ фактъ, что въ отдѣляющей поверхности температуры обоихъ веществъ равны. Второе выражаетъ то условіе, что то количество теплоты, которое выходитъ изъ одного вещества, входитъ въ другое.

Впрочемъ, наше замѣчаніе, очевидно, имѣетъ общее значеніе. *Когда передача теплоты внутри тѣла совершается по законамъ теплопроводности, то «ceteris paribus» тѣло, котораго поверхность содержится въ температурѣ:* ζ *въ любое время въ томъ-же самомъ мѣстѣ имѣетъ болѣе низкую температуру, чѣмъ тѣло, свободно лучеиспускающее въ среду, которой температура есть* ζ *какой ни есть законъ лучеиспусканія.*

Во вторыхъ можно убѣдиться, *что разность* V_φ *между температурой свободно лучеиспускающаго и искусственно охлаждаемаго тѣла «ceteris paribus» тѣмъ меньше, чѣмъ размѣры тѣлъ больше.*

Температура поверхности охлаждающагося тѣла должна находиться въ зависимости отъ отношенія его объема къ поверхности. Другими словами она есть функція отъ его измѣреній въ пространствѣ. Положимъ, что у насъ есть нѣкоторый линейный параметръ, увеличивающійся съ увеличеніемъ размѣровъ тѣла, уменьшающійся съ уменьшеніемъ его. Согласно сказанному, V и V_φ суть функціи отъ этого параметра. Обозначимъ его посредствомъ α

$$V_\varphi = f(\alpha \ldots .) \quad V = f(\alpha \ldots .).$$

Когда тѣла A и B дѣлаются безконечно большими, внѣшняя поверхность удаляется на безконечное разстояніе, а потому условія, господствующія въ ней не имѣютъ никакого вліянія на термическіе процессы, происходящіе внутри тѣлъ во всѣхъ

точкахъ, находящихся на конечныхъ разстояніяхъ. А потому не можетъ быть разницы между температурами обоихъ тѣлъ. Слѣдовательно функція V_φ есть такая, что для $\alpha = \infty$ она равна нулю. Изъ этого слѣдуетъ, что она должна уменьшаться по мѣрѣ увеличенія параметра α. Дальше, совсѣмъ очевидно, что она должна быть непрерывной функціей этого параметра, да притомъ должна измѣняться въ одномъ направленіи. Предположеніе, что увеличеніе параметра α положимъ отъ α_1 до α_2 сопровождается уменьшеніемъ функціи V_φ, а увеличеніе отъ α_2 до α_3 сопровождается увеличеніемъ, какъ это видно изъ физическаго значенія функціи, совсѣмъ нелѣпо. По этому можно сказать, что «*при равенствѣ прочихъ условій разности температуръ внутри тѣлъ тѣмъ меньше, чѣмъ размѣры ихъ больше*». Замѣтимъ мимоходомъ, что температура есть чистое число. Между тѣмъ параметръ α имѣетъ измѣренія $[L]$ т. е. это есть нѣкоторая длина. По этому должно быть

$$V = f(\alpha\beta \dots)$$

гдѣ β есть параметръ, имѣющій измѣренія: (L^{-1}). Этотъ параметръ будетъ функціей отъ поверхностныхъ условій. Когда законъ лучеиспусканія есть законъ Ньютона, то β есть отношеніе коэффиціента лучеиспусканія къ коэффиціенту теплопроводности. Въ этомъ случаѣ наши замѣчанія могутъ быть провѣрены помощью извѣстныхъ рѣшеній Фурье. Наши параметры обнаруживаются въ трансцендентныхъ уравненіяхъ, встрѣчаемыхъ въ задачахъ Фурье.

Напримѣръ у Фурье температура шара, теряющаго теплоту, выражается рядомъ [1]):

$$\Sigma A_n e^{-a^2 p_n^2 t}.$$

---

[1]) Fourrier Analyt. Wärmeth. Uebers. von Weinstein. Глава V.

На основаніи этого рѣшенія Э. Дрыгальскій въ упомянутой выше работѣ дѣлаетъ нѣкоторыя заключенія относительно вліянія поверхностныхъ условій на скорость охлажденія земли.

Когда первоначальное распредѣленіе температуры въ шарѣ есть функція лишь отъ радіуса, а поверхность шара содержится въ температурѣ нуль градусовъ то коэффиціенты p имѣютъ численныя значенія:

$$\frac{\pi}{R}, \quad \frac{2\pi}{R} \cdots \frac{n\pi}{R}.$$

Когда первоначальное распредѣленіе температуры есть функція лишь отъ радіуса, но поверхность испускаетъ лучи теплоты въ среду, которой температура равна нулю градусовъ, то коэффиціенты p опредѣляются изъ трансцендентнаго уравненія:

$$\frac{pR}{hR-1} + tang pR = o$$

R обозначаетъ радіусъ земли — h есть отношеніе между коэффиціентами лучеиспусканія и теплопроводности. Фурье[1]) находитъ, что h близко къ единицѣ, если единицей длины взять метръ. Но радіусъ земли равенъ 6370000 метрамъ. А потому величина hR настолько велика, что корни вышеупомянутаго трансцендентнаго уравненія почти равны

$$\frac{\pi}{R}, \quad \frac{2\pi}{R} \cdots \frac{n\pi}{R}.$$

Вслѣдствіе этого, если остальныя условія одинаковы, температуры обоихъ шаровъ почти одинаковы. Онѣ нѣсколько выше у свободно лучеиспускающаго шара.

---

¹) Annales de Chimie et de Physique, 13 томъ, 1820 года, стр. 421.

Мы разсматривали доселѣ отдѣльныя тѣла. Но наши разсужденія могутъ быть распространены на такое тѣло, котораго поверхность отчасти содержится въ температурѣ ζ, отчасти свободно испускаетъ лучи въ среду, которой температура тоже равна ζ градусамъ. *Подъ лучеиспускающей поверхностью температура выше, чѣмъ была бы тогда, когда таже часть поверхности содержалась-бы въ температурѣ ζ градусовъ.* Желая подробнѣе разсмотрѣть изотермическія поверхности, нужно изслѣдовать отношеніе распредѣленія поверхностныхъ условій къ фигурѣ тѣла во всякомъ отдѣльномъ случаѣ. Относительно шара можно вообще сказать, что «*при равныхъ прочихъ условіяхъ температура выше подъ лучеиспускающей, какъ подъ содержимою въ извѣстной температурѣ поверхностью.* Съ другой стороны *чѣмъ шаръ больше, тѣмъ разности температуръ въ глубинѣ сравнительно меньше.*»

Таковы были причины побудившія меня вести въ «Petermann's Mittheilungen» въ 1 и 4 номерѣ за 1891 годъ полемику съ Э. Дрыгальскимъ, сдѣлавшимъ въ своей работѣ на основаніи ложнаго толкованія приведеннаго здѣсь трансцендентнаго уравненія нѣсколько иные выводы.

Изъ сказаннаго выше можно вывести слѣдующее довольно интересное слѣдствіе. Наша земля есть очень большое тѣло, поэтому разности въ поверхностныхъ условіяхъ вызываютъ незначительныя разности въ температурахъ ядра. Разности въ температурахъ сопряжены съ разностями въ измѣненіи объема. Если объемъ тѣла сокращается неравномѣрно, то внутри тѣла возникаютъ разности натяженія. У земли эти разности будутъ небольшія, благодаря тому, что разности температуръ незначительны въ сравненіи съ ея размѣрами. Слѣдовательно можно сказать, что при существующихъ условіяхъ большіе размѣры земли, не допуская значительныхъ разностей во внутреннихъ температурахъ, дѣлаютъ невозможными большія разности вну-

треннихъ натяженій. Общее равномѣрное сокращеніе объема земли не угрожаетъ ея существованію. Только разности натяженія могли-бы вызвать катастрофу т. е. растресканіе въ куски.

На этотъ разъ мы говорили преимущественно о ядрѣ земли. Дислокаціи въ земной корѣ являются слѣдствіемъ того, что оболочка слѣдуетъ за сокращающимся ядромъ земли. Мы разсматривали землю, какъ твердое тѣло. Со времени изслѣдованій В. Томсона и Г. Г. Дарвина надъ приливами и отливами оказалось, что земля обнаруживаетъ механическія свойства твердаго тѣла [1]).

Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что мнѣніе Фэя, состоящее въ томъ, что земля болѣе охлаждена подъ Океанами, чѣмъ подъ поверхностью суши покоится на нѣкоторыхъ теоретическихъ основаніяхъ. Однако можно противъ него сдѣлать слѣдующее возраженіе. Поверхность суши испускаетъ лучи теплоты въ междупланетное пространство, котораго температура многими градусами ниже той температуры, въ которой содержится дно Океановъ. Поэтому мы не будемъ дальше обсуждать этого вопроса. Возвратимся къ нему только въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 4. Охлажденіе шара.

Показавъ въ прежнемъ § значеніе условій въ поверхности, разсмотримъ нѣкоторую математическую задачу. Постараемся найти выраженіе температуры однороднаго шара, котораго пер-

---

[1]) Cp. Thomson et Tait. Treat. on Nat. Phil. § 847, § 848.

воначальная температура извѣстна, а температура поверхности постоянна по отношенію къ времени, перемѣнна по отношенію къ широтѣ и долготѣ. Постановка задачи очевидно чрезвычайно проста. Но, благодаря этой простотѣ, мы будемъ въ состояніи выбраться за предѣлы символическихъ рѣшеній, избѣжать гипотетическихъ предположеній о термическихъ свойствахъ веществъ, составляющихъ ядро земли. Между тѣмъ мы будемъ въ состояніи достигнуть нѣкоторыхъ результатовъ, интересныхъ для теоріи охлажденія земли.

Извѣстно, что температура тѣла вполнѣ опредѣлена, коль скоро извѣстна первоначальная температура во всякой его точкѣ и температура поверхности во всякое время. Изъ этого слѣдуетъ, что можно сравнить землю съ шаромъ, у котораго температура поверхности именно такова, какъ температура поверхности земли. Распредѣленіе температуры внутри этого шара будетъ представлять такія сходства съ распредѣленіемъ температуры внутри земли, что многія заключенія, справедливыя для нашего шара, будутъ справедливы для земли. Впрочемъ въ послѣдствіи читатель самъ увидитъ, какъ будутъ поставлены вопросы и какія слѣдствія можно изъ нихъ извлечь.

Мы предполагаемъ, что температура поверхности нашего шара постоянна по отношенію къ времени. Мы въ правѣ сдѣлать такое предположеніе по нѣсколькимъ причинамъ.

Во-первыхъ, мы вовсе не намѣрены вычислять дѣйствительныя температуры ядра земли. Для этого намъ пришлось-бы сдѣлать цѣлый рядъ совсѣмъ произвольныхъ предположеній. Мы будемъ только доискиваться значенія климатическихъ причинъ для температуръ ядра земли.

Подъ климатомъ я здѣсь понимаю всю совокупность вліяній, которыя опредѣляютъ температуру поверхности.

Во-вторыхъ, распредѣленіе поверхностныхъ температуръ остается во время многихъ вѣковъ почти постояннымъ. Можно

всегда разсматривать термическое состояніе земли, относя начало процесса охлажденія къ тому моменту, когда извѣстное распредѣленіе температуръ поверхности было уже сходно съ современнымъ.

Въ-третьихъ, температуры поверхности дѣйствительно заключены въ тѣсные предѣлы, по крайней мѣрѣ, съ того момента, какъ органическая жизнь появилась на землѣ.

Существованіе морской фавны въ Кэмбрійскій періодъ доказываетъ, что уже въ это столь ветхое время температура водъ была или приблизительно такая, какъ въ наше время, или, въ крайнемъ случаѣ, только на нѣсколько десятковъ градусовъ выше современной. Въ такомъ случаѣ и температура дна была только немногимъ выше современной или такая-же какъ теперь. Уже въ Силурійскихъ отложеніяхъ находимъ слѣды наземныхъ растеній. Правда, что «Ольдгаміи» [1]) были отнесены болѣе строго критически относящимися къ вопросу авторами къ неорганическимъ дендритамъ, но есть и несомнѣнныя растенія въ родѣ «Psilophyton princeps» [2]). Слѣды растеній—признакъ важный. Нельзя предполагать, что онѣ произрастали въ почвѣ, которой температура была постоянно выше 50^0 С.

Возьмемся теперь за нашу математическую задачу:

Обозначимъ температуру посредствомъ V

» время » .... t

» разстояніе отъ центра посредствомъ.... r

Долготу, считаемую отъ 0 до 360^0 » .... ψ

Уголъ между полярной осью и радіусомъ, идущимъ къ данному мѣсту посредствомъ .... θ

(θ считается отъ 0 до 180^0).

---

[1]) Schenk. Handbuch der Botanik, стр. 17.

[2]) Solms Laubach. Einleitung in die Paläophytologie, стр. 175.

Дальше обозначимъ коэфф. теплопроводности посредствомъ . . . . k

Коэффиціентъ теплоемкости, отнесенной къ объему посредствомъ c

Ради краткости сдѣлаемъ: $\frac{k}{c} = a^2$.

Обозначимъ радіусъ поверхности шара посредствомъ R

Предполагаемъ, что передача теплоты внутри шара совершается по законамъ теплопроводности. Аналитически это условіе выражается слѣдующимъ дифф. уравн.:

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \left[\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta} \cdot \frac{d^2V}{d\psi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\theta^2} + \frac{cotg\theta}{r^2} \cdot \frac{dV}{d\theta} \right] \quad (I)$$

Кромѣ того имѣются слѣдующія условія. Въ началѣ процесса, т. е. въ моментъ: $t = o$ температура внутри шара дана въ видѣ нѣкоторой функціи отъ радіуса, отъ широты и долготы:

$$V = \Pi(r,\theta,\psi) \quad \text{когда } t = o. \qquad II$$

Во-вторыхъ, въ поверхности шара температура равна нѣкоторой данной температурѣ, перемѣнной относительно мѣста, постоянной относительно времени.

$$V = f(\theta,\psi) \quad \text{когда } r = R. \qquad III$$

Пусть будетъ:

$$V = V_1 + V_2.$$

Функціи V_1 и V_2 будутъ удовлетворять дифф. уравн. I. Кромѣ того:

Для $r=R$ $V_1=f(\theta,\psi)$ $V_2=o$

Для $t=o$ $V_1=o$ $V_2=\Pi(r,\theta,\psi)$

Для $t=\infty$ $V_1=o$, но V_2 доходитъ до максимума.

Это показываетъ, что вліяніе первоначальнаго распредѣленія температуры послѣ безконечно продолжительнаго времени совсѣмъ исчезаетъ, но вліяніе поверхностныхъ условій можетъ дойти до крайняго предѣла только послѣ безконечно продолжительнаго времени.

Я долженъ здѣсь замѣтить, что у Пуассона[1]) и Жордана[2]) находится сходная задача. Эти геометры разсматриваютъ шаръ, теряющій теплоту вслѣдствіе лучеиспусканія въ среду постоянной температуры, но первоначальная температура предполагается тоже зависимой отъ всѣхъ трехъ координатъ.

Поэтому я позволяю себѣ сократить аналитическій выводъ, ибо читатель, сравнивая это рѣшеніе съ рѣшеніемъ, находящимся у вышеуказанныхъ авторовъ, легко можетъ убѣдиться въ правильности рѣшенія, а вмѣстѣ съ тѣмъ прослѣдить тѣ измѣненія, которыя мы должны были сдѣлать сообразно нѣсколько инымъ условіямъ задачи. Я обращаю вниманіе на то, что я болѣе придерживался Жордана, такъ какъ у него рѣшеніе болѣе изящно и полно.

И такъ имѣемъ:

$$V = V_1 + V_2,$$

---

[1]) Poisson. Theorie mathem. de la chaleur, § 166 и слѣд.

[2]) Jordan. Cours d'analyse, III томъ, § 334 и слѣд., § 316 и слѣд.

причемъ:

$$V_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^n - \sum_{i=1}^{i=\infty} A_{n,i}\, F_n(p_i r)\, e^{-a^2 p_{n,i}^2 t} \right\} \qquad 1.,$$

$$V_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=\infty} Y_n B_{n,i} F_n(p_i r)\, e^{-a^2 p_{n,i}^2 t} \qquad 2., \qquad \text{IV}$$

V_2 тождественно съ рѣшеніемъ Жордана. Разница состоитъ только въ томъ, что у насъ для $r = R$

$$F_n = o.$$

А у Жордана для $r = R$ вводится другое условіе, именно:

$$\frac{dF_n}{dr} + HF_n = o\ ^1).$$

Вслѣдствіе этого въ коэффиціентахъ $B_{n,i}$ а точно также въ $A_{n,i}$ произойдутъ нѣкоторыя очевидныя перемѣны. У Жордана въ этихъ коэффиціентахъ появляется нѣкоторая величина, которую онъ обозначаетъ посредствомъ [2]) Kpp. У насъ въ выраженіи для этой величины слѣдуетъ положить: $F_n(pR) = o$.

Объяснимъ еще значеніе символовъ:

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \psi')\, P_n \sin\theta' d\theta' d\psi'. \qquad (\text{V})$$

P_n есть Лапласовъ коэффиціентъ:

$$P_n = P_n(\mu) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n (\mu^2 - 1)}{d\mu^n},$$

---

[1]) Loc. cit., стр. 441.

[2]) Loc. cit., стр. 446.

причемъ: $\mu = cos\theta . cos\theta' + sin\theta . sin\theta' cos(\psi - \psi')$

$$F_n(pr) = (pr)^{-1/2} J_{n+1/2} \quad n=0, 1, 2, 3 \ldots .$$

Здѣсь $J_{n+1/2}$ обозначаетъ функцію Бесселя. Такимъ образомъ:

$$F_n(pr) = (pr)^n \varphi_n(pr), \text{ гдѣ } \varphi_n(pr) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{pr}{2}\right)^{2i}}{\Gamma_{(i+1)} . \Gamma_{(n+i+3/2)}} . \quad (VI)$$

Наконецъ:

$$A_{n,i} = \frac{2 . \int_0^R \left(\frac{r}{R}\right)^n r^2 F_n(p_i r)\, dr}{R \left[\frac{d}{dp_i}\left[F_n(p_i R)\right]\right]^2} .$$

Все это въ сущности выраженія, взятыя изъ Жордана, съ соотвѣтственными измѣненіями. Теперь мы подвинемся нѣсколько дальше. Начнемъ съ разсмотрѣнія выраженія V_1.

Во-первыхъ, замѣтимъ, что въ данномъ случаѣ коэффиціенты $A_{n,i}$ выражаются весьма просто [1]):

$$A_{n,i} = - \frac{2}{p_i \frac{dF(p_i R)}{dp_i}} . \qquad (VII)$$

Знаменатель этого выраженія всегда для $i=1$ отрицательный, для $i=2$ положительный и т. д. Слѣдовательно величины $A_{n,i}$ попеременно положительны и отрицательны.

На основаніи уравненій VII и VI можно V_1 написать подъ видомъ:

$$V_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \left\{ 1 - \sum_{i=1}^{i=\infty} a_{n,i}\, \varphi_n(p_i r)\, e^{-a^2 p_i^2 t} \right\} \quad IV(1) \text{ bis}$$

---

[1]) Доказательство см. Приложеніе I.

гдѣ [1]):

$$a_{n,i} = -\frac{2}{p_i \frac{d\varphi_n(p_i r)}{dp_i}}.$$

Коэффиціенты p_i даются трансцендентными уравненіями вида:

$$F_n(p_i R) = o \text{ или, что все равно, } \varphi_n(p_i R) = o.$$

Вслѣдствіе этого для $r = R$

$$V_2 = o$$

$$V = V_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n.$$

ΣY_n есть рядъ Лапласовыхъ коэффиціентовъ [2]). Согласно свойствамъ этихъ функцій и на основаніи уравненія V этотъ рядъ всюду въ поверхности шара равенъ произвольной функціи: $f(\theta, \psi)$, т. е. выражаетъ температуру поверхности.

Мы сказали выше, что для $t = o$, должно быть $V_1 = o$. Въ этомъ не трудно убѣдиться [3]), ибо:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_{n,i}\, \varphi_n(p_i r) = 1.$$

Мы должны замѣтить что выраженія вида IV (1) bis могутъ быть вычислены, такъ какъ ряды обладаютъ значительной сходимостью. Функціи F_n выражаются тригонометрическими функціями и полиномами, какъ это можно видѣть въ математическомъ приложеніи или въ любомъ учебникѣ Бесселовыхъ функцій. Коэффиціенты Лапласа есть тоже доступныя вычис-

---

[1]) См. Приложеніе I.

[2]) Сравн. напр. Heine. Handbuch der Kugelfunctionen.

[3]) Доказательство см. Приложеніе II.

ленію функціи. Единственное затрудненіе состоитъ въ опредѣленіи коэффиціентовъ: p. Это затрудненіе можетъ быть устранено помощью нѣкоторой теоремы о положеніи корней трансцендентныхъ уравненій вида:

$$F_n(x)=o,$$

которая состоитъ въ слѣдующемъ[1]:

Положительные и не нулевые корни трансцендентнаго уравненія

$$F_n(x)=o$$

находятся по одиночкѣ въ квадрантахъ: $(n+2)$*омъ*, $(n+4)$*омъ, вообще въ* $(n+2i)$*омъ, гдѣ* $i=1, 2, 3, \ldots$ *При этомъ корни уравненія:*

$$F_0(x)=o$$

равны: $\pi, 2\pi, \ldots . n\pi \ldots \ldots$

Это значитъ, что первый корень уравненія: $F_n(x)=o$ меньше $(n+2)\dfrac{\pi}{2}$, но больше $(n+1)\dfrac{\pi}{2}$ и т. д. — Помощью построенія или метода «Falsi» нетрудно найти величину корня съ желаемой точностью. Для очень большихъ корней можно пользоваться замѣчаніемъ Пуассона, что очень большіе корни сказанныхъ уравненій почти совпадаютъ съ корнями уравненій:

$$\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}-x\right]=o.$$

Чтобы изъ этихъ корней вычислить коэффиціенты p, достаточно раздѣлить ихъ на длину радіуса внѣшней поверхности шара.

---

[1]) Док. см. Приложеніе III.

Сейчасъ увидимъ, что слѣдуетъ изъ этой теоремы. Съ этой цѣлью положимъ, что температура поверхности выражается лишь одной Лапласовой функціей порядка n, т. е. $f(\theta, \psi)$ есть цѣлая раціональная функція n-таго порядка отъ $cos\theta$, $sin\theta cos\psi$, $sin\theta sin\psi$, удовлетворяющая дифференціальному уравненію:

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{du_n}{d\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2 n_n}{d\psi^2} + n(n+1)u_n = o\,,$$

гдѣ $\mu = cos\theta$, а притомъ такая, что u_n и $\frac{du_n}{d\psi}$ для $\psi = o$ и $\psi = 2\pi$ принимаютъ тѣ-же самыя значенія [1]).

Подставимъ теперь въ формулѣ V вмѣсто $f(\theta', \psi')$ функцію вида u_n. На основаніи извѣстныхъ [2]) формулъ:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} u_n P_m \sin\theta' d\theta' d\psi' = o \text{ когда } n \gtrless m$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} \cdot u_n \text{ когда } n = m.$$

найдемъ:

$$V_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^n u_n \left[1 - \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i F_n(p_i r) e^{-a^2 p_i^2 t}\right].$$

Чѣмъ n больше, т. е. чѣмъ выше порядокъ функціи u_n, тѣмъ коэффиціенты: p, начиная съ перваго больше, тѣмъ скорѣе погасаетъ функція:

$$\sum a_i F_{n,i} e^{-a^2 p_i^2 t}$$

---

[1]) Сравн. Todhunter. An Elementary treatise on Lamé. Laplace and Bessel's Functions. стр. 153.

[2]) Todhunter, loc. cit., стр. 158.

Замѣтимъ, что въ поверхности шара имѣемъ всегда

$$V = u_n,$$

а внутри его во время $t = \infty$

$$V = u_n \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

И такъ, *чѣмъ выше порядокъ гармоническаго неравенства поверхностной температуры, тѣмъ скорѣе оно стремится къ своему предѣльному вліянію внутри шара, но это предѣльное вліяніе тѣмъ сильнѣе уменьшается по мѣрѣ углубленія* [1]).

Каково физическое значеніе этой теоремы? Чѣмъ выше порядокъ Лапласовой функціи, тѣмъ быстрѣе и чаще она измѣняетъ свое значеніе въ поверхности шара. Изъ этого выводимъ заключеніе, *что вообще неравенство температуры поверхности тѣмъ скорѣе стремится къ своему предѣльному вліянію, но это вліяніе тѣмъ сильнѣе слабѣетъ съ глубиною, чѣмъ эта поверхностная температура чаще измѣняется въ поверхности шара.*

Такое заключеніе можно-бы вывести изъ общихъ началъ философіи природы. Интересно видѣть, какъ аналитическій результатъ прекрасно съ ними согласуется.

§ 5. Примѣненія.

Займемся сначала мнѣніемъ Фэя. Въ настоящее время и за многія столѣтія до него можно предполагать слѣдующее. Благодаря дѣятельности солнца, поверхность материковъ содержится въ извѣстныхъ среднихъ температурахъ, которыя вообще

[1]) Вторая часть этой теоремы слѣдуетъ изъ извѣстныхъ свойствъ гармоническихъ функцій, первая изъ найденной здѣсь теоремы о корняхъ трансцендентныхъ уравненій $F_n(x) = o$.

понижаются отъ экватора къ полюсамъ. Температуры дна Океановъ низки, но выше, чѣмъ среднія температуры поверхности суши въ полярныхъ областяхъ.

Уже изъ основнаго положенія, что температура тѣла вполнѣ опредѣляется его первоначальной температурой и температурой поверхности, если послѣдняя извѣстна во всякое время, слѣдуетъ, что подъ дномъ Океановъ, котораго температуры вообще ниже температуръ поверхности суши въ глубинѣ температуры должны быть вообще ниже. Разсужденія, заключенныя въ § 2, показали, что поверхностныя условія не вліяютъ на сущность передачи теплоты внутри тѣла.—Если въ поверхности температура выше, то при равныхъ прочихъ условіяхъ и въ глубинѣ температура выше.

Разумѣется, въ случаѣ земли вліяніе прежнихъ условій, различія въ теплопроводности и теплоемкости породъ могутъ вызвать второстепенныя отступленія отъ общаго правила.

Съ другой стороны въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ температура поверхности суши ниже температуры дна при прочихъ равныхъ условіяхъ и въ глубинѣ температуры должны быть ниже,— насколько этому не противодѣйствуетъ сокращеніе градіента подъ поверхностью суши, на которое было указано въ § 1.

Слѣдовало-бы взять во вниманіе то обстоятельство, что поверхность суши находится нѣсколько дальше отъ центра земли, какъ дно Океановъ. Но неровности рельефа земли столь незначительны въ сравненіи съ длиною радіуса, что можно ее разсматривать какъ правильный шаръ.

Замѣтимъ еще, что тотъ слой, который находится въ непосредственныхъ отношеніяхъ со средою, вѣроятно, на днѣ моря обладаетъ большей теплопроводностью. Илы, залегающіе на днѣ, благодаря сильному давленію плотнѣе, чѣмъ рыхлая почва поверхности суши. Извѣстно, что плотныя породы лучше проводятъ теплоту.—Илы на днѣ пропитаны водою, лучше прово-

дящей теплоту, чѣмъ воздухъ, отчасти заполняющій поры въ почвѣ [1]).

Въ настоящее время дно Океановъ содержится по большей части въ температурахъ 0°—2° С. Съ какого времени установились эти температуры — неизвѣстно. Если въ какой-либо періодъ въ исторіи земли полярнымъ водамъ былъ прегражденъ доступъ въ Океаны, то вмѣстѣ съ тѣмъ температуры дна должны были быть выше. Въ Атлантическомъ Океанѣ вдоль береговъ [2]) Европы и Африки температуры дна выше 2° С. Самыя высокія температуры въ открытомъ океанѣ встрѣчаются у Тихаго вдоль береговъ Центральной Америки, Экуадара и Перу. Онѣ здѣсь доходятъ до 9° С.

Извѣстно, что средняя температура поверхности суши близка къ средней воздуха. За недостаткомъ повсемѣстныхъ наблюденій надъ первой, можно себѣ составить о ней нѣкоторое понятіе по второй. Чаще всего температура почвы нѣсколько выше, иногда нѣсколько ниже. Положительная разность иногда какъ напр., въ Нукусѣ превышаетъ 4° С., но въ виду сухого и жаркаго климата этой станціи, можно предполагать, что максимальная средняя разность немногимъ превышаетъ вышеупомянутое число. Въ Сахарѣ, въ Сѣверномъ Суданѣ средняя температура поверхности навѣрно не меньше 30° С., за то въ Якутскѣ еще въ глубинѣ двухъ метровъ имѣется —11°1 С. Судя по температурѣ воздуха, въ Сѣверо-Восточной Сибири средняя температура почвы въ иныхъ мѣстахъ пожалуй не выше —15° С. [1]).

---

[1]) Ср. Опыты Литрова. § 1.

[2]) Ср. Berghaus's Phys. Atlas. Карты изотермовъ. Handbuch der Ozeanographie Boguslawski u. Krümmel. Atlas des Observatoriums zu Hamburg.

[1]) Здѣсь приведены температуры воздуха. Сравн. Карты Хана въ Berghaus's Atlas и Spitaler'a работу въ Denkschr. Akad. Wiss. Wien за 1886 годъ.

Неизвѣстно, каковы температуры поверхности земли вблизи полюсовъ. Замѣтимъ только, что онѣ не могутъ быть особенно низки подъ Гренландскими и другими полярными ледяными полями. Въ этихъ пластахъ льда есть тоже несомнѣнно термическій градіентъ. Вслѣдствіе этого у основанія ледника температура во всякомъ случаѣ выше, чѣмъ въ его верхней поверхности. Бишофъ дѣлалъ наблюденія надъ температурой почвы подъ Альпійскими ледниками, но эти наблюденія дѣлались у края ледниковъ [1]), а потому остаются безъ значенія для занимающаго насъ вопроса. Онѣ впрочемъ всюду показали температуры нѣсколько выше 0° С. [2]). Такъ какъ Арктическіе и Антарктическіе ледники обладаютъ большой толщиной, а градіентъ во льдѣ меньше, чѣмъ въ породахъ почвы, то вѣроятно на днѣ ледниковъ температуры въ нѣсколько градусовъ выше, чѣмъ среднія температуры въ ихъ поверхности.

По всей вѣроятности 50° С., максимумъ 60° С. вотъ крайній предѣлъ, котораго достигаетъ разность между средними температурами разныхъ мѣстъ поверхности земли.

Температура поверхности земли можетъ быть выражена рядомъ, состоящимъ изъ Лапласовыхъ функцій. Тодгунтеръ [2]) предлагаетъ нѣкоторый способъ, помощью котораго можно изъ данныхъ для достаточно большого числа станцій прямо найти формулу. Этой формулы выводить не станемъ. Разсмотримъ нѣкоторыя неравенства температуры, отдѣльно одно отъ другого.

Возьмемъ любое гармоническое неравенство и положимъ, что поверхность шара содержится въ температурѣ:

$$A + u_n,$$

u_n выражаетъ гармоническое неравенство n-таго порядка

---

[2]) Bischof. Die Wärmelehre des Inneren unseres Planeten. Глава IX.

[2]) Todhunter. Loc. cit. стр. 200.

т. е. Лапласову функцію n-таго порядка. A есть положительная постоянная величина. Мы прибавляемъ постоянную потому, что функція u_n можетъ быть въ иныхъ мѣстахъ отрицательная. Между тѣмъ отрицательная температура есть вещь невозможная. Положимъ, что съ начала процесса охлажденія прошло уже безконечно долгое время. Тогда согласно сказанному въ § 3 вліяніе первоначальнаго распредѣленія температуры уже совсѣмъ исчезло, поверхностная температура дошла до своего предѣльнаго вліянія. Другими словами, мы мысленно переходимъ къ тому безконечно далекому будущему, когда земля утеряетъ весь запасъ собственной теплоты и ея температуры будутъ исключительно зависѣть отъ климатическихъ причинъ. Разумѣется, здѣсь дѣлается предположеніе, что климатическія условія остаются постоянными. Конечно, такой случай есть чисто идеальный, но посмотримъ, что выйдетъ изъ этого предположенія.

Согласно тому, что было сказано въ § 3, внутри шара имѣется теперь температура:

$$V = \left(\frac{r}{R}\right)^n u_n + A.$$

Возьмемъ двѣ точки въ поверхности шара, проведемъ къ этимъ точкамъ радіусы изъ центра. Если разность между температурами въ обѣихъ точкахъ поверхности шара равна x градусамъ, то въ концентрической шаровой поверхности радіуса: $r\,[r < R]$, въ тѣхъ точкахъ, гдѣ проведенные нами радіусы пересѣкаютъ эту поверхность разность температуръ будетъ:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^n x.$$

Вслѣдствіе неравномѣрнаго нагрѣтія наше тѣло не можетъ имѣть правильнаго сферическаго вида. Объемъ измѣняется съ

температурой, а потому нашъ шаръ долженъ испытать деформацію. Сначала оцѣнимъ эту деформацію менѣе строгимъ методомъ.—Положимъ, что шаръ раздѣленъ плоскостями большихъ круговъ и конусами, имѣющими вершину въ центрѣ на элементарныя пирамиды, имѣющія основанія въ поверхности шара, вершины въ его центрѣ. Положимъ, что всякая пирамида расширяется такъ, какъ будто ея боковыя стѣнки абсолютно неподвижны. Тогда пирамида на оси которой температура имѣетъ численное значеніе:

$$A + \left(\frac{r}{R}\right)^n u_n$$

расширяется такъ, какъ будто, она принадлежала-бы къ шару, расширяющемуся вслѣдствіе измѣненія температуры: A въ температуру $A + \left(\frac{r}{R}\right)^n u_n$. Изъ этого сейчасъ находимъ, что объемъ послѣ расширенія, такъ относится къ объему передъ расширеніемъ какъ:

$$1 + \frac{3k\,3u_n}{n+3} : 1.$$

k есть коэффиціентъ линейнаго расширенія. Изъ этого слѣдуетъ, что разстояніе основанія пирамиды отъ центра увеличилось въ отношеніи:

$$\sqrt[3]{1 + \frac{9k\,u_n}{n+3}} : 1.$$

Такъ какъ k есть малая величина, то можно вмѣсто точнаго корня взять:

$$1 + \frac{3k\,u_n}{n+3}. \qquad \text{(II)}$$

Мы предположили, что коэффиціентъ расширенія посто-

янный. Возьмемъ за то большой коэффиціентъ, наприм., такой какъ для желѣза при 40^0 С. [1]).

$$0{,}000011.$$

Возьмемъ сначала функцію перваго порядка. Замѣтимъ, что, въ современной температурѣ поверхности земли такое неравенство существуетъ, ибо въ среднемъ южное полушаріе имѣетъ болѣе низкія температуры поверхности, какъ сѣверное; западное отъ меридіана острова Ферро болѣе низкія, какъ восточное.

Особенно рельефно выражается это неравенство, если разсматривать такъ наз. полушаріе суши, котораго полюсъ находится вблизи Лондона и полушаріе морей. Сравнимъ землю, раздѣленную на такія два полушарія съ шаромъ, поверхность котораго содержится въ температурѣ:

$$A+B.\cos\theta$$

θ считается отъ Лондонскаго полюса до противуположнаго. Отдѣляя другія слагающія температуры земной поверхности, изъ приблизительнаго вычисленія нахожу, что B не должно быть больше, какъ 5^0 С. т. е. всю амплитуду разностей температуры полагаемъ въ 10^0 С.

Тогда помощью формулы I, полагая $n=1$ а радіусъ земли равнымъ 6370000 метрамъ найдемъ, что самое большое возвышеніе деформированной поверхности надъ поверхностью шара не превышаетъ:

263 метровъ

столько-же получимъ для наибольшаго пониженія дна въ морскомъ полушаріи.

---

[1]) Jamin et Bouty Cours de Physique, II томъ, стр. 91, изд. 1883 г.

Климатическое неравенство между экваторомъ и полюсами имѣетъ гораздо большую амплитуду. Она пожалуй достигаетъ 50^0 и больше. Это есть неравенство второго порядка, поэтому $n=2$. Оказывается, что сокращеніе полярнаго радіуса противъ экваторіальнаго доходитъ до

2102 метровъ.

Большія неровности рельефа земли [1]), какъ напримѣръ обѣ Америки, Африка и Европа выражаются гармоническими сферическими функціями 4-го порядка. Соотвѣтственно неровностямъ рельефа имѣемъ неравенства температуръ того-же порядка, но амплитуда ихъ меньше, чѣмъ у неравенства второго порядка. Притомъ въ знаменателѣ формулы II будетъ теперь 7. Слѣдовательно, деформація будетъ меньше даже, чѣмъ въ первомъ примѣрѣ.

Замѣтимъ, что всѣ эти деформаціи доходятъ до максимума въ другихъ мѣстахъ земной поверхности такъ, что даже сумма ихъ нигдѣ не должна превышать крайняго предѣла деформаціи второго порядка. Впрочемъ мы только разсматривали примѣры, вовсе не желая опредѣлить какую-то дѣйствительную деформацію, хотя въ виду того, что эти отступленія очень незначительны, употребленный здѣсь способъ вычисленія далъ-бы очень точные результаты.

Изъ этихъ примѣровъ видно, что развѣ въ случаѣ, когда коэффиціенты расширенія веществъ внутри земли несравненно больше коэффиціента расширенія желѣза, могутъ получиться болѣе крупные результаты.

Мы предположили, что время, истекшее съ того момента, какъ началась реакція климатическихъ условій на температуры

---

[1]) G. H. Darwin. Phil. Trans. Vol. 173, Part. I, стр. 228. On the stresses due to the weight of Continents.

ядра земли безконечно длинно. Между тѣмъ погасаніе старыхъ, и возрастаніе новыхъ неравенствъ идетъ крайне медленно. Мы сейчасъ скажемъ нѣсколько словъ о скорости погасанія, теперь-же замѣтимъ, что неравенства высокихъ порядковъ хотя и скоро погасаютъ и взаимно быстро стремятся къ предѣльному своему вліянію, но за то проникаютъ не глубоко[1]). Изъ нашей простой формулки (I) сейчасъ видно, что деформація «ceteris paribus» все уменьшается по мѣрѣ увеличенія числа: n. Въ виду всего этого и не стоитъ пускаться въ строгое аналитическое изслѣдованіе этихъ деформацій.

Когда время, истекшее съ того момента, какъ началось вліяніе извѣстнаго неравенства температуры поверхности, есть конечная величина, то неравенство температуры порядка n внутри шара выражается слѣдующимъ образомъ:

$$u_n \left(\frac{r}{R}\right)^n (1 - s_n)\,.$$

Эта формула написана по образцу формулы IV bis (1), причемъ,

$$s_n = \sum_{i=1}^{i=\infty} a_{n,i}\, \varphi_n(p_i r)\, e^{-a^2 p_i^2 t}.$$

Если предположить, что первоначальная температура была функціей отъ одного лишь радіуса, то кромѣ общаго сокращенія объема появится только деформація, вызванная неравенствомъ температуры n-таго порядка.

Посмотримъ скоро-ли погасаетъ s_2, т. е. рядъ, выражающій погасаніе неравенства второго порядка. Съ этой цѣлью

---

[1]) *Примѣчаніе.* Во избѣжаніе многорѣчія мы позволили себѣ выразиться не совсѣмъ точно.

нужно разсмотрѣть коэффиціенты: $a_2 p_i^2$. $p_i = \frac{\eta_i}{R}$, гдѣ η_i есть i-тый, неравный нулю положительный корень трансцендентнаго уравненія:

$$\varphi_2(\eta) = o. \qquad \text{II}$$

Замѣтимъ сначала, что при единицахъ: времени — годъ, длины—одинъ англійскій футъ по Томсону[1]):

$$a^2 = \frac{k}{c} = 400$$

R, радіусъ земли въ футахъ, круглымъ счетомъ:

$$20,000,000.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{a^2}{R^2} = \frac{1}{10^{12}}$$

Эта постоянная независитъ отъ единицъ длины, ея измѣренія суть:

$$T^{-1}$$

гдѣ T обозначаетъ время, поэтому ее можно употребить и тогда, когда единицей длины взятъ метръ, лишь бы единицей времени остался годъ.

Корни уравненія: II находятся въ четвертомъ, шестомъ и т. д. квадрантахъ. Первый близокъ къ 5,8 второй къ 9 и т. д. Очевидно скорость погасанія увеличится, если возьмемъ вмѣсто перваго корня: 2π вмѣсто второго 3π и т. д.

---

[1]) Cooling of the Earth loc. cit. стр. 476.

тогда:

$$e^{-a^2 p_1^2 t} = e^{-\frac{\pi^2}{10^{12}} 4t}$$

$$e^{-a^2 p_2^2 t} = e^{-\frac{\pi^2}{10^{12}} 9t}$$

$$e^{-a^2 p_3^2 t} = e^{-\frac{\pi^2}{10^{12}} . 16t}$$

. . . .

. . . .

Когда $t=o$, то всѣ: $e^{-a^2 p^2 t}$ принимаютъ значеніе: 1. Пусть $t=100{,}000{,}000$ лѣтъ. Тогда:

$$e^{-a^2 p_1^2 t} = 0{,}996\ldots$$

$$e^{-a^2 p_2^2 t} = 0{,}991\ldots$$

$$e^{-a^2 p_3^2 t} = 0{,}982\ldots$$

. . . .

Изъ этого видно, что послѣ ста милліоновъ лѣтъ рядъ s_2 будетъ еще имѣть значеніе очень близкое къ первоначальному, только самые далекіе члены ряда уже исчезнутъ.

Первоначальное значеніе ряда s_2 — есть — 1. Теперь оно будетъ меньше, насколько, это трудно оцѣнить не дѣлая вычисленія. Между тѣмъ изъ приведенныхъ данныхъ видно, что нужно взять въ разсчетъ многіе члены ряда. Но изъ найденныхъ здѣсь числовыхъ величинъ для

$$e^{-a^2 p_i^2 t}$$

. . . . . .

видно, что этотъ рядъ погасаетъ весьма медленно. Сто милліо-

новъ лѣтъ для него — незначительный промежутокъ времени. Изъ нашего вычисленія коэффиціента $\frac{a^2}{R^2}$ ясно видно, что такой медленностью погасанія онъ обязанъ только тому, что R есть очень большая величина.

Но если s_2 погасаетъ столь медленно, то даже послѣ 100,000,000 лѣтъ вліяніе климатическаго неравенства ограничивается только внѣшней оболочкой земли. Мы взяли число: 100,000,000 безъ никакой задней мыслы. Мы вовсе не желаемъ утверждать, что климатическое неравенство между экваторомъ и полюсомъ существуетъ сто милліоновъ лѣтъ. Число было взято единственно ради примѣра. Конечно, еслибъ взять во вниманіе неравенство высокаго порядка, то оказалось бы, что s_n погасаетъ несравненно скорѣе. Но мы уже знаемъ, что, чѣмъ выше порядокъ неравенства, тѣмъ вліяніе его падаетъ сильнѣе по мѣрѣ углубленія. Мы уже прежде показали, что окончательныя деформаціи высокаго порядка меньше окончательныхъ деформацій низкаго порядка.

Выше было замѣчено, что амплитуда неравенства температуры между полюсомъ и экваторомъ есть самая большая, а потому и соотвѣтственная деформація должна быть довольно значительная. На первый взглядъ казалось-бы, что будучи пожалуй самымъ древнимъ, неравенство температуры между полюсомъ и экваторомъ должно быть наиболѣе рѣзко выражено въ термическомъ состояніи земли. Геологическія данныя до нѣкоторой степени подтверждаютъ этотъ взглядъ. Въ Силурійское время климатическіе поясы оказываютъ сходство съ современными. Начиная съ Юрской эпохи до современной климатическіе поясы очевидно расположены концентрически вокругъ теперешнихъ полюсовъ [1]). Но, какъ замѣчаетъ Неймайръ, въ

[1]) M. Neumayr. Ueber Klimat. Zonen. Denkschr. Akad. Wiss. Wien. 1883 г.

промежуточныя эпохи трудно прослѣдить такое расположеніе, особенно-же рѣзко отличаются климатическія отношенія въ каменно-угольную эпоху показывающую слѣды удивительнаго однообразія климата. Съ другой стороны Ваагенъ[1]) и нѣкоторые другіе геологи утверждаютъ, что въ каменно-угольную эпоху значительная часть поверхности земли, теперь находящаяся подъ тропиками, находилась въ условіяхъ совсѣмъ сходныхъ съ условіями, господствовавшими въ сѣверномъ полушаріи въ ледниковую эпоху. Мы восве не желаемъ разбирать это мнѣніе, но позволимъ себѣ сдѣлать замѣчаніе, что большія дислокаціи способны вызвать перемѣщеніе земли относительно ея оси вращенія. Между тѣмъ направленіе оси остается постояннымъ въ пространствѣ[2]) относительно солнечной системы.

И такъ является сомнительнымъ, существуетъ ли это неравенство постоянно съ самаго начала существованія земли.

Мы уже не говоримъ о томъ, что измѣненія въ распредѣленіи суши и моря, въ направленіи теченій, воздушныхъ и морскихъ измѣняютъ условія и опять ослабляютъ вліяніе этого неравенства.

И такъ деформаціи, вызванныя современными неравенствами температуръ поверхности равно какъ и тѣ, которыя были вызваны въ прошедшемъ другимъ распредѣленіемъ суши и моря или «ab initio» существовавшими неравенствами въ распредѣленіи температуры внутри земли, всѣ заключены въ тѣсные предѣлы. Въ сравненіи съ общимъ сокращеніемъ объема земли вслѣдствіе охлажденія, онѣ являются второстепенными факторами. Однако онѣ дѣйствуютъ въ пользу сохраненія существующихъ условій, ибо все таки дно Океановъ должно немножко скорѣе понижаться какъ поверхность суши.

---

[1]) Waagen. Carbone Eiszeit Jahrb. der k. k. Geol. Reichsanst. 1887 г.

[2]) Thomson et Tait. Treat. on Nat. Phil. § 108.

Дависонъ и Дарвинъ разбирали вопросъ общаго сокращенія объема земли [1]). Изслѣдованія этихъ ученыхъ имѣли цѣлью разъяснить образованіе складокъ въ земной корѣ. Слѣдуя по пути, указанномъ Дарвиномъ, можно разобрать вліяніе неравенствъ температуры на образованіе складокъ. Но эффектъ ихъ будетъ несравненно меньше, главнымъ образомъ потому, что амплитуда неравенствъ температуры несравненно меньше амплитуды общаго паденія температуры. Дѣйствительно, еслибъ даже температура ядра земли нигдѣ не превышала температуры плавленія лавы при атмосферномъ давленіи, то еще амплитуда общаго паденія температуры была-бы больше 1000° С. т. е. въ 20 разъ по крайней мѣрѣ больше, какъ амплитуда самаго крупнаго климатическаго неравенства.

Потомъ, всѣ эти неравенства измѣнчивы и непостоянны; общее пониженіе температуры постоянно и древнѣе всѣхъ неравенствъ. Чѣмъ выше порядокъ неравенства, тѣмъ сильнѣе оно слабѣетъ по мѣрѣ углубленія. Это тоже уменьшаетъ эффектъ неравенствъ.

И такъ неравенства температуры производятъ нѣкоторыя деформаціи, но благодаря тому, что ихъ амплитуда по отношенію къ такому громадному шару, какъ земля, слишкомъ малы, ихъ вліяніе совсѣмъ незначительно, хотя и дѣйствуетъ въ пользу поддержанія существующаго распредѣленія суши и моря. Поэтому нельзя относить на ихъ счетъ какихъ-либо болѣе значительныхъ деформацій, развѣ въ томъ случаѣ, когда онѣ дѣйствуютъ въ продолженіе неимовѣрно долгихъ періодовъ времени.

Вслѣдствіе неоднородности земного шара эффектъ общаго сокращенія объема сосредоточивается въ извѣстныхъ областяхъ. Тоже самое случается и съ эффектомъ неравенствъ температуры. Тогда очевидно мѣстный эффектъ будетъ больше.

---

[1]) Phil. Trans. за 1887 годъ.

Результаты § 3, могутъ быть примѣнены къ рѣшенію одного вопроса, возбужденнаго Дарвиномъ. Въ одной изъ своихъ работъ [1]) онъ спрашиваетъ какія гармоническія неравенства погасаютъ скорѣе. Ему показалось, что неравенства высокаго порядка должны погасать медленнѣе, но онъ говоритъ сейчасъ [2]) «только анализъ можетъ разрѣшить этотъ вопросъ».

Мы нашли, что неравенства высокаго порядка погасаютъ скорѣе.

Г. Г. Дарвинъ хотѣлъ узнать, что само по себѣ болѣе прочно гора-ли, горный хребетъ, или материкъ. Если принять, что неравенства высокаго порядка погасаютъ скорѣе, то выходитъ, что материкъ; если, какъ это показалось Дарвину, принять, что медленнѣе, то выходитъ наоборотъ, что горный хребетъ прочнѣе.

Наши результаты показываютъ, что материки прочнѣе. Это слѣдуетъ понимать въ слѣдующемъ смыслѣ: если разсматривать неровности рельефа земли, какъ произведенія нѣкоторыхъ внутреннихъ силъ, то материки по существу своему болѣе прочны, менѣе склонны обрушиться или провалиться, какъ горные хребты.

---

[1]) On bodily tides. Phil. Trans. London 170, часть I, стр. 27.

[2]) «Only analysis would tell us».

Математическія приложенія:

I. Слѣдуетъ доказать, что:

$$A_{n,i} = -\frac{2}{p_i \frac{dF_n(pR)}{dp}}.$$

когда извѣстно, что:

$$A_{n,i} = \frac{2\int_0^R \left(\frac{r}{R}\right)^n r^2 F_n(pr)\,dr}{R\left[\frac{dF_n}{dp}(pR)\right]^2},$$

и что:

$$F_n(p_i r) = o \quad \text{когда} \quad r = R.$$

Пусть

$$pr = x$$

$$pR = z$$

наконецъ [1]):

$$F_n(x) = x^{-1/2} J_{n+1/2} = x^n \varphi_n(x). \qquad \text{I}$$

Тогда:

$$A_{n,i} = \frac{2\int_0^{pR} x^{n+2} F_n(x)\,dx}{z^{n+3}\left[\frac{dF_n(z)}{dz}\right]^2}.$$

---

[1]) Ср. формулы VI въ § 4.

Пусть:

$$u_n = x^{n+1} F_n = x^{n+{}^1/_2} J_{n+{}^1/_2}, \qquad \text{II}$$

тогда:

$$\int x^{n+2} F_n \, dx = \int x u_n \, dx,$$

u_n очевидно дѣлается равно нулю вмѣстѣ съ F_n. Съ другой стороны, изъ извѣстнаго отношенія [1]) между функціями Бѐсселя:

$$J_{m-1} = \frac{m}{x} J_m + \frac{dJ_m}{dx},$$

когда $m = n + {}^1/_2$ слѣдуетъ:

$$F_{n-1} = (n+1)\frac{F_n}{x} + \frac{dF_n}{dx}. \qquad \text{III}$$

Изъ этого опять слѣдуетъ помощью формулъ: II

$$\frac{du_{n+1}}{dx} = xu_n,$$

отсюда:

$$\int xu_n \, dx = u_{n+1} + C.$$

У насъ интегралъ долженъ быть взятъ отъ $x = o$, до $x = z$, но для $x = o$ $u_n = o$, слѣдовательно $C = o$.

И такъ

$$\int_0^z x^{n+2} F_n \, dx = \int_0^z xu_n \, dx = u_{n+1}(z) \qquad \text{IV}$$
$$= z^{n+2} F_{n+1}(z).$$

Изъ извѣстнаго отношенія между функціями Бесселя:

$$J_{m+1} = \frac{m}{x} J_m - \frac{dJ_m}{dx},$$

---

[1]) Ср. Todhunter, loc. cit., 297 стр.

когда $m = n + {}^1/_2$ слѣдуетъ:

$$F_{n+1} = \frac{n}{x} F_n - \frac{dF_n}{dx},$$

для $x = z$ (т. е. $r = R$) $F_n = o$, а потому:

$$\frac{dF_n}{dz} = - F_{n+1}.$$

Помощью формулъ IV и V сейчасъ находимъ:

$$A_{n,i} = \frac{2}{z\, F_{n+1}(z)}.$$

А по V обратно:

$$A_{n,i} = - \frac{2}{z \,.\, \frac{dF_n(z)}{dz}}.$$

наконецъ, такъ какъ

$$z = pR$$

$$A_{n,i} = - \frac{2}{p \frac{dF_n(pR)}{dp}}.$$

что и требуется доказать.

$A_{n,i}$ состоитъ коэффиціентомъ при $F_n(p_i r)$, но:

$$F_n(pr) = (pr)^n \cdot \varphi^n(pr)$$

$$\frac{dF_n(pR)}{dp} = (pR)^n \cdot \frac{d\varphi^n(pR)}{dp} + n\,(pR) \cdot \overset{n-1}{R}\,\varphi^n(pR),$$

но

$$\varphi_n(pR) = o,$$

слѣдовательно:

$$A_{n,i}\ F_n(pr) = \left(\frac{r}{R}\right)^n a_{n,i}\ \varphi_n(pr),$$

гдѣ:

$$a_{n,i} = -\frac{2}{p\frac{d\varphi_n(pR)}{dp}}.$$

Такимъ образомъ справедливость формулы IV (1) bis въ § 4 вполнѣ доказана.

Приложеніе II.

Слѣдуетъ доказать, что

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_{n,i}\ \varphi_n(p_i r) = 1. \qquad \text{I}$$

Вспомнивъ, что:

$$a_{n,i} = -\frac{2}{p_i\frac{d\varphi_n(p_i R)}{dr}},$$

можемъ написать:

$$2\sum_{i=1}^{i=\infty} -\frac{\varphi_n(p_i r)}{p_i\frac{d\varphi_n(p_i R)}{dp_i}} = 1.$$

Этотъ рядъ есть сумма дѣйствительныхъ остатковъ (residus) интеграла:

$$Z = -\frac{2}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi_n(zr)}{z\varphi_n(zR)}\ dz, \qquad \text{II}$$

для полюсовъ:

$$z = p_i .$$

Контуръ интеграціи есть замкнутый, онъ долженъ обнимать всю область, лежащую на лѣвой сторонѣ оси y, такъ какъ всѣ положительные корни входятъ въ составъ ряда: I. Мы должны тоже исключить точку, $z=o$, такъ какъ нулевые корни не входятъ въ рѣшеніе.

Отправимся по слѣдующему контуру, по оси y отъ $y=+\infty$ до $y=-\infty$ обходя точку $z=o$ по маленькому полукругу, потомъ по полукругу безконечнаго радіуса отъ $y=-\infty$ до $y=+\infty$. Сообразно съ этимъ возьмемъ:

$$x = \rho \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\theta$$

Такъ какъ

$$\varphi_n(pr) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{pr}{2}\right)^{2i}}{\Gamma_{(i+1)}\,\Gamma_{(i+n+3/2)}},$$

то теперь

$$\varphi_n = s + \sqrt{-1}\, q,$$

гдѣ:

$$\left.\begin{aligned} s &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{\rho r}{2}\right)^{2i} \cos 2i\theta}{\Gamma_{(i+1)}\,\Gamma_{(i+n+3/2)}} \\ q &= \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{\rho r}{2}\right)^{2i} \sin 2i\theta}{\Gamma_{(i+1)}\,\Gamma_{(i+n+3/2)}} \end{aligned}\right\} \quad \text{III}$$

Такъ какъ въ знаменателѣ интеграла Z появились мнимыя выраженія, то освободимъ его отъ этихъ мнимыхъ величинъ. Послѣ очевидныхъ преобразованій найдемъ:

$$Z = -\left[\frac{1}{\pi}\int\frac{sS+qQ}{S^2+Q^2}\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int\frac{qS-Qs}{S^2+Q^2}\,\frac{d\rho}{\rho} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\frac{sS+qQ}{S^2+Q^2}\,\frac{d\rho}{\rho} - \frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int\frac{Sq-Qs}{S^2+Q^2}\,d\,\theta\right],$$

S и Q **суть тѣ-же** s и q, **только** r **замѣнено буквой** R.

Сумма нашего ряда равна дѣйствительной части интеграла Z, но изъ двухъ дѣйствительныхъ интеграловъ одинъ относится только къ линіи: ρ другой только къ линіи: θ.

Но на линіи ρ или на оси y $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\theta = -\frac{\pi}{2}$ вслѣдствіе этого всѣ $sin\,2i\theta = o$, а потому:

$$s = o$$

$$S = o$$

Такимъ образомъ весь второй интегралъ равенъ нулю. Возьмемъ первый интегралъ по маленькому полукругу, обходящему точку $z = o$.

Для $z = o,\quad \rho = o,\quad s = o,\quad S = o$

$$q = 1,\quad Q = 1$$

Слѣдовательно будетъ:

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi. \qquad \text{IV}$$

Интегралъ по полукругу безконечнаго радіуса идетъ отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Мы сейчасъ покажемъ, что онъ стремится къ предѣлу *нуль*, когда ρ увеличивается до безконечности.

Изъ формулъ III видно, что относительно θ, функція b

есть нечетная, s четная. Поэтому интегралъ

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Ss+qQ}{S^2+Q^2}\, d\theta$$

есть четный, а потому можно вмѣсто него взять интегралъ:

$$2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Ss+Qq}{S^2+Q^2}\, d\theta\,,$$

Замѣтимъ, что:

$$\varphi_n = \frac{F_n}{x^n} = \frac{(X_n \sin x - X_n' \cos x)}{x^{2n+1}}\,, \qquad \text{V}$$

гдѣ X_n X_n' есть полиномы порядка n и $n-1$ или наоборотъ.

Подставляя:

$$x = r.\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)\,,$$

получимъ новыя выраженія для s и q, состоящія изъ нѣкоторыхъ полиномовъ, изъ тригонометрическихъ и гиперболическихъ синусовъ и косинусовъ. Подставляя эти выраженія въ формулу: V, приводя въ порядокъ и т. д. увидимъ что, когда ρ очень велико, нашъ интегралъ будетъ почти равенъ интегралу

$$2\,\frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e.^{\rho(r-R)\sin\theta} \cos[\rho(r-R)\cos\theta]\, d\theta$$

но этотъ интегралъ пока $r < R$ стремится къ нулю когда ρ возрастаетъ до безконечности.

Такимъ образомъ дѣйствительная часть интеграла Z согласно формулѣ IV будетъ

$$\frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

что и требуется доказать.

Приложеніе III.

Слѣдуетъ доказать, что корни положительные, не нулевые трансцендентнаго уравненія:

$$F_n(x) = o$$

находятся въ $(n+2i)$-хъ квадрантахъ, причемъ

$$i = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

Относительно корней этого уравненія извѣстно только то, что было найдено Пуассономъ [1]). Онъ, собственно говоря, занимался уравненіемъ

$$J_m(x) = o,$$

гдѣ J_m есть Бесселова функція. Но въ виду того, что:

$$F_n = x^{-1/2} J_{n+1/2}(x),$$

очевидно, положительные и не нулевые корни этихъ уравненій тождественны, коль скоро:

$$m = n + 1/2.$$

Пуассонъ замѣтивъ, что, когда x очень велико въ сравненіи съ n, то дифференціальное уравненіе, которому удовле-

---

[1]) Todhunter, loc. cit., стр. 312 и слѣд.

творяетъ функція Бесселя, можетъ быть приблизительно замѣнено уравненіемъ:

$$\frac{d^2 J_m(\sqrt{x})}{dx^2} + J_m(\sqrt{x}) = o,$$

нашелъ для него тоже приблизительный интегралъ:

$$J_m = \frac{2}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x\right).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что большіе корни уравненія:

$$F_n(x) = o$$

приблизительно такіе-же, какъ корни уравненія

$$\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2} - x\right] = o.$$

У функцій F_n, входящихъ въ наше рѣшеніе указатель n есть или 0 или цѣлое положительное число. Эти функціи могутъ быть написаны подъ различными видами:

$$F_n(x) = x^{-1/2} J_{n+1/2}(x). \qquad \text{I}$$

$J_{n+1/2}$ есть функція Бесселя [1]) или функція

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1/2+2i}}{\Gamma_{(i+1)} \Gamma_{(n+i+3/2)}}. \qquad \text{II}$$

Съ другой стороны можно написать:

$$F_n(x) = \frac{C[X_n \sin x - X'_n \cos x]}{x^{n+1}}. \qquad \text{III}$$

---

[1]) Jordan, loc. cit., стр. 441.

C есть нѣкоторая постоянная [положительная],

$$X_n = 1 - \frac{A_2}{2!}x^2 + \frac{A_4}{4!}x^4 - \ldots.$$

$$X'_n = x - \frac{A_3}{3!}x^3 + \frac{A_5}{5!}x^5 - \ldots.$$

причемъ:

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = 1$$

$$A_{i+1} = A_i \frac{2.(n-i)}{2n-i}$$

X^n и X'_n суть полиномы. Когда n четно, то полиномъ: X_n оканчивается членомъ:

$$(\sqrt{-1})^n \frac{A_n}{n!} x^n ,$$

а полиномъ: X'_n оканчивается членомъ:

$$(\sqrt{-1})^{n-2} \frac{A_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} .$$

Когда n есть нечетное число, то X_n оказывается членомъ:

$$(\sqrt{-1})^{n-1} \frac{A_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} ,$$

а полиномъ X'_n оканчивается членомъ:

$$(\sqrt{-1})^{n-1} \frac{A_n}{n!} x^n.$$

Подъ видомъ: III функціи: F_n являются, кажется, въ первый разъ у Пуассона [1]). Въ своемъ изслѣдованіи онъ взялъ

[1]) Poisson, loc. cit., § 81 и слѣд.

собственно говоря функцію: $x^{-n} F_n$, вслѣдствіе чего въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи вводитъ множитель: x^n. Впрочемъ видъ: III хорошо извѣстенъ.

Изъ формулы: I видно, что уравненіе:

$$F_n(x)=o \text{ гдѣ } n=0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

имѣетъ n нулевыхъ корней. Этими нулевыми корнями вовсе не будемъ заниматься, такъ какъ они не входятъ въ рѣшеніе. $J_{n+1/2}$ для отрицательныхъ значеній перемѣнной дѣлается мнимымъ, но этого не случается съ F_n. Но такъ какъ:

$$F_n = C x^n [1 - ax^2 + \ldots .$$

т. е. рядъ въ скобкахъ включаетъ только четныя степени перемѣнной, то отрицательные корни уравненія:

$$F_n = o$$

равны по абсолютной величинѣ положительнымъ. Впрочемъ насъ интересуютъ только положительные корни этого уравненія. А потому можно сказать, что корни этого уравненія суть тѣ-же, что корни уравненія:

$$J_{n+1/2}=o. \qquad \text{IV}$$

Съ другой стороны изъ формулы III видно, что занимающіе насъ положительные корни равны корнямъ трансцендентнаго уравненія:

$$X_n \sin x - X_n' \cos x = o. \qquad \text{V}$$

Мы будемъ пользоваться, смотря по обстоятельствамъ, то тѣмъ, то другимъ видомъ уравненія. Во избѣжаніе постоянныхъ оговорокъ замѣтимъ, что впослѣдствіи будемъ говорить о *не нулевыхъ положительныхъ корняхъ уравненія*

$$F_n(x)=o.$$

Начнемъ разсужденіе съ нѣсколько болѣе общаго случая. Замѣтимъ, что всегда

$$J_m = \frac{x^m}{2^m \Gamma_{(m+1)}} \varphi_m(\theta). \qquad \text{VI}$$

$$\theta = \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\varphi_m(\theta) = 1 - \frac{\theta}{m+1} + \frac{\theta^2}{1.2.(m+1)(m+2)} - $$

Отсюда легко вывести слѣдующія дифференціальныя уравненія, въ которыхъ, число знаковъ $'$ показываетъ порядокъ производной по θ:

$$\begin{aligned}
&\varphi_m + (m+1)\,\varphi'_m + \theta\varphi''_m = o\\
&\varphi'_m + (m+2)\,\varphi''_m + \theta\varphi'''_m = o\\
&\varphi''_m + (m+3)\,\varphi'''_m + \theta\varphi^{\mathrm{IV}}_m = o
\end{aligned} \qquad \text{VII}$$

. . . .

. . . .

На основаніи этихъ уравненій, Тодгунтеръ [1]) показываетъ, что корни уравненія:

$$\varphi_m(\theta) = o$$

всѣ дѣйствительны и положительны. Число ихъ безконечно.

Дальше изъ этихъ уравненій слѣдуетъ, что это уравненіе не имѣетъ многократныхъ корней, ибо коль скоро $\varphi'_m = o$ вмѣстѣ съ $\varphi_m = o$, то и всѣ остальныя производныя равны нулю. Слѣдовательно корни или однократны или многократны безконечное число разъ. Очевидно, второе допущеніе невозможно. Дальше,

---

[1]) Loc. cit., стр. 307. Собственно говоря, выводъ принадлежитъ Фурье.

изъ уравненій VII сейчасъ видно, что первая производная отъ φ_m по θ и φ_{m+1} въ сущности одно и тоже. Дѣйствительно

$$\varphi_{m+1} = -A.\frac{d\varphi_m}{d\theta}, \qquad \text{VIII}$$

гдѣ A есть постоянная.

На основаніи этого замѣчанія все, что было сказано объ отношеніяхъ φ_m къ производнымъ, справедливо для функцій φ_m разнаго порядка. — Замѣтимъ, что такъ какъ по опредѣленію.

$$\varphi_m = 1 - \frac{\theta}{m+1} + \frac{\theta^2}{(m+1)(m+2)} - \qquad \text{IX}$$

то

$$\varphi_\infty = 1 \qquad \text{X}$$

пока θ имѣетъ конечныя значенія. Помощью этого замѣчанія легко доказать, что φ_{m+1} дѣлается равно нулю въ первый разъ лишь послѣ того, какъ φ_m сдѣлалось равнымъ нулю въ первый разъ.

Дѣйствительно, послѣ точки $\theta = o$ всѣ функціи φ_m сначала имѣютъ тотъ самый знакъ. Положимъ, что φ_m еще не сдѣлалось равнымъ нулю, а φ_{m+1} или, что все равно $\frac{d\varphi_m}{d\theta}$ уже дѣлается равнымъ нулю въ первый разъ послѣ точки $\theta = o$.

Изъ уравненій VII слѣдуетъ, что въ этотъ моментъ

$$\varphi_m \text{ и } \varphi_{m+1} \text{ т. е. } \varphi_m \text{ и } \frac{d^2\varphi_m}{d\theta^2}$$

должны имѣть противный знакъ. Но φ_m еще не мѣняло знака, а потому φ_{m+2} должно было перемѣнить знакъ раньше чѣмъ φ_{m+1}. Переходя къ слѣдующему уравненію изъ системы VII увидимъ, что въ такомъ случаѣ φ_{m+3} должно было еще раньше измѣнить знакъ. —Продолжая такимъ образомъ дойдемъ до

φ_∞, которое, какъ выше было замѣчено, имѣетъ постоянное значеніе: 1 пока θ конечно, а потому не можетъ сдѣлаться равнымъ нулю прежде функцій низкаго порядка. И такъ φ_{m+1} *дѣлается въ первый разъ равно нулю, лишь послѣ того, какъ* φ_m *сдѣлалось равно нулю послѣ точки* $\theta = o$.

Тоже самое относится къ $\frac{d\varphi_m}{d\theta}$; къ J_m, такъ какъ всѣ эти функціи дѣлаются одновременно равны нулю.

Изъ прежнихъ разсужденій уже оказалось, что корни уравненій разнаго порядка другъ отъ друга различны.

До сихъ поръ мы полагали m какимъ угодно, хотя положительнымъ числомъ, теперь перейдемъ къ спеціально насъ интересующему случаю, когда $m = n + {}^1/_2$, гдѣ

$$n = 1, 2, 3 \dots\ n \dots$$

Мы будемъ разсматривать функціи: $J_{n+{}^1/_2}$ или, что все равно F_n подъ видомъ III. Тогда корни уравненій:

$$J_{n+{}^1/_2} = o \quad F_n = o$$

совпадаютъ съ корнями уравненія:

$$\frac{X_n}{X'_n} - \cot g\, x = o. \tag{XI}$$

Припомнимъ, что:

$$X_n = 1 - \frac{A_2}{2!}x^2 + \frac{A_4}{4!}x^4 - \dots$$

$$X'_n = x\{1 - \frac{A_3}{3!}x^2 + \frac{A_5}{5!}x^4 - \dots$$

$$A_{i+1} = A_i\,\frac{2.(n-i)}{2n-i} \qquad A_0 = 1 \quad A_1 = 1.$$

Полиномъ X_n когда $n = 2i$ имѣетъ i корней $x^2 = a_1^2$, $x^2 = a_2^2 \dots$

» X'_n » » » » $i-1$ » $x^2 = b_1^2$, $x^2 = b_2^2 \dots$

и кромѣ того корень: $x=o$.

Когда $n=2i+1$ оба полинома имѣютъ i корней:

$$x^2=a_1^2\ldots\ldots \qquad x^2=b_1^2\ldots\ldots$$

кромѣ того X_n' имѣетъ корень: $x=o$.

А потому:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \prod_{\mu=1}^{\mu=i}\left(1-\frac{x^2}{a_\mu^2}\right) \text{ когда } n=2i \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ » } \quad n=2i+1 \\ X_n' &= x\prod_{\mu=1}^{\mu=i-1}\left(1-\frac{x^2}{b_\mu^2}\right) \text{ когда } n=2i \\ X_n' &= x\prod_{\mu=1}^{\mu=i}\left(1-\frac{x^2}{b_\mu^2}\right) \text{ когда } n=2i+1 \end{aligned}\right\} \text{XII}$$

Во всемъ промежуткѣ отъ $x=o$ до $x=+\infty$ множитель x не имѣетъ вліянія на знакъ, а потому не будемъ больше обращать на него вниманія.

Положимъ что x^2 сдѣлалось больше наибольшаго изъ корней a^2 и b^2. Тогда всѣ множители въ произведеніяхъ вида XII будутъ отрицательны, а потому частное:

$$\frac{X_n}{X_n'}$$

будетъ постоянно положительное, когда число производителей въ числителѣ и знаменателѣ одинаково, т. е. когда *n нечетно*, напротивъ того, оно постоянно отрицательно, когда *n четно*, ибо тогда число производителей въ числителѣ и знаменателѣ различается на единицу. Но котангенсъ имѣетъ положительныя значенія въ *нечетныхъ*, отрицательныя въ четныхъ квадрантахъ. Корни уравненія XI есть абсциссы точекъ пересѣченія кри-

выхъ: $\frac{X_n}{X'_n}$ и $cotgx$. Изъ только что сказаннаго слѣдуетъ что при $n=2i+1$, пересѣченія этихъ кривыхъ могутъ имѣть абсциссы только въ нечетныхъ квадрантахъ, при $n=2i$ только въ четныхъ.—И такъ, *послѣ того какъ частное*:

$$\frac{X_n}{X'_n}$$

въ послѣдній разъ перемѣнило свой знакъ, кривая:

$$\frac{X_n}{X'_n}\, cotgx, \quad а\ за\ ней \quad J_{n+{}^1/_2}\ и\ F_n$$

мѣняютъ знакъ только въ нечетныхъ квадрантахъ, если n нечетно, только въ четныхъ если n четно.

Замѣтимъ, что пока n есть величина конечная, полиномы: X_n и X'_n очевидно не могутъ имѣть безконечно большихъ корней.

Теперь предположимъ, что, если F_{n-1} $(J_{n-{}^1/_2})$ дѣлается въ первый разъ равно нулю въ $(n+1)$-омъ квадрантѣ и послѣ того, какъ частное: $\frac{X_{n-1}}{X'_{n-1}}$ въ послѣдній разъ перемѣнило знакъ, если F_n дѣлается въ первый разъ равно нулю въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ и послѣ того какъ $\frac{X_n}{X'_n}$ въ послѣдній разъ перемѣнило знакъ; то непремѣнно функція F_{n+1} $(J_{n+{}^3/_2})$ въ первый разъ мѣняетъ знакъ въ $(n+3)$-емъ квадрантѣ и послѣ того, какъ $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ въ послѣдній разъ мѣняетъ знакъ. Потомъ мы докажемъ, что функціи: F_1, F_2 мѣняютъ знакъ въ первый разъ, первая въ 3-емъ, вторая въ четвертомъ квадрантѣ и послѣ того какъ $\frac{X_1}{X'_1}$ и $\frac{X_2}{X'_2}$ въ послѣдній разъ измѣнили знакъ. Изъ этого уже можно вывести, что наше положеніе справедливо для всѣхъ прочихъ функцій.

Доказательство для того случая когда n четно, немножко различается отъ того, которое дѣлается при n нечетномъ. Мы приведемъ только первое, ибо читатель самъ легко замѣтитъ, какія измѣненія слѣдуетъ сдѣлать для n нечетнаго.

Мы только что доказали, что послѣ того, какъ: $\frac{X_n}{X'_n}$ въ послѣдній разъ измѣнило знакъ, корни уравненія:

$$F_n = o$$

находятся въ четныхъ квадрантахъ если n четно, въ нечетныхъ если n нечетно. Слѣдовательно въ данномъ случаѣ, согласно нашему предположенію. F_{n+1} мѣняетъ знакъ въ первый разъ въ $(n+1)$-омъ, второй разъ въ $(n+3)$-емъ. F_n мѣняетъ знакъ въ первый разъ въ $(n+2)$-омъ, второй разъ въ $(n+4)$-омъ. Обѣ функціи вплоть до перваго корня положительны. Но мы уже прежде доказали, что F_{n+1} въ первый разъ мѣняетъ знакъ между двумя первыми корнями уравненія: $F_n=o$. Слѣдовательно, F_{n+1} мѣняетъ знакъ или въ промежуткѣ отъ перваго корня уравн. $F_n=o$ находящагося гдѣ-то въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ до $(n+2)\frac{\pi}{2}$, или въ промежуткѣ отъ $(n+3)\frac{\pi}{2}$ до второго корня уравн. $F_n=o$ находящагося гдѣ-то въ $(n+4)$-омъ квадрантѣ или въ промежуткѣ отъ $(n+2)\frac{\pi}{2}$ до $(n+3)\frac{\pi}{2}$, т. е. въ $(n+3)$-емъ квадр.

Притомъ, какъ это было доказано [1]), между двумя корнями уравненія $F_n=o$ находится только одинъ корень уравненія $F_{n+1}+o$.

Согласно нашему предположенію во всемъ этомъ промежуткѣ полиномы: X_{n-1}, X'_{n+1}, X_n, X'_n, всѣ уже постоянно имѣютъ тотъ-же самый знакъ, ибо x^2 больше всѣхъ корней

[1]) См. прим. на концѣ.

этихъ полиномовъ. Изъ уравненій XII видно, что въ данномъ случаѣ, когда $n=2i$ (четно)

$$\left.\begin{array}{ll} X_{n-1}=(-1)^{i-1}\,\xi_{n-1}, & X'_{n-1}=(-1)^{i-1}\,\xi'_{n-1}, \\ X_n\;=(-1)^i\quad\xi_n, & X'_n\;=(-1)^{i-1}\,\xi'_n, \end{array}\right\}\ \text{XIII}$$

гдѣ ξ_n, ξ'_n, ξ_{n-1}, ξ'_{n-1} суть существенно положительныя, но впрочемъ измѣняющіяся вмѣстѣ съ перемѣнной: x величины.

Съ другой стороны, сравнивая формулу: III, въ которой вмѣсто F_n напишемъ: $x^{-1/2}J_{n+1/2}$, съ извѣстной формулой:

$$m\,J_m=\frac{x}{2}\left[\,J_{m-1}+J_{m+1}\,\right]$$

въ которой, вмѣсто m напишемъ $n+1/2$ [1]), сейчасъ найдемъ, что:

$$\left.\begin{array}{l} X_{n+1}=(2n+1)\,X_n-x^2\,X_{n-1} \\ X'_{n+1}=(2n+1)\,X'_n-x^2\,X'_{n-1} \end{array}\right\}\ \text{XIV}$$

Изъ формулъ: XIII и XIV находимъ, что:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}=\frac{x^2\,\xi_{n-1}+(2n+1)\,\xi_n}{x^2\,\xi'_{n-1}-(2n+1)\,\xi'_n}$$

Итакъ во всемъ интересующемъ насъ промежуткѣ и дальше его частное:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

можетъ измѣнить знакъ, только одинъ единственный разъ, притомъ проходя черезъ безконечность (когда n нечетно, то это частное въ послѣдній разъ мѣняетъ знакъ проходя черезъ значеніе 0).

---

[1]) *Примѣчаніе.* Это дозволительно, ибо только что приведенная формула справедлива для всякаго положительнаго m.

Посмотримъ, можетъ-ли корень уравненія: $F_{n+1}=o$, находиться въ промежуткѣ отъ: $F_n=o$, до $(n+2)\frac{\pi}{2}$.

Мы уже прежде доказали, что вблизи точки: $x=o$.

$$F_{n+1} > o.$$

Но по формулѣ III:

$$F_{n+1}=Cx^{-n-2}X'_{n+1}\sin x\left\{\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}-\cot g x\right\}$$

$$X'_{n+1}=x\left[1-A_3\frac{x^2}{3!}+A_5\frac{x^4}{5!}-\ldots\right]$$

слѣдовательно для $x=o$, полиномъ въ скобкахъ равенъ единицѣ, а вблизи этой точки онъ положительный. И такъ вблизи, $x=o$

$$X'_{n+1} > o$$

но и

$$\sin x > o$$

слѣдовательно вблизи $x=o$ должно быть:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}-\cot g x > o.$$

Это значитъ, что вблизи $x=o$, кривая: $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ идетъ выше кривой котангенсовъ. Но, чтобы не пересѣчься нигдѣ съ кривой котангенсовъ до самой точки $F_n=o$, кривая: $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ должна непремѣнно постоянно идти выше кривой контангесовъ. Она можетъ это сдѣлать переходя черезъ нуль при значеніяхъ

$$x=\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1,\ \frac{3\pi}{2}+\varepsilon_2,\ \frac{5\pi}{2}+\varepsilon_3-\ldots\ldots$$

а черезъ безконечность при значеніяхъ

$$x=\pi+\eta_1,\ 2\pi+\eta_2,\ldots\ldots$$

Она должна такимъ образомъ перейти черезъ безконечность ровно $(i-1)$ разъ, ни больше ни меньше [1]). Вмѣстѣ съ тѣмъ замѣчаемъ, что еслибы который нибудь изъ полиномовъ X_{n+1} и X'_{n+1} имѣлъ многократный корень, то кривая $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ непремѣнно пересѣклась-бы съ $cotgx$ раньше чѣмъ F_n дѣлается въ первый разъ равно нулю, а это невозможно. Въ тотъ моментъ когда $F_n=o$, кривая: $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ уже совершила всѣ перемѣны знаковъ кромѣ послѣдняго i-таго перехода сквозь безконечность изъ отрицательныхъ значеній въ положительныя. До сихъ поръ она шла постоянно выше котангенса, слѣдовательно и въ точкѣ, гдѣ $F_n=o$ она идетъ выше котангенса т. е. въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ она идетъ выше котангенса. На всемъ промежуткѣ отъ перваго корня уравненія: $F_n=o$ до второго корня этого уравненія она можетъ только разъ пересѣкаться съ котангенсомъ. Положимъ что въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ она пересѣкаетъ его разъ; но тогда она перейдетъ сквозь безконечность еще въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ. Если-бы не перешла въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ, то, такъ какъ $cotgx$ въ концѣ этого квадранта дѣлается безконечнымъ, она должна-бы съ нимъ пересѣчься второй разъ, что невозможно. Опять, переходя изъ $-\infty$ въ $+\infty$ еще въ $(n+2)$-омъ квадрантѣ она въ $(n+3)$-емъ сразу будетъ имѣть конечныя значенія, а не имѣя возможности болѣе измѣнить знака, останется постоянно положительной.

---

[1]) Для уразумѣнія этого совѣтуемъ составить соотвѣтственную діаграмму. Особенно наглядно представляется видъ обѣихъ кривыхъ если вообразить себѣ что точки $+\infty$ и $-\infty$ соединены напр. на кругахъ безконечнаго радіуса.

Но въ $(n+3)$-емъ квадрантѣ $cotgx$ переходитъ отъ $+\infty$ до 0 слѣдовательно непремѣнно будетъ второе пересѣченіе обѣихъ кривыхъ, что невозможно.

И такъ въ промежуткѣ отъ точки $F_n=o$ до $(n+2)\frac{\pi}{2}$ не можетъ быть корня уравненія: $F_{n+1}=o$.

Разсмотримъ теперь промежутокъ отъ точки $(n+3)\frac{\pi}{2}$ до второго корня $F_n=o$. Возьмемъ формулу I т. е.

$$F_n=x^{-1/2}\,J_{n+1/2}$$

и сравнимъ ее съ извѣстной формулой:

$$J_{m+1}=\frac{2m}{x}J_m-J_{m-1}$$

для $m=n+\frac{1}{2}$. Тогда сейчасъ найдемъ:

$$F_{n+1}=\frac{2n+1}{x}F_n-F_{n-1}\,. \qquad \text{XV}$$

Наше изслѣдованіе происходитъ въ области положительныхъ значеній перемѣнной x, но тогда, очевидно: F_{n+1} обращается въ нуль только тогда, когда: F_n и F_{n+1} одного знака. Но F_n въ этомъ промежуткѣ постоянно отрицательно. F_{n+1} напротивъ того положительно, ибо между вторымъ корнемъ въ $(n+3)$-емъ квадрантѣ и 3-имъ въ $(n+5)$-омъ оно положительно. *Слѣдовательно въ промежуткѣ отъ $(n+3)\frac{\pi}{2}$, до второго корня уравн. $F_n=o$ не можетъ быть корня уравненія: $F_{n+1}=o$.*

И такъ этотъ первый корень можетъ быть и непремѣнно будетъ между точками $(n+2)\frac{\pi}{2}$ и *$(n+3)\frac{\pi}{2}$ т. е.*

въ $(n+3)$*-емъ квадрантѣ нѣсколько раньше точки, гдѣ* F_{n-1} *дѣлается второй разъ равнымъ нулю.*

Въ завершеніе доказательства разсмотримъ функціи F_0, F_1 и F_2. «Habitus» функціи F_0 нѣсколько иной, какъ остальныхъ.

По формулѣ III.

$$F_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot x^{-1}\sin x$$

слѣдовательно корни уравненія: $F_0=o$, будутъ:

$$\pi,\ 2\pi,\ 3\pi\ldots\ldots n\pi\ldots\ldots\ldots$$

т. е. въ четныхъ квадрантахъ на самой границѣ съ нечетными

$$F_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot x^{-2}(\sin x - x\cos x).$$

Корни уравненія: $F_1=o$ будутъ тѣ-же самые, что уравненія:

$$\frac{1}{x}-\cot g x=o.$$

Они будутъ абсциссами тѣхъ точекъ, въ которыхъ равнобочная гипербола: $yx=1$ пересѣкается съ кривой котангенсовъ.

Но въ первомъ и второмъ квадрантахъ:

$$\cot g x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\ldots-\frac{2^{2n}B_n x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n}{}^{1)}-\ldots$$

Изъ этого слѣдуетъ что разность

$$\frac{1}{x}-\cot g x$$

[1]) B_n есть n-тое число Бернуйли.

постоянно положительна отъ o до π. Частное: $\frac{X_1}{X_1'} = \frac{1}{x}$ въ первый и послѣдній разъ мѣняло знакъ въ точкѣ $x = o$. Первый корень уравненія $F_1(x) = o$ находится значительно дальше. Гипербола идетъ асимптотически къ оси x-овъ и выше ея. И такъ $ctgx$ пересѣчетъ ее въ 3-емъ, 5-омъ, вообще во всѣхъ нечетныхъ квадрантахъ, начиная съ 3-аго.

$$F_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-3}\, [(3 - x^2)\, sinx - 3x.\, cosx].$$

Корни уравненія $F_2 = o$ тѣ-же что уравненія:

$$\frac{3 - x^2}{3x} - cotgx = o,$$

$$\frac{X_2}{X_2'} = \frac{3 - x^2}{3x}.$$

Это частное мѣняетъ знакъ переходя черезъ безконечность при $x = o$, черезъ нуль при $x = \sqrt{3}$.

Слѣдовательно первый корень долженъ находиться дальше точки $x = \sqrt{3}$, притомъ долженъ находиться только въ 4-омъ квадрантѣ.

Въ первомъ и второмъ квадрантѣ имѣемъ:

$$\frac{3 - x^2}{3x} - cotgx = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \left\{\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \dots \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{1.2 \dots 2n} - \dots\right.$$

Эта разность положительна отъ o до π. Въ третьемъ квадрантѣ котангенсъ положительный, а кривая: $\frac{3 - x^2}{3x}$ отрицательная. Начиная съ точки $x = \sqrt{3}$, она постоянно отрицательна. Ординаты ея пока x конечно имѣютъ конечныя зна-

ченія. Слѣдовательно котангенсъ будетъ пересѣкаться съ этой кривой въ 4-омъ, 6-омъ и прочихъ четныхъ квадрантахъ.

Кривая $y=\frac{3-x^2}{3x}$ есть неравнобочная гипербола, ея асимптоты, прямыя: $x=o$ и $y+3x=o$.

На основаніи сказаннаго можно доказать, что F_3 имѣетъ первый корень въ 5-омъ, а дальнѣйшіе въ 7, 9.... и т. д. квадрантахъ. Потомъ, что F_4 имѣетъ корни въ 6, 8 и т. д. квадрантахъ.

Резюмируя сказанное можемъ сдѣлать слѣдующее заключеніе.

Корни уравненія:

$$F_n(x)=o \quad \text{или} \quad J_{n+{}^1/_2}=o$$

гдѣ $$n=1,\ 2,\ 3\ldots.$$

находятся по одному въ $(n+2)$*-омъ*, $(n+4)$*-омъ, вообще въ* $(n+2i)$*-омъ квадрантѣ, гдѣ* $i=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots$

Что и требуется доказать.

Надъ аналитическими слѣдствіями этой теоремы не будетъ здѣсь распространяться.

Примѣчаніе.

При переписываніи, доказательство, что корни уравненія:

$$\varphi_{m+1}=o$$

находятся между корнями уравненія:

$$\varphi_m=o$$

было случайно пропущено.

Это доказательство дѣлается помощью формулъ: VII и VIII. Дѣйствительно, изъ формулы: VIII видно, что функція: φ_{m+1} дѣлается равна нулю вмѣстѣ съ производной по θ отъ функціи: φ_m. Слѣдовательно между двумя корнями уравненія:

$$\varphi_m = 0$$

находится по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія:

$$\varphi_{m+1} = 0.$$

Нетрудно доказать, что въ этомъ промежуткѣ находится только одинъ корень. Дѣйствительно, если въ этомъ промежуткѣ φ_{m+1} мѣняетъ знакъ k разъ, то φ_{m+2} т. е. φ''_m мѣняетъ его по крайней мѣрѣ $k-1$ разъ. Но изъ перваго изъ уравненій VII слѣдуетъ, что, когда φ_{m+1} равно нулю, то φ_m и φ_{m+2} имѣютъ противуположные знаки, слѣдовательно φ_m должно тоже мѣнять знакъ $k-1$ разъ, но φ_m во всемъ разсматриваемомъ промежуткѣ не мѣняетъ знака. Оно мѣняетъ знакъ только на концахъ промежутка, но корни обѣихъ функцій различны.

Слѣдовательно:

$$k = 1.$$

Что и требуется доказать.

Изъ области геометріи и механики.

Д. Н. Зейлигера.

Aus dem Gebiet der Geometrie und Mechanik.

von D. N. Seiliger.

ВВЕДЕНІЕ.

Статьи, помѣщенныя здѣсь, написаны втеченіи текущаго года. Только первыя двѣ написаны, одна въ 1887, другая въ 1888 г. Напечатаніе ихъ теперь вызвано тѣмъ соображеніемъ, что интереса новизны онѣ не потеряли, такъ какъ до сихъ поръ, насколько намъ извѣстно, въ литературѣ не появлялось статей по тѣмъ-же вопросамъ. Относительно всѣхъ статей можно сдѣлать общее замѣчаніе. Каждая изъ нихъ была въ свое время предметомъ отдѣльнаго доклада Новороссійскому Обществу Естествоиспытателей. Лишь извлеченія изъ этихъ рефератовъ вошли въ настоящій сборникъ. Это объясняется различіемъ въ требованіяхъ, предъявляемыхъ стному и письменному изложенію предмета, а также желаніемъ дать лишь тѣ результаты нашихъ изслѣдованій, которые мы сочли наиболѣе важными.



I. О кривизнѣ плоскихъ исогоналей.

На плоскости данъ рядъ кривыхъ α, $\alpha,'$..., непрерывно слѣдующихъ одна за другой по какому-нибудь опредѣленному закону. На одной изъ кривыхъ α. берется точка A, чрезъ которую проводятъ исогонали β ко всѣмъ кривымъ α. Такимъ образомъ точка A оказывается вершиной криволинейнаго пучка β. Является вопросъ, какъ распредѣлены центры кривизны въ точкѣ A отдѣльныхъ кривыхъ пучка β?

1. Пусть A'—точка, въ которой какая-нибудь исогональ β встрѣчаетъ смежную съ α кривую α', AB и $A'B'$—касательныя въ A и A' къ кривой β, AO и $A'O$—касательныя въ тѣхъ-же точкахъ къ кривымъ α и α', K—точка пересѣченія первыхъ двухъ прямыхъ. (Ч. I.).

По опредѣленію,

$$\angle OAB = \angle OA'B';$$

слѣдовательно, вокругъ четыреугольника $AKA'O$ можетъ быть описана окружность, откуда

$$\angle AOA' = \angle BKB',$$

т. е. *уголъ между касательными въ A и A' къ смежнымъ кривымъ α и α' равенъ углу смежности въ A исогонали β.*

2. Пусть теперь α и α'—двѣ смежныя кривыя ряда α, AA' и AA''—элементы исогонали и ортогонали ряда, $A'O'$ и $A''O''$—касательныя въ A' и A'' къ кривой α', встрѣчающія

касательную въ A къ кривой α въ точкахъ O' и O'' соотвѣтственно; к—точка встрѣчи прямыхъ $A'O'$ и $A''O''$. (Ч.2.). Положимъ для краткости:

$$\angle AO'A'=m,\ \angle AO''A''=n,\ \angle O'KO''=p,$$

Треугольникъ $O'KO''$ даетъ:

$$1)\ m=n+p.$$

Но углы m и n равны, по предыдущему, угламъ смежности въ A исогонали и ортогонали; слѣдовательно,

$$2)\ m=\frac{AA'}{R},\ n=\frac{AA''}{R_2},$$

гдѣ R и R_2—радіусы кривизны въ A этихъ кривыхъ. Кромѣ того, такъ какъ прямыя $A'O'$ и $A''O''$ суть смежныя касательныя къ кривой α', то

$$3)\ p=\frac{A'A''}{R_1'},$$

изъ R_1'—радіусъ кривизны въ A'' кривой α'. Но изъ треугольника $AA'A''$, уголъ котораго при A'' равенъ прямому, слѣдуетъ:

$$4)\ A'A''=AA'sn\mu,\ AA''=AA'cs\mu,$$

гдѣ μ—уголъ между элементами AA' и AA''. Замѣчая, что въ предѣлѣ кривая α' совпадаетъ съ α и, слѣдовательно, предѣломъ для R_1' служитъ радіусъ R_1 кривизны кривой α въ A, находимъ въ силу 1), 2), 3) и 4):

$$A)\ \frac{I}{R}=\frac{sn\mu}{R_1}+\frac{cs\mu}{R_2}$$

Полученная формула легко можетъ быть выражена словами. Ее не трудно также истолковать геометрически. Для этого построимъ центръ M кривизны въ A исогонали AA'. Замѣтимъ, что

$$\angle MAO' = \angle A'AA'' = \mu, \quad AM = R.$$

Если за оси координатъ примемъ касательную AO' и нормаль AP кривой α, то для координатъ x и y точки M найдемъ:

$$x = R cs\mu, \quad y = R sn\mu.$$

Слѣдовательно, формула $A)$ можетъ быть приведена къ виду:

$$1 = \frac{x}{R_2} + \frac{y}{R_1},$$

что даетъ намъ слѣдующую теорему:

Теорема I. Центры кривизны отдѣльныхъ кривыхъ пучка исогоналей β къ системѣ плоскихъ кривыхъ α, соотвѣтствующіе вершинѣ пучка, лежатъ на прямой. Эту прямую назовемъ *централой* точки A.

Теорема II. Централа точки A проходитъ чрезъ центры кривизны въ A кривой α и ортогонали къ системѣ α.

Доказанныя теоремы заключаютъ въ себѣ полный отвѣтъ на вопросъ, поставленный въ началѣ статьи. Мы видимъ, что достаточно знать двѣ точки централы для того, чтобы построить центръ кривизны любой кривой пучка исогоналей. Дадимъ одно приложеніе.

Приложеніе. Требуется построить центръ кривизны въ какой-нибудь точкѣ A логариѳмической спирали. Извѣстно, что логариѳмическая спираль встрѣчаетъ подъ однимъ и тѣмъ-же угломъ радіусы-векторы, выходящіе изъ полюса O спирали. Со-

вокупность этихъ радіусовъ мы можемъ считать системой кривыхъ α. Система ортогоналей къ послѣдней извѣстна: это—система окружностей, общимъ центромъ которыхъ служитъ точка O. Такъ какъ въ данномъ случаѣ кривой α служитъ прямая OA, то центръ ея кривизны въ A лежитъ въ безконечности на перпендикулярѣ въ A къ AO. Слѣдовательно, централой точки A будетъ перпендикуляръ OB, возставленный къ OA въ O. Центръ кривизны M спирали лежитъ, слѣдовательно, на пересѣченіи нормали въ A къ спирали съ прямой OB.

Мы пришли такимъ образомъ къ давно извѣстному построенію.

Сентябрь 1887 г.

II. О кривизнѣ поверхностей.

Въ настоящей статьѣ мы намѣрены изслѣдовать распредѣленіе въ пространствѣ центровъ кривизны сѣченій данной поверхности (S) различными плоскостями, проходящими чрезъ одну и ту же точку S поверхности. Этотъ вопросъ легко рѣшается на основаніи результатовъ Эйлера и Менье.

Пусть SN—нормаль къ поверхности, NSX и NSI—плоскости главныхъ сѣченій, пересѣкающія по прямымъ SX и SI касательную плоскость къ поверхности въ точкѣ S, OSC—произвольное сѣченіе поверхности, плоскость котораго пересѣкаетъ касательную плоскость по прямой SC, O — центръ кривизны въ S полученнаго сѣченія. (Ч. 3.).

По теоремѣ Менье точка O есть проекція на плоскость OSC центра кривизны N нормальнаго сѣченія NSC. Полагая:

$$SN=R,\ SO=\rho,\ \angle NSO=\delta,\ \angle CSX=\varphi.$$

найдемъ, слѣдовательно:

$$\rho=R cs\delta.$$

Но по теоремѣ Эйлера

$$\frac{1}{R}=\frac{cs^2\varphi}{R_1}+\frac{sn^2\varphi}{R_2}$$

гдѣ R_1 и R_2—главные радіусы кривизны, откуда

$$\alpha)\quad \frac{cs\delta}{\rho}=\frac{cs^2\varphi}{R_1}+\frac{sn^2\varphi}{R_2}.$$

Если мы примемъ за оси координатъ прямыя SX, SI и SN, то для координатъ x, y и z точки O легко найдемъ:

$$x=\rho sn\delta sn\varphi,\quad y=-\rho sn\delta cs\varphi,\quad z=\rho cs\delta.$$

Эти формулы даютъ:

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2;\frac{x^2}{R_2}+\frac{y^2}{R_1}=\rho^2 sn^2\delta\left(\frac{cs^2\varphi}{R_1}+\frac{sn^2\varphi}{R_2}\right);\quad x^2+y^2=\rho^2 sn^2\delta$$

Отсюда вытекаетъ:

$$\left(\frac{x^2}{R_2}+\frac{y^2}{R_1}\right)\ (x^2+y^2+z^2)=\rho^4 sn^2\delta\left(\frac{cs^2\varphi}{R_1}+\frac{sn^2\varphi}{R_2}\right)=\rho^3 sn^2\delta cs\delta,$$

въ силу α). Пользуясь формулами:

$$z=\rho cs\delta, x^2+y^2=\rho^2 sn^2\delta,$$

получимъ окончательно:

$$\left(\frac{x^2}{R_2}+\frac{y^2}{R_1}\right)\ (x^2+y^2+z^2)=z(x^2+y^2)$$

Это уравненіе даетъ намъ теорему:

Теорема. Центры кривизны плоскихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ одну и ту-же точку S поверхности (S), лежатъ на поверхности четвертаго порядка. Эта поверхность имѣетъ тройную точку въ S и двойную прямую, совпадающую съ нормалью въ S къ поверхности (S).

Сентябрь 1888 г.

III. Объ одной теоремѣ элементарной геометріи.

Пусть a и b — двѣ прямыхъ въ пространствѣ (ч. 4). Чрезъ произвольную точку B второй прямой проведемъ плоскость (a, B) и возставимъ къ послѣдней перпендикуляръ BB_1, равный разстоянію BA точки B отъ прямой a. Сдѣлаемъ тоже построеніе для всѣхъ точекъ прямой b, при чемъ перпендикуляры BB_1 будемъ проводить въ одну и ту-же сторону отъ соотвѣтствующихъ плоскостей (a, B). Если условимся отрѣзки BB_1 называть *моментами* точекъ B относительно прямой a, то теорема, которую мы намѣрены доказать, можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ:

Теорема I. Проекціи на прямую b моментовъ ея точекъ относительно другой прямой одинаковы.

Доказательство. Пусть $\alpha\beta = b$ — прямая, по которой измѣряется кратчайшее разстояніе прямыхъ a и b. Проведемъ прямую βB_2 равную и параллельную αA и соединимъ B_2 съ B и A. Такъ какъ фигура $\alpha\beta AB_2$ — параллелограммъ, то

$$AB_2 \mathrel{\overline{\overline{\|}}} \alpha\beta.$$

Но $\alpha\beta$ перпендикулярна къ $A\alpha$; слѣдовательно, къ той-же прямой перпендикулярна и AB_2. Отсюда мы заключаемъ, что прямая $A\alpha$ перпендикулярна къ плоскости ABB_2, такъ какъ она перпендикулярна къ двумъ прямымъ AB_2 и AB послѣдней. Отсюда-же вытекаетъ, что взаимно-перпендикулярны пло-

скости (a, B) и ABB_2, такъ какъ первая проходитъ чрезъ перпендикуляръ ко второй. Но отрѣзокъ BB_1 перпендикуляренъ къ плоскости (a, B); слѣдовательно, онъ лежитъ въ плоскости треугольника ABB_2. Замѣтимъ, кромѣ того, что прямая AB_2, параллельная $\alpha\beta$, перпендикулярна къ плоскости $\beta B_2 B$, откуда

$$\angle AB_2 B = 90^0.$$

Опустимъ изъ B_1 перпендикуляръ $B_1\beta_1$ на BB_2. По извѣстной теоремѣ, проекція BB_1 на прямую b равна суммѣ проекцій на ту-же прямую прямыхъ $B\beta_1$ и $\beta_1 B_1$. Но прямыя AB_2 и $\beta_1 B_1$, лежащія въ одной и той-же плоскости и перпендикулярныя къ прямой B_2B, параллельны между собой.

Такъ какъ первая изъ этихъ прямыхъ AB_1, по предыдущему, перпендикулярна къ плоскости $\beta\ B_2B$, то-же имѣетъ мѣсто и для второй $\beta_1 B_1$. Слѣдовательно, $\beta_1 B_1$ перпендикулярна къ прямой b, лежащей въ плоскости $\beta B_2 B$. Но въ такомъ случаѣ проекція прямой $\beta_1 B_1$ на b равна нулю, откуда

$$\text{пр. } BB_1 = \text{пр. } B\beta_1.$$

Прямоугольные треугольники ABB_2 и $\beta_1\ BB_1$ равны, такъ какъ равны ихъ гипотенузы AB и B_1B_1, а уголъ B_2AB одного равенъ углу $\beta_1 BB_1$ другого, такъ какъ каждый изъ этихъ угловъ служитъ дополненіемъ до прямого угла ABB_2.

И такъ

$$B\beta_1 = AB_2 = \alpha\beta = d.$$

Обозначая, кромѣ того, уголъ между прямыми a и b чрезъ φ находимъ

$$\angle \beta_1 B\beta = 90 - \varphi.$$

слѣдовательно,

$$\text{пр. } BB_1 = dsn\varphi. \quad Q. \ E. \ D.$$

Мы нашли такимъ образомъ, что проекція на прямую b момента всякой точки послѣдней относительно прямой a измѣряется произведеніемъ изъ кратчайшаго разстоянія d обѣихъ прямыхъ на sn угла между ними. Это произведеніе давно уже называется относительнымъ моментомъ прямыхъ a и b. Слѣдовательно, доказанную теорему нужно дополнить слѣдующей:

Теорема II. Общая величина проекціи на прямую b моментовъ ея точекъ относительно прямой a равна относительному моменту прямыхъ a и b.

Примѣчаніе. Теоремы I и II въ томъ видѣ, какъ мы ихъ дали, входятъ въ область чистой геометріи. Онѣ имѣютъ огромное значеніе для теоретической механики. Такъ, мной было показано въ январьскомъ засѣданіи мѣстнаго Общества естествоиспытателей, что изъ этихъ теоремъ вытекаетъ вся кинематика твердаго тѣла, включая въ нее и теорію винтовъ Ball'я. (*).

Здѣсь я ограничусь замѣчаніемъ, что, на сколько мнѣ извѣстно, выдѣленіе изъ механики интересующихъ насъ теоремъ сдѣлано впервые здѣсь.

Январь 1891 г.

IV. О преобразованіи паръ вращенія.

Мы назвали парой вращенія совокупность двухъ векторовъ P_A и P_B, равныхъ, параллельныхъ и прямопротивоположныхъ, причемъ прямая AB перпендикулярна къ общему направ-

(*) Рефератъ «Геометрическая теорія винтовъ».

ленію векторовъ (*). AB—плечо пары, произведеніе $P. AB$—моментъ пары. Дадимъ здѣсь новое доказательство слѣдующей основной теоремы.

Теорема. Двѣ пары, лежащія въ одной и той-же плоскости и имѣющія одинаковые моменты, эквивалентны.

При доказательствѣ будемъ пользоваться всѣми обозначеніями указаннаго труда.

Пусть P_A,P_B—слагающіе векторы пары, LM и KN—двѣ параллели, пересѣкающія прямыя, на которыхъ лежатъ векторы пары въ точка K, L, M и N соотвѣтственно (ч. 5). Фигура $KLMN$ есть параллелограммъ. Продолжимъ діагональ KM послѣдняго до встрѣчи въ O съ продолженіемъ плеча AB пары и опустимъ перпендикуляръ OST на параллели LM и KN. Приложимъ вдоль послѣднихъ 4 равныхъ вектора Q'_S, Q''_S, Q'''_T и $Q^{IV}_{T,}$, общая величина которыхъ Q опредѣляется изъ условія:

$$Q.\ ST = P.\ AB.$$

Откуда

$$\frac{P}{Q} = \frac{ST}{AB}.$$

Построенная фигура даетъ:

$$ST : SO : TO = AB : BO : AO;$$

слѣдовательно,

$$a)\quad \frac{P}{Q} = \frac{SO}{BO} = \frac{TO}{AO}.$$

(*) Механика подобно измѣняемой системы. Вып. I, Гл. VI.

Четыре точки M, B, O и S лежатъ на одной окружности. Отсюда въ силу α) заключаемъ, что совокупность векторовъ P_B и Q''_S эквивалентна одному вектору R_0, лежащему на линіи KMO и имѣющему начало въ O. R — геометрическая сумма векторовъ P_B и Q''_S (*).

Точно также мы убѣдимся, что совокупность векторовъ P_A и Q'''_T эквивалентна вектору R_0', начало котораго также совпадаетъ съ O, причемъ векторъ тоже лежитъ на прямой KMO. R'—геометрическая сумма векторовъ P_A и Q'''_T. Замѣчая, что слагающіе вектора R_0 равны и прямопротивоположны слагающимъ вектора R'_0, мы заключаемъ, что векторы R_0 и R'_0 отличаются другъ отъ друга только сторонами, откуда,

$$R_0 + R'_0 \equiv o.$$

Но

$$P_A + P_B \equiv P_A + P_B + Q'_S + Q''_S + Q'''_T + Q^{IV}_T,$$

и

слѣдовательно

$$P_A + P_B \equiv Q'_S + Q^{IV}_T.$$

Но векторъ Q'_S и Q^{IV}_T образуютъ, по опредѣленію, пару-вращенія, моментъ которой $Q.\ ST$ равенъ, по предыдущему, моменту $P.\ AB$ пары $(P,\ AB)$. $Q.\ E.\ D.$

Февраль 1891 г.

V. Кинематика подобно-измѣняемой фигуры.

1. Подобно-измѣняемой называется такая система точекъ, послѣдовательныя положенія которой представляютъ рядъ подобныхъ фигуръ. Въ настоящей статьѣ мы познакомимъ съ ре-

---

(*) Вып. I, гл. V. теор. VII. 1. с.

зультатами нашихъ изслѣдованій въ области кинематики такой системы.

Движенія всякой измѣняемой системы бываютъ двухъ родовъ. Къ первому относятся такія движенія, при которыхъ система не испытываетъ деформаціи. Система, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ движется, какъ твердое тѣло. Ко второму роду относятся движенія, при которыхъ система деформируется. Эти движенія различны для различныхъ системъ и могутъ служить кинематическимъ опредѣленіемъ послѣднихъ. Такимъ движеніемъ, характернымъ для подобно-измѣняемой системы, слѣдуетъ считать *лучистое растяженіе.* Этимъ именемъ мы предложили назвать (*) такое движеніе системы, при которомъ одна ея точка O—неподвижна, а остальныя точки α переходятъ по *лучамъ* $O\alpha=\rho_a$ въ новыя положенія α'. O—центръ растяженія, отношеніе $\frac{\alpha\alpha'}{O\alpha}=p$—постоянное для всѣхъ точекъ системы—растяженіемъ послѣдней. Растяженіе—положительно, если направленія $O\alpha$ и $\alpha\alpha'$ совпадаютъ; оно отрицательно въ противномъ случаѣ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ изучать лишь элементарныя растяженія. Полагая, слѣдовательно,

$$\alpha\alpha'=v_\alpha dt,\ \ p=edt,$$

найдемъ:

$$A)\ \ v_\alpha=\rho_\alpha e;$$

здѣсь e—коэффиціентъ элементарнаго рястяженія. На основаніи вышесказаннаго, если e—положительно, то скорость v_α имѣетъ направленіе $O\alpha$; въ противномъ случаѣ направленіе скорости v_α совпадаетъ съ αO.

(*) Мех. под. изм. системы В. Ш, стр. 86—87.

Полученная формула даетъ намъ слѣдующую теорему:

Теорема I. При элементарномъ лучистомъ растяжeніи равна нулю лишь скорость центра растяженія; скорости остальныхъ точекъ пропорціональны разстояніямъ послѣднихъ отъ центра.

Пусть (ч. 6) O, α_1 α_2—центръ растяженія e и двѣ точки системы. Разложимъ v_{α_1}, по линіи $\alpha_1\alpha_2$ и параллельно $O\alpha_2$. Если v' и v''—эти слагающія, то очевидно,

$$\frac{v'}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{v''}{O\alpha_2}=\frac{v_{\alpha_1}}{\rho_\alpha}=e,$$

въ силу формулы A). Слѣдовательно,

$$v'=\alpha_1\alpha_2.\ e,\ v''=O\alpha_2.\ e=v_{\alpha_2},$$

въ силу той же формулы A). Полученныя формулы показываютъ, что скорость v_{α_1} точки α_1 складывается изъ двухъ скоростей. Изъ нихъ первой точка α_1 обладала бы въ томъ случаѣ, если бы центромъ растяженія e служила точка α_2; вторая —одинакова для всѣхъ точекъ α_1 и равна скорости точки α_2

Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема II. Лучистое растяженіе e вокругъ центра O можетъ быть замѣнено лучистымъ растяженіемъ e вокругъ новаго центра α_2, если въ тоже время всѣмъ точкамъ системы придать скорость v_{α_2} новаго центра, которой онъ обладалъ въ силу растяженія вокругъ O.

Мы будемъ говорить, что растяженіе вокругъ O перенесено въ точку α_2. На основаніи предыдущаго можно сказать, что переносъ растяженія изъ одного центра въ другой вызываетъ поступательную скорость, равную скорости втораго центра при первомъ растяженіи.

Прежде, чѣмъ перейти къ дальнѣйшимъ изслѣдованіямъ, отмѣтимъ слѣдующія, очевидныя теоремы:

Теорема III. Совокупность двухъ растяженій, имѣющихъ общій центръ, эквивалентна нулю (покою), если коэффиціенты растяженій отличаются только знаками.

Теорема IV. Совокупность произвольнаго числа растяженій e_1, $e_2 \ldots$, имѣющихъ общій центръ, эквивалентна одному растяженію съ тѣмъ же центромъ. Коэффиціентъ результирующаго растяженія равенъ алгебрической суммѣ коэффиціентовъ слагающихъ растяженій.

Положимъ теперь, что система испытываетъ одновременно ва растяженія, e_1 и e_2 вокругъ центровъ A и B (ч. 7). Произвольная точка C прямой AB обладаетъ въ силу обоихъ движеній двумя скоростями v' и v'', опредѣляемыми формулами:

$$v' = AC.\ e_1,\ v'' = BC.\ e_2.$$

Допустимъ, что величины e_1 и e_2 одинаковаго знака. Въ этомъ случаѣ скорости v' и v'' будутъ направлены въ противоположныя стороны лишь для точекъ C отрѣзка AB и на послѣднемъ всегда найдется такая точка C_1, для которой

$$v' = v'',$$

т. е. эта точка останется въ покоѣ. Послѣднему условію можно дать видъ:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{e_2}{e_1}.$$

Перенесемъ теперь растяженія въ A и B въ точку C_1. На основаніи предыдущаго получимъ въ точкѣ C_1 два растяженія e_1 и e_2 и поступательныя скорости v' и v''. Совокупность первыхъ двухъ движеній эквивалентна, по предыдущему. растяженію въ C_1, коэффиціентъ ε котораго равенъ:

$$\varepsilon = e_1 + e_2.$$

Совокупность вторыхъ двухъ движенiй эквивалентна нулю, такъ какъ скорости v' и v'' равны и прямопротивоположны.

Если бы знаки коэффицiентовъ e_1 и e_2 были различны, то это отразилось бы лишь на положенiи точки C_1. Легко видѣть, что, если только не имѣетъ мѣсто равенство:

$$e_1 + e_2 = o.$$

то точка C_1 лежитъ внѣ отрѣзка AB, ближе къ тому центру, которому соотвѣтствуетъ наибольшiй по абсолютной величинѣ коэффицiентъ e_1 или e_2, при чемъ снова

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{AC}{BC}.$$

Если

$$e_1 + e_2 = o,$$

то точка C_1 удаляется въ безконечность.

Все вышесказанное даетъ намъ:

Теорема V. Совокупность двухъ растяженiй e_1 и e_2 вокругъ центровъ A и B эквивалентна одному растяженiю ε вокругъ третьяго центра C_1; коэффицiентъ ε результирующаго растяженiя равенъ алгебрической суммѣ коэффицiентовъ слагающихъ движенiй, а центръ C_1 лежитъ на прямой AB и дѣлитъ ее внутренне или внѣшне въ обратномъ отношенiи коэффицiентовъ e_1 и e_2 складываемыхъ движенiй. Первое имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, если величины e_1 и e_2 одинаковаго знака; второе—въ противномъ случаѣ. Если величины e_1 и e_2 отличаются только знаками, то совокупность соотвѣтствующихъ растяженiй нельзя замѣнить однимъ растяженiемъ.

Назовемъ *парой* совокупность двухъ растяженiй вокругъ не совпадающихъ центровъ A и B, когда коеффицiенты e_1 и e_2 отличаютси только знаками; отрѣзокъ $AB = d$—плечо пары;

произведеніе $d. e$ плеча на общую величину коэффиціентовъ—моментъ пары.

Теорема VI. Пара эквивалентна поступательному движенію, скорость котораго равна моменту пары, параллельна плечу пары и направлена отъ центра положительнаго растяженія къ центру отрицательнаго.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, пусть A и B—центры положительнаго и отрицательнаго растяженій соотвѣтственно, P—какая-нибудь точка системы (ч. 8). Эта точка обладаетъ въ силу обоихъ движеній скоростями Pa—Pb, изъ которыхъ первая направлена отъ A къ P, вторая—отъ P къ B, причемъ

$$Pa=AP.\ e,\ Pb=BP.\ e.$$

гдѣ e—абсолютная величина коэффиціентовъ обоихъ движеній.

Складывая эти скорости въ одну Pp, легко найдемъ, что треугольники APB и Pap подобны, откуда

$$Pp \parallel AB \text{ и } \frac{Pp}{AB}=\frac{Pa}{AP}=e,$$

слѣдовательно,

$$Pp=AB.\ e.\ Q.\ E.\ D$$

Слѣдствіе. Пару можно переносить параллельно самой себѣ, измѣняя длину плеча и общую величину коэффиціентовъ слагающихъ движеній пары, лишь бы при этомъ моментъ пары оставался безъ измѣненія.

Пару будемъ обозначать символомъ $(AB)_e$.

3. Займемся теперь сложеніемъ растяженія и поступательной скорости.

Пусть O—центръ растяженія e, v—поступательная скорость системы. Проведемъ чрезъ O прямую, параллельную v, и на

ней отложимъ отрѣзокъ OO' въ сторону, противоположную направленію v, такъ, чтобы

$$\alpha)\ OO'.e=v.$$

Въ O' придадимъ системѣ два растяженія: одно положительное, другое отрицательное съ общимъ коэффиціентомъ e. Совокупность этихъ движеній эквивалентна нулю (Теор. III). Но теперь мы имѣемъ три движенія: 1. поступательную скорость v, 2. поступательную скорость v' пары $(OO')_e$ и скорость растяженія e вокругъ центра O'. Въ силу предыдущей теоремы

$$v'=OO'.\ e=v,$$

въ силу α). Кромѣ того, направленія скоростей v и v' прямопротивоположны. Слѣдовательно, первыя два движенія взаимпоуничтожатся, и останется лишь растяженіе въ O'.

Мы получили такимъ образомъ теорему:

Теорема VII. Совокупность поступательпой скорости v и растяженія e въ центрѣ O, эквивалентна растяженію e въ O'. Прямая $O'O$ параллельна v и направлена въ туже сторону, причемъ

$$OO'.e=v.$$

Примѣчаніе. Эту теорему можно считать обратной относительно теоремы II.

Теперь мы въ состояніи сложить любое число растяженій.

Теорема VIII. Совокупность n растяженій $e_1, e_2, ..e_n$ въ n не совпадающихъ точкахъ $A_1, A_2, ..A_n$ эквивалентна одному растяженію e или поступательной скорости v. Первое имѣетъ мѣсто, если сумма $(e_1+e_2+.+e_n)$ не равна нулю. Въ этомъ случаѣ центръ результирующаго растяженія совпадаетъ съ

центромъ массъ $e_1, e_2, . . e_n$, помѣщенныхъ въ соотвѣтствующихъ центрахъ складываемыхъ движеній.

Кромѣ того,

$$e = e_1 + e_2 + . . + e_n.$$

Второе имѣетъ мѣсто, если

$$e_1 + e_2 + . + e_n = o.$$

Доказательство. Изъ теоремы V вытекаетъ. что при сложеніи двухъ растяженій e_1 и e_2 въ A_1 и A_2 центръ результирующаго растяженія e совпадаетъ съ центромъ массъ e_1 и e_2, помѣщенныхъ въ A_1 и A_2. Кромѣ того, $e = e_1 + e_2$. Отсюда легко заключить о справедливости теоремы въ общемъ случаѣ. Если сумма $(e_1 + e_2 + . . + e_n)$ равна нулю, то мы можемъ поступить слѣдующимъ образомъ. Сложимъ $n - _1$ растяженій $e_1, e_2, . . e_{n-1}$. Это даетъ намъ, по предыдущему, одно растяженіе $e = e_1 + e_2 + . + e_{n-1}$ вокругъ нѣкотораго центра Q. Растяженіе e въ Q съ растяженіемъ e_n въ A_n образуетъ, по предположенію, пару, которая, по теоремѣ VI, эквивалентна поступательной скорости.

Другое доказательство. Перенесемъ всѣ растяженія въ произвольную точку P. Это даетъ намъ двѣ сисгемы скоростей: 1. Систему скоростей растяженій $e_1, e_2, . . e_n$ въ P и систему поступательныхъ скоростей $v_1, v_2, . . v_n$, соотвѣтственно равныхъ скоростямъ точки P, которыми обладаетъ послѣдняя въ силу отдѣльныхъ движеній e. Первая система, по теоремѣ IV, эквивалентна одному растяженію $e = e_1 + e_2 + . + e_n$ въ P, . . вторая —одной поступательной скорости V — геометрической суммѣ скороетей $v_1, v_2, . v_n$. Совокупность растяженія и скорости V эквивалитентна, по теоремѣ VII, растяженію e въ точкѣ P', опредѣленіе которой дано выше. Легко видѣть, что P' есть центръ массъ $e_1, e_2 . . . e_n$, помѣщенныхъ въ $A_1, . . A_n$. Въ са-

момъ дѣлѣ, скорость v_i можно разсматривать, какъ моментъ перваго порядка массы e_i въ A относительно точки P. Точно также V есть такой-же моментъ массы e въ P' относительно той-же точки P. Но, по построенію, V—геометрическая сумма величинъ v_i. Отсюда мы заключаемъ, что P' совпадаетъ съ центромъ массъ e_i, такъ какъ, по опредѣленію, послѣдній есть точка, обладающая тѣмъ свойствомъ, что, если въ ней сосредоточить всю массу $e=e_1+e_2+.+e_n$, то моментъ массы e есть геометрическая сумма моментовъ массъ e_i относительно всякой точки P.

Если сумма $(e_1+e_2+.+e_n)$ равна нулю, то переносъ всѣхъ растяженій въ P дастъ лишь поступательную скорость V. Q. E. D.

4. Займемся теперь сложеніемъ растяженіи e вокругъ точки O и вращеніемъ ω вокругъ оси s, не проходящей чрезъ O.

Опредѣленіе. Назовемъ *коническимъ винтомъ* (*) совокупность вращенія ω вокругъ нѣкоторой оси s и растяженія $e=p\omega$ вокругъ точки O той-же прямой; O—центръ винта, s—ось, а p— параметръ послѣдняго. Легко найти скорость v какой-либо точки α системы, испытывающей конически-винтовое движеніе.

Скорость v есть равнодѣйствующая двухъ скоростей.

Изъ нихъ первая v' (ч. 9.) лежитъ на радіусѣ $O\alpha$ и равна:

$$v'=O\alpha.\ e=O\alpha.\ \omega.\ p.$$

Этой скоростью обладаетъ точка α въ силу растяженіи e въ O. Вторая скорость v'' равна:

$$v''=a\alpha.\omega,$$

(*) См. Мех. под. изм. системы. Вып. Ш стр. 91. Тамъ мы назвали винтъ, о которомъ идетъ рѣчь въ текстѣ, центральнымъ. Названіе коническій кажется намъ болѣе выразительнымъ. Авторъ.

гдѣ a—проекція точки α на ось винта. Скорость v'' перпендикулярна къ плоскости (s, α) и вызвана вращеніемъ ω вокругъ s. Замѣчая, что скорость v' и v'' взаимно перпендикулярны, и полагая:

$$\angle aO\alpha = \varphi, \quad O\alpha = \rho,$$

найдемъ:

$$v^2 = v'^2 + v''^2 = \rho^2\omega^2 \left(p^2 + sn^2\varphi\right); \quad tg\,(v,\rho) = \frac{sn\varphi}{p}$$

Эти формулы были найдены нами прежде инымъ путемъ. (*).

Мы видимъ, что скорость точки α лежитъ въ касательной плоскости къ прямому круглому конусу, центръ котораго въ центрѣ винта, а ось совпадаетъ съ осью послѣдняго. Этимъ объясняется названіе, данное винту.

Пусть теперь s—ось вращенія ω, O—центръ растяженія e, причемъ точка O не лежитъ на прямой s (ч. 10). Въ силу обоихъ движеній какая-нибудь точка α системы обладаетъ двумя скоростями. Первая изъ нихъ v' вызвана вращеніемъ ω и, слѣдовательно, перпендикулярна къ плоскости (s, α); вторая v'' вызвана растяженіемъ e и направлена по $O\alpha$. Такъ какъ $O\alpha$ въ данномъ случаѣ не лежитъ въ плоскости (s, α), если только точка α лежитъ внѣ плоскости (s, O), то уголъ (v', v'') не равенъ прямому. Является вопросъ, нѣтъ-ли точекъ α, для которыхъ этотъ уголъ равенъ нулю или двумъ прямымъ. Очевидно, для этого необходимо, чтобы α была проекціей точки O на плоскость (s, α). Геометрическое мѣсто этихъ проекцій есть окружность круга, плоскость котораго перпендикулярна къ s, а діаметромъ служитъ разстояніе OO' точки O отъ

(*) См. l. cit. стр 92, формулы B) и C.

прямой s. Пусть $OPO'Q$—эта окружность. Діаметръ OO' дѣлитъ послѣднюю на двѣ части, Въ точкахъ первой OPO' скорости v' и v'' прямо-противоположны; въ точкахъ второй $O'QO$ эти скорости направлены въ одну и туже сторону. Опредѣлимъ на первой полуокружности точку P, для которой $v=v'$. Замѣчая, что

$$v'=O'P.\omega,\ v''=OP.e,$$

найдемъ для опредѣленія точки P: $O'P.\omega=OP.e$ или

$$1)\quad \frac{O'P}{OP}=\frac{e}{\omega}.$$

Отсюда мы зэключаемъ, что точка P единственна. Мы нашли, слѣдовательпо, точку P, которая остается неподвижной въ силу обоихъ движеній системы. Проведемъ чрезъ P прямую s' параллельную s, и перенесемъ вращеніе ω на ось s, а растяженіе e изъ O въ P. Первый переносъ даетъ намъ вращеніе ω вокругъ s' и поступательную скорость, равную скорости v' точки P; результатомъ втораго переноса будетъ скорость растяженія e въ P и поступательная скорость v'' точки P.

Замѣчая, что скорости v' и v'' взаимно уничтожаются, заключаемъ:

Теорема IX. Совокупность вращенія ω вокругъ оси s и растяженія e въ точкѣ O, не лежащей на оси, эквивалентна коническому винту. Центръ P послѣдняго лежитъ на окружности, діаметромъ которой служитъ разстояніе точки O отъ оси s, а плоскость перпендикулярна къ s. Ось s' результирующаго винта параллельна оси s.

Введя параметръ $p=\frac{e}{\omega}$ винта и замѣчая, что (ч. 9).

$$\frac{O'P}{OP}=tg\ O'OP=tg\varphi,$$

получимъ въ силу 1):

Теорема X. Плоскость (O, s') образуетъ съ плоскостью $(O.s)$ уголъ φ, tg котораго равенъ параметру результирующаго винта.

Наши изслѣдованія мы закончимъ слѣдующей теоремой:

Теорема XI. Совокупность произвольнаго числа растяженій, поступательныхъ и вращательныхъ скоростей вообще эквивалентна коническому винту.

Доказательство. Положимъ, что подобно-измѣняемая фигура обладаетъ 3 системами одновременныхъ скоростей: 1. системой скоростей e растяженій вокругъ отдѣльныхъ точекъ; 2. системой поступательныхъ скоростей v_i и 3. системой вращенія ω_i вокругъ ней S_i. Послѣднія двѣ системы, какъ извѣстно, эквивалентны винту Пуансо. Пусть V и Ω его—его поступательныя и вращательныя слагающія. Первая система эквивалентна одному растяженію e вокругъ центра, скажемъ, Q. Складывая e съ V, найдемъ скорость растяженія e вокругъ новаго центра Q'. Складывая въ заключеніе послѣднюю скорость съ Ω, мы придемъ, по только что доказанной теоремѣ, къ коническому винту *Q. E. D.*

Примѣчаніе I. Такъ какъ всякое движеніе подобно измѣняемой системы, какъ легко видѣть, можемъ состоять лишь изъ совокупности поступательныхъ скоростей, скоростей вращенія и растяженія, то изъ полученной теоремы вытекаетъ: всякое элементарное движеніе подобно-измѣняемой фигуры есть коническій винтъ. Только этотъ результатъ былъ извѣстенъ до сихъ поръ. Онъ принадлежитъ Шалю (*).

(*) Chasles. Bulletin des sciences Nov. 1830.

Въ 3-мъ вып. Мех. под. изм. сист. читатель найдетъ прямое доказательство теоремы Шаля. Авторъ.

Примѣчаніе II. Пользуюсь случаемъ отмѣтить неточность, допущенную въ 3-мъ выпускѣ «Механики подобно измѣняемой системы». Въ примѣчаніи къ стр. 91 я утверждаю безъ доказательства, что «свойства кинематическихъ и силовыхъ винтовъ подобно-измѣняемой системы тождественны». Это невѣрно.

Кинематическіе винты значительно отличаются по своимъ свойствамъ отъ силовыхъ, въ чемъ меня убѣдило болѣе глубокое изслѣдованіе вопроса. Я былъ введенъ въ заблужденіе внѣшней аналогіей между сложеніемъ силовыхъ паръ растяженія и кинематическихъ паръ.

Февраль 1891 г.

Кинематика линейчатой пары.

Въ настоящей статьѣ мы разсмотримъ движеніе одной линейчатой поверхности α по другой β. Напоминаемъ извѣстное предложеніе Рело, по которому неподвижная поверхность β есть обертывающая всѣхъ положеній подвижной α.

Отсюда прямо вытекаетъ, что мы должны сначала разсмотрѣть условія, при которыхъ линейчатая поверхность α имѣетъ своей обертывающей тоже линейчатую поверхность.

1. Пусть α, α'—два смежныхъ положенія движущейся поверхности, a'—общая производящая, a—гомологичная a' производящая поверхности α (ч. 11). Прямыя a и a' безконечно близки другъ къ другу. Кромѣ того, прямая a' принадлежитъ оберткѣ. Мы видимъ, что оберткой линейчатой поверхности α будетъ также линейчатая поверхность, если при элементарномъ движеніи α производящая послѣдней a переходитъ въ положеніе безконечно близкой a'. Но совпаденіе двухъ прямыхъ требуетъ выполненія трехъ условій, что даетъ намъ теорему:

Теорема I. Каждой производящей a линейчатой поверхности α отвѣчаетъ движеніе послѣдней со свободой третьяго порядка, движеніе, при которомъ оберткой поверхности α служитъ также линейчатая поверхность.

Слѣдствіе. Движеніе, при которомъ оберткой поверхности α служитъ также линейчатая поверхность, обладаетъ свободой четвертаго порядка.

Разсмотримъ группу винтовъ третьяго порядка. отвѣчающую какой-нибудь производящей a. Въ группѣ третьяго порядка, какъ извѣстно, винты одинаковаго параметра p суть производящія одного рода однополаго гиперболоида (p). Гиперболоиды (p) имѣютъ общій центръ и общее направленіе осей. Между гиперболоидами (p) есть одипъ—главный, обладающій тѣмъ свойствомъ, что его производящія одного рода суть винты нулеваго параметра, производящими другого рода служатъ общіе лучи комплексовъ всѣхъ винтовъ группы, т. е. прямыя, перпендикулярпыя къ траекторіямъ всѣхъ своихъ точекъ. Замѣчая, что въ разсматриваемомъ нами случаѣ элементарныя троекторіи точекъ производящей a лежатъ на поверхности α и, слѣдовательно, перпендикулярны къ нормалямъ къ α вдоль a, заключаемъ:

Теорема II. Винты нулеваго параметра группы, соотвѣтствующей производящей a, суть производящія одного рода гиперболическаго параболоида, при чемъ производящія втораго рода суть нормали вдоль производящей a къ поверхности α.

Выведемъ уравненіе параболоида нормалей. Примемъ за начало прямоугольныхъ осей поординатъ центральную точку O производящей a; осью z—пусть служитъ прямая a, осью x—нормаль въ O къ поверхности α, а ось y направимъ отъ O къ безконечно близкой производящей. (Ч. 12). Если b—точка производящей a, касательная плоскость въ b къ поверхности α образуетъ съ плоскостью yz уголъ φ, для котораго

$$tg\varphi = \frac{z}{k}$$

гдѣ k—параметръ производящей a, z—координата точки b. Уравненія нормали въ b къ a будутъ слѣдовательно:

$$Z=z,\ y=-x\ cot\varphi.$$

Пользуясь предыдущимъ значеніемъ $tg\varphi$, получимъ окончательно:

$$yz+kx=o.$$

Это уравненіе даетъ намъ:

Теорема III. Винты нулеваго параметра группы, соотвѣтствующей производящей a, встрѣчаютъ подъ прямымъ угломъ перпендикулярную къ a касательную къ поверхности α.

2, Займемся теперь соотношеніями между линейчатой поверхностью α и ея обертывающей β. Пусть α, α' и α''—три смежныхъ положенія движущейся поверхности, a и b—двѣ производящія, причемъ a общая производящая поверхностей α и α', b—общая производящая поверхностей α' и α'' (ч. 13). По извѣстной теоремѣ, прямыя a и b принадлежатъ оберткѣ β движущейся поверхности, но эти прямыя въ то же время суть смежныя производящія поверхности α', слѣдовательно:

Теорема IV. Общей производящей линейчатой поверхности α и ея обертки β отвѣчаетъ одинъ и тотъ-же параметръ k распредѣленія касательныхъ плоскостей къ обѣимъ поверхностямъ и однѣ и тѣже центральная точка u плоскость.

Эта теорема указываетъ признакъ, по которому можно узнать напередъ, можетъ-ли данная линейчатая поверхность α двигаться по другой линейчатой поверхности β. Именно, нужно опредѣлить для обѣихъ поверхностей параметры k_1 и k_2 въ функціи какого-нибудь одного перемѣннаго λ. Если полученныя такимъ образомъ двѣ функціи $f_1\ (\lambda_1)$ и $f_2\ (\lambda_2)$ таковы, что при опредѣленномъ выборѣ начальныхъ значеній величинъ λ_1 и λ_2 $f\ (\lambda_1)$ и $f\ (\lambda_2)$ будутъ далѣе постоянно равны, то движеніе возможно; въ противномъ случаѣ оно невозможно.

Примѣчаніе. Здѣсь представляется любопытный вопросъ: какъ по данной линейчатой поверхности α найти другую β, тоже линейчатую, по которой могла-бы двигаться поверхность α? Кинематически этотъ вопросъ рѣшенъ теоремами I и II. Но рѣшеніе его въ области геометріи и анализа намъ кажется чрезвычайно труднымъ. Путь къ его рѣшенію указывается теоремой IV. Какъ бы то ни было, интересъ поставленнаго вопроса несомнѣненъ.

3. Пусть теперь α и β двѣ линейчатыя поверхности, для которыхъ движеніе возможно. Разсмотримъ это движеніе. Положимъ, что (a, b)—общая производящая поверхностей въ какой-нибудь моментъ, a' и b'—смежныя съ a производящія послѣднихъ, (α, β) центральная точка производящей (a, b), α', β'—центральныя точки производящихъ a' и b'. (Ч. 14). Въ слѣдующій моментъ должны придти къ совпаденію производящія a' и b', точки α' и β' и, кромѣ того, центральныя плоскости въ α' и β' къ поверхностямъ α и β. Всего 5 условій, откуда мы заключаемъ, что въ каждый моментъ движеніе α по β вполнѣ опредѣленное. Спроектируемъ на (a, b) точки α' и β' въ a и b. Такъ какъ производящая (a, b) смежна, какъ съ a', такъ и съ b', то мы вправѣ разсматривать $a\alpha'$ и $b\beta'$, какъ прямыя, по которымъ измѣряются кратчайшія разстоянія прямыхъ a и a', a и b' соотвѣтственно.

Принимая:

$$a\alpha' = b\beta',$$

что вполнѣ отъ насъ зависитъ, мы въ силу предположеннаго равенства параметровъ k и k', соотвѣтствующихъ производящимъ a' и b', заключаемъ, что равны и безконечно-малые углы, образуемые съ (a, b) прямыми a' и b'. Элементарное движеніе α по β въ разсматриваемый моментъ заключается, слѣдовательно, въ томъ, что α испытываетъ элементарное поступательное движеніе $a\,b$ и вращается вокругъ (a, b) на

уголъ ψ, равный углу между касательными плоскостями въ a и въ b. И такъ α движется винтовымъ движенiемъ, осью котораго служитъ прямая (a, b), а параметръ r дается формулой:

$$r = \text{предѣлу}\frac{ab}{\psi}$$

Но если φ и φ'—углы съ центральной плоскостью въ (α, β), образуемые касательными плоскостями въ a и b, то

$$\psi = \varphi' - \varphi.$$

Съ другой стороны, такъ какъ точки a, b безконечно-близки къ (α, β), то

$$\varphi' = \frac{\alpha b}{k},\ \varphi = \frac{\alpha a}{k}.$$

Слѣдовательно,

$$\psi = \varphi' - \varphi = \frac{\alpha b - \alpha a}{k} = \frac{ab}{k},$$

откуда

$$\frac{ab}{\psi} = k = r.$$

Все предыдущее даетъ намъ теорему:

Теорема V. Движенiе линейчатой поверхности α по линейчатой же поверхности β въ томъ случаѣ, если оно возможно, есть вполнѣ опредѣленное движенiе. Поверхность α въ каждый моментъ движется элементарно-винтовымъ движенiемъ, осью котораго служитъ общая производящая поверхностей α и β, а параметръ равенъ параметру этой производящей.

Примѣчанiе. Доказанную теорему можно формулировать слѣдующимъ образомъ: если возможно движенiе линейчатой по-

верхности α по линейчатой же поверхности β, то α служитъ подвижнымъ, β—неподвижнымъ центроидомъ движенія.

4. Разсмотримъ частный случай развертывающихся поверхностей. Это—также линейчатыя поверхности съ той лишь особенностью, что смежныя производящія пересѣкаются. Эти поверхности бываютъ двухъ родовъ: къ первому относятся тѣ, въ которыхъ смежныя производящія пересѣкаются на конечномъ разстояніи; въ поверхностяхъ втораго рода производящія пересѣкаются въ безконечно-удаленныхъ точкахъ. Примѣромъ поверхностей перваго рода могутъ служить коническія поверхности, втораго—цилиндрическія.

Разсуждая, какъ при выводѣ теоремы IV, найдемъ:

Теорема VI. Для того, чтобы было возможно движеніе развертывающейся поверхности α по β, необходимо и достаточно, чтобы α и β были одного рода.

Теорема VII. Если поверхности α и β принадлежатъ къ первому роду, то въ каждый моментъ ихъ ребра возврата имѣютъ общую точку и въ ней общую касательную линію и плоскость.

Пусть at—общая касательная поверхностей A и B, a—общая точка реберъ возврата α и β послѣднихъ, a' и b'—смежныя съ a точки кривыхъ α и β (ч. 15). По предыдущему, at—общая касательная въ a этихъ кривыхъ. Слѣдовательно, углы $taa'=d\alpha$ и $tab'=d\alpha'$ суть углы смежности, а плоскости угловъ—плоскости кривизны кривыхъ α и β. Обозначая чрезъ $d\tau$ и $d\tau'$ элементарные углы второй кривизны послѣднихъ въ a, найдемъ для угла O между плоскостями taa' и tab' слѣдующее выраженіе:

$$1)\quad O=d\tau\pm d\tau'=\frac{ds}{T}\pm\frac{ds'}{T'},$$

гдѣ ds и T, ds' и T'—элементы дуги и радіусы второй кривизны кривыхъ α и β соотвѣтственно. Верхній знакъ относит-

ся къ тому случаю, когда поверхности A и B обращены другъ къ другу выпуклыми сторонами; нижнiй—, когда вдоль ab одна изъ поверхностей выпукла, другая вогнута.

Элементарное движенiе подвижной поверхности B по неподвижной A заключается въ томъ, что B вращается вокругъ at на уголъ O до совпаденiя плоскостой tab' и taa'; затѣмъ B вращается вокругъ оси m, перпендикулярной въ a къ плоскости taa' на уголъ $(d\alpha - d\alpha')$ до совпаденiя прямыхъ ab' и aa'. Наконецъ поверхность B движется поступательно вдоль aa' на величину $aa' - ab' = ds - ds'$ до совпаденiя точекъ b' и a'. Сложимъ послѣднее движенiе съ вращенiемъ вокругъ оси m. Замѣчая, что ось m перпендикулярна къ направленiю поступательнаго движенiя, заключаемъ, что совокупность складываемыхъ движенiй эквивалентна вращенiю вокругъ оси n, параллельной m, при чемъ разстоянiе p осей m и n опредѣляется по формулѣ:

$$2)\quad ds - ds' = p\,(d\alpha - d\alpha') = p\left(\frac{ds}{R} - \frac{ds'}{R'}\right)$$

гдѣ R и R'—радiусы кривизны въ a кривыхъ α и β. Плоскость (m, n), кромѣ того, перпендикулярна къ aa'. Такъ какъ прямая n, параллельная m, перпендикулярна къ плоскости taa', то она скрещивается подъ прямымъ угломъ съ at. Замѣчая, что въ предѣлѣ aa' совпадаетъ съ at, заключаемъ, что въ предѣлѣ ось n встрѣчаетъ подъ прямымъ угломъ общую главную нормаль въ a кривыхъ α и β.

Все выше сказанное даетъ намъ теорему:

Теорема VIII. Элементарное движенiе развертывающейся поверхности B перваго рода по такой-же поверхности A эквивалентно совокупности двухъ вращенiй, оси которыхъ t и n скрещиваются подъ прямымъ угломъ, причемъ одна изъ нихъ t совпадаетъ съ общей касательной реберъ возврата поверхно-

стей A и B, а другая n встрѣчаетъ подъ прямымъ угломъ общую главную нормаль реберъ и возврата.

Обратимъ вниманіе на то, что въ формулы 1) и 2) входятъ элементы ds и ds' дугъ кривыхъ α и β. Такъ какъ между ds и ds' нѣтъ никакой завясимости, то мы заключаемъ:

Теорема IX. Движеніе поверхности B и A есть неопредѣленное движеніе съ первой степенью свободы.

Прежде, чѣмъ перейти къ изслѣдованію группы винтовъ, каждый членъ который можетъ служить осью элементарнаго движенія поверхности B, изслѣдуемъ нѣкоторые частные случаи.

Замѣчая, что $p=o$, если $ds=ds'$, а R не равно R', находимъ:

Теорема X. Если развертывающаяся поверхность B движется по такой-же поверхности A такъ, что ребро возврата первой поверхности катится безъ скольженія по ребру возврата второй, причемъ радіусы кривизны этихъ кривыхъ въ точкѣ ихъ соприкосновенія a не равны, то въ каждый моментъ поверхность вращается вокругъ оси e, проходящей чрезъ a. Ось e образуетъ съ общей касательной t въ a уголъ α, для котораго

$$tg\alpha=\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right):\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right).$$

Плоскость (e, t) перпендикулярна въ a къ общей главной нормали.

Полагая: $R=R'$ и $ds \gtrless ds'$, найдемъ изъ 2): $p=R$, что даетъ теорему:

Теорема XI. Если въ общей точкѣ реберъ возврата равны радіусы кривизны послѣдней, причемъ скольженіе имѣетъ мѣсто, то ось n совпадаетъ съ общей осью кривизны реберъ возврата.

Совокупность двухъ вращеній $(d\tau+d\tau')$ и $(d\alpha-d\alpha')$ вокругъ скрещивающихся осей t и n эквивалентна винту (p_1).

Каждому значенію $\frac{ds}{ds'}$ отвѣчаетъ особое положеніе винта (p_λ). Эти винты (p_λ) образуютъ, слѣдовательно, группу винтовъ, характеризующую свободу подвижной поверхности B. Замѣчая, что кратчайшее разстояніе прямыхъ t и n измѣряется по общей главной нормали къ ребрамъ возврата α и β, заключаемъ:

Теорема XII. Винты (p_λ) группы, характеризующей свободу поверхности B въ какой-либо моментъ, встрѣчаютъ подъ прямымъ угломъ одну и ту же прямую. Эту прямую назовемъ *осью* группы.

Пусть at—общая касательная, $an=p$— общая главная нормаль реберъ возврата — (ч. 16), N—перпендикуляръ въ n къ плоскости nat. По предыдущему, элементарное движеніе поверхности B въ разсматриваемый моментъ складывается изъ двухъ элементарныхъ вращеній, изъ которыхъ одно $(d\tau+d\tau')$ имѣетъ осью прямую at, другое $(d\alpha-d\alpha')$—прямую N. Результирующій винтъ (p_λ) встрѣчаетъ подъ прямымъ угломъ прямую an въ точкѣ A такъ, что имѣетъ мѣсто слѣдующее уравненіе:

$$\frac{x}{(d\alpha-d\alpha')^2}=\frac{p-x}{(d\tau+d\tau')^2}=\frac{p}{(d\alpha-d\alpha')^2+(d\tau+d\tau')^2}$$

гдѣ чрезъ x обозначено разстояніе aA. Изъ этихъ формулъ, пользуясь предыдущимъ значеніемъ p, найдемъ:

$$1)\quad x=\frac{(ds-ds')\ (d\alpha-d\alpha_,)}{(d\alpha-d\alpha')^2+(d\tau+d\tau')^2}$$

$$p-x=\frac{(ds-ds')\ (d\tau+d\tau')^2}{(d\alpha-d\alpha')\ \{(d\alpha-d\alpha')^2+(d\tau+d\tau')\}},$$

откуда $2)\quad \sqrt{x\ (p-x)}=\lambda=\frac{(ds-ds')\ (d\tau+d\tau')}{(d\alpha-d\alpha')^2+(d\tau+d\tau')^2},$

гдѣ λ—параметръ винта (p_λ). Уголъ φ, образуемый осью l послѣдняго съ касательной at, опредѣляется по формулѣ:

$$3)\quad tg\varphi = \frac{d\alpha - d\alpha'}{d\tau + d\tau'}.$$

Формулами 1), 2) и 3) вполнѣ опредѣляется результирующій винтъ. Найдемъ геометрическое мѣсто этихъ винтовъ. Для этого достаточно исключить отношеніе $\frac{ds}{ds'}$ изъ 1) и 3), пользуясь формулами:

$$d\alpha = \frac{ds}{R},\ d\alpha' = \frac{ds'}{R'},\ d\tau = \frac{ds}{T},\ d\tau' = \frac{ds'}{T'}.$$

Изъ 1) и 3) легко получаемъ:

$$4)\quad x = \frac{ds - ds'}{d\tau + d\tau'}\ sn\varphi cs\varphi.$$

Отсюда и изъ 3), пользуясь только что написанными формулами, найдемъ:

$$A)\ x\left(\frac{1}{TR'} + \frac{1}{T'R}\right) = sn\varphi cs\varphi\ \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) + sn^2\varphi\ \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right).$$

Примемъ за оси координатъ касательную at, нормаль an и бинормаль av. Умножая полученное уравненіе на квадратъ разстоянія $\tau^2 = y^2 + z^2$ любой точки (x, y, z) оси винта $(p\lambda)$, найдемъ уравненіе поверхности, производящими которой служатъ различные винты (p).

$$A')\ x\ (y^2 + z^2)\ \left(\frac{1}{TR'} + \frac{1}{T'R}\right) = yz\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) + y^2\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right),$$

Здѣсь осью x служитъ прямая an, осью z прямая at, а осью y—бинормаль av.

Разсмотримъ полученную поверхность.

Для удобства изслѣдованія введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\frac{1}{TR'}+\frac{1}{T'R}=A,\ \frac{1}{R'}-\frac{1}{R}=2B,\ \frac{1}{T}+\frac{1}{T'}=C.$$

Формулу $A)$ нетрудно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$B)\ tg^2\varphi\ (Ax-C)-2B,\ tg\varphi+Ax=o.$$

Рѣшая это уравненіе относительно $tg\varphi$, получаемъ:

$$B')\ tg\varphi_1=\frac{B+\sqrt{B^2-Ax\ (Ax-C)}}{2\ Ax-C.},\ tg\varphi_2=\frac{B-\sqrt{B^2-Ax\ (Ax-C)}}{2\ Ax-C}$$

откуда

$$C)\ tg\ (\varphi_1-\varphi_2)=\frac{2\ \sqrt{B^2-Ax\ (Ax-C)}}{2\ Ax-C}.$$

Формула $B)$ показываетъ, что чрезъ каждую точку A оси группы проходятъ два винта $(p,)$. Изъ формулы $C)$ вытекаетъ, что уголъ между осями этихъ винтовъ равенъ прямому, если

$$D)\ x=\frac{C}{2A},$$

и равенъ нулю, если

$$E)\ A^2x^2-ACx-B^2=o,$$

т. е. если

$$x=\frac{C\pm\sqrt{C^2+4B^2}}{2\ A}.$$

Пусть O—точка оси, чрезъ которую проходятъ взаимно-перпендикулярные винты. Перенесемъ начало поординатъ въ O, сохраняя прежнее направленіе осей. Уравненіе A' приметъ видъ:

$$A'')\ Ax\ (y^2+z^2)=2Byz+\frac{C}{2}(y^2-z^2).$$

Повернемъ теперь новыя оси координатъ вокругъ оси X на нѣкоторый уголъ φ. Пользуясь формулами:

$$y=y'cs\varphi+z'sn\varphi,\ z=-y'sn\varphi+z'cs\varphi,$$

находимъ:

$$y^2+z^2=y'^2+z'^2;\ yz=y'z'\ (cs^2\varphi-sn^2\varphi)-(y'^2-z'^2)\ sn\varphi cs\varphi,$$

$$y^2-z^2=(y'^2-z'^2)\ (cs^2\varphi-sn^2\varphi)+4y'z'sn\varphi cs\varphi.$$

Слѣдовательно, уравненіе $A'')$ приметъ видъ:

$$A''')\ x\ (y'^2+z')\ A=y'z'\ \{2B\ cs\ 2\varphi+C\ sn\ 2\varphi\}+$$
$$+(y'^2-z'^2)\ \left\{\frac{C}{2}cs\ 2\ \varphi-B\ sn\ 2\ \varphi\right\}.$$

Выберемъ теперь уголъ φ такъ, чтобы

$$\frac{C}{2}cs\ 2\ \varphi-B\ su\ 2\ \varphi=o.$$

Обозначая этотъ уголъ чрезъ ψ, получаемъ:

$$F)\ tg\ 2\ \psi=\frac{C}{2\ B},$$

$$A^{IV})\ x\ (y^2+z^2)\ A=yz\{2Bcs\ 2\psi+Csn\ 2\psi\},$$

причемъ значки при y и z опущены.

Вставляя въ первую изъ формулъ B': $x=\frac{C}{2\ A}$, найдемъ:

$$tg\varphi_1=-\frac{2\ B+\sqrt{C^2+4\ B^2}}{C}$$

откуда

$$tg\ 2\ \varphi_1=\frac{C}{2\ B}$$

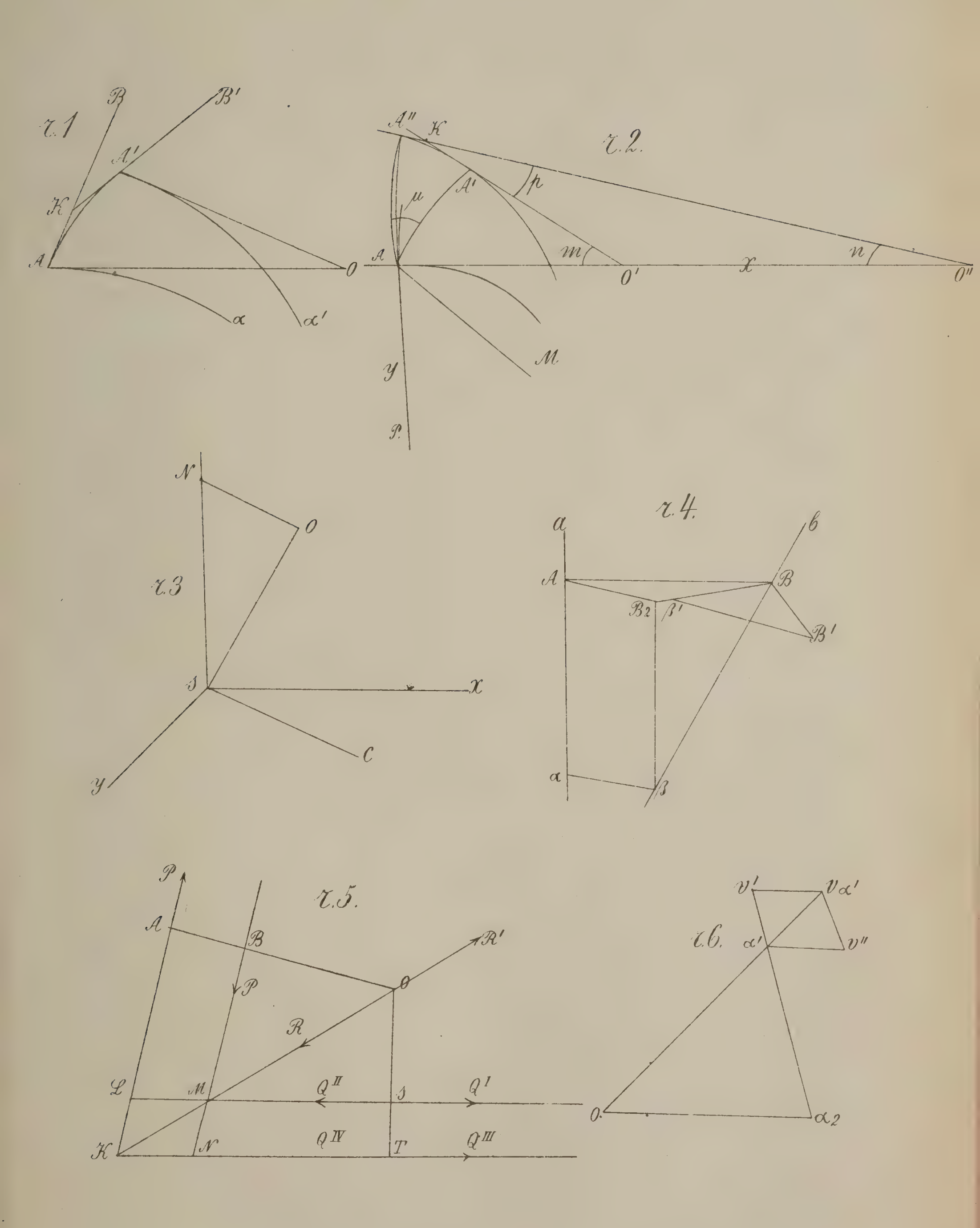
Сравненіе этого выраженія съ *F)* дастъ: $\varphi_1=\psi$, откуда слѣдуетъ, что новыя оси y и z совпадаютъ съ взаимно-перпендикулярными осями винтовъ (p_λ), проходящихъ чрезъ новое начало поординатъ. Формулой $A^{IV})$ доказывается слѣдующая теорема:

Теорема XIII. Оси винтовъ группы, характеризующей элементарную свободу развертывающейся поверхности, суть производящія цилиндроида. Директрисой цилиндроида служитъ главная нормаль an, центръ цилиндроида опредѣляется формулой D. Длина δ директрисы цилиндроида въ силу уравненія *E)* даетоя формулой:

$$\delta=\frac{\sqrt{C^2+4\ B^2}}{A}.$$

Этой теоремой мы закончимъ настоящія изслѣдованія.

Мартъ 1891 г.



r.1
B
B'
A'
K
A
O
α
α'
A''
K
r.2
p
μ
A'
A
m
O'
x
n
O''
M
y
P
N
O
r.3
S
X
C
y
r.4
a
b
A
B
B2
β'
B'
α
β
P
r.5
A
B
R'
P
O
R
L
M
Q^II
S
Q^I
K
N
Q^IV
T
Q^III
v'
vα'
r.6
α'
v''
O
α2

r. 7.

A v′ C v″ B C v′ v″

r. 8.

a P p b A B

r. 9.

s a α v′ v v″ o

r. 10.

s s′ v″ α v′ P O′ O Q

r. 11.

α′ α α′ a

r. 12.

α a b y φ o x

r. 13.

α′ α′ α″ α″ α α b a

r. 14.

b (a b) α o b β′ a α′ (α β)

r. 15.

O t A $d\tau + d\tau'$ B α $d\alpha'$ $d\alpha$ a b′ β m $d\alpha - d\alpha'$ p n $d\alpha - d\alpha'$

r. 16.

t $d\tau + d\tau'$ z (p.r) φ A a n x y v $d\alpha - d\alpha'$ N

Къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

А. Старкова.

Pour la théorie des équations linéoires

par A. Starkoff.

Въ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій основный вопросъ ихъ рѣшенія при существующихъ условіяхъ изслѣдуется въ двухъ главныхъ направленіяхъ. Съ одной стороны ученые стремятся указать тѣ особенности, которыми отличаются эти рѣшенія, какъ опрѣделенный классъ функцій, и раскрыть ихъ общія свойства; съ другой—имѣютъ цѣлію изобразить эти рѣшенія опредѣленными аналитическими формулами въ зависимости отъ коеффиціентовъ даннаго уравненія т. е. написать ихъ математическимъ языкомъ. Послѣдующее изложеніе относится къ этому второму направленію изслѣдованій, такъ какъ оно имѣетъ въ виду дать форму выраженія частныхъ интеграловъ даннаго уравненія посредствомъ интеграловъ уравненія на единицу нисшаго порядка съ тѣми-же коеффиціентами.

Данное линейное дифференціальное уравненіе n-го порядка

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=0 \qquad (1)$$

представимъ въ видѣ

$$\sum_{p=n}^{p=0}P_{n-p}y^p=0 \qquad (2)$$

гдѣ p при y означаетъ символически порядокъ производной по x. Если въ выраженіе (2) мы внесемъ вмѣсто y подстановку вида

$$y=\int Q_1 z dx \qquad (3)$$

то, пользуясь формулой многократныхъ дифференцированій произведенія и считая при этихъ дифференцированіяхъ указателей за показателей, получимъ

$$P_n\int Q_1 z\,dx + z\sum_{p=n-1}^{p=0} P_{n-p-1}\,Q_1^p + \sum_{r=n-2}^{r=1}\frac{z^r}{1.2\ldots r}\,\frac{d^r}{dQ_1^r}\sum_{p=n-1}^{p=0} P_{n-p-1}\,Q_1^p = 0 \quad (4)$$

Такъ какъ одна изъ величинъ; Q_1 или z, въ подстановкѣ (3) можетъ быть взята произвольно, то выберемъ Q_1 такимъ образомъ, что-бы коеффиціентъ при z обращался въ нуль

$$\sum_{p=n-1}^{p=0} P_{n-p-1}\,Q_1^p = 0 \quad (5)$$

или

$$P_0\frac{d^{n-1}Q_1}{dx^{n-1}} + P_1\frac{d^{n-2}Q_1}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + P_{n-2}\frac{dQ_1}{dx} + P_{n-1}Q_1 = 0 \quad (6)$$

т. е, опредѣлимъ Q_1, какъ интегралъ линейнаго уравненія (6), вполнѣ подобнаго данному (1) съ тѣми-же и также расположенными коеффиціентами, но на единицу нисшаго порядка и безъ послѣдняго коеффиціента P_n.

Внося затѣмъ въ оставшійся двучленъ (4) вмѣсто z подстановку вида

$$z = \int Q_2 u\,dx \quad (7)$$

получимъ на основаніи той-же формулы многократнаго дифференцированія произведеній

$$\begin{aligned} &P_n\int Q_1 dx\int Q_2 u\,dx + u\sum_{r=n-2}^{r=1}\frac{Q_2^r}{1.2\ldots r}\,\frac{d^r}{dQ_1^r}\sum_{p=n-1}^{p=0} P_{n-p-1}\,Q_1^p + \\ &+\sum_{k=n-3}^{k=1}\frac{u^k}{1.2\ldots k}\,\frac{d^k}{dQ_2^k}\sum_{r=n-2}^{r=1}\frac{Q_2^r}{1.2\ldots r}\,\frac{d^r}{dQ_1^r}\sum_{p=n-1}^{p=0} P_{n-p-1}\,Q_1^p = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Въ подстановкѣ (7) одна изъ величинъ, Q_2 или u, можетъ быть взята произвольно. Выберемъ её такимъ образомъ, чтобы средній членъ выраженія (8) обратился въ нуль, именно

$$\sum_{r=n-2}^{r=1} \frac{Q_2^r}{1.2...r} \frac{d^r}{dQ_1^r} \sum_{p=n-1}^{p=0} P_{n-p-1} Q_1^p = 0 \qquad (9)$$

Выраженіе (9) есть линейное уравненіе $n-2$ порядка относительно Q_2 и представляетъ по своей формѣ пониженное на единицу отъ (6) въ томъ случаѣ, когда извѣстенъ одинъ его частный интегралъ [1]).

Вносяя далѣе въ оставшійся двучленъ (8) подстановку вида

$$u = \int Q_3 s dx$$

получимъ для опредѣленія Q_3 линейное уравненіе $n-3$ порядка, представляющее по своей формѣ пониженное на два отъ (6) въ томъ случаѣ, когда извѣстны два его интеграла.

Слѣдующая годстановка для s

$$s = \int Q_4 t dx$$

дастъ для опредѣленія Q_4 линейное уравненіе $n-4$ порядка, пониженное на три отъ (6) и т. д.

Зависимость между интегралами основнаго уравненія (6) и интегралами пониженныхъ указана мною въ цитированной выше статьѣ; она выражается въ слѣдующей простой формѣ.

Если мы обозначимъ $n-1$ интегралъ уравненія (6) чрезъ

$$q_1, \; q_2, \; q_3, \ldots \; q_{n-1} \qquad (10)$$

---

[1]) См. мою статью: Къ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Записки Казанской Математ. Секціи. Казань 1884, а также статью Théorie des équations générales, Odessa 1889 p. 12 etc.

и составимъ изъ нихъ и ихъ производныхъ опредѣлитель вида

$$\begin{vmatrix} q_1, & q_2, & \ldots\, q_{m-1}, & q_{m+k} \\ q'_1, & q'_2, & \ldots\, q'_{m-1}, & q'_{m+k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1^{(m-1)}, & q_2^{(m-1)}, & \ldots\, q_{m-1}^{(m-1)}, & q_{m+k}^{(m-1)} \end{vmatrix} = \text{Д}_{m+k}^{m-1} \qquad (11)$$

то получимъ для Q_1, Q_2, Q_3, ... значенія

$$\begin{array}{l} Q_1 = q_1, \quad = q_2, \quad = q_3, \ldots\ldots = q_{n-1} \\ Q_2 = \text{Д}_2^1 . q^{-2}, \quad = \text{Д}_3^1 . q_1^{-2}, \ldots\ldots = \text{Д}_{n-1}^1 . q_1^{-2} \\ Q_3 = q_1 . \text{Д}_3^2 . (\text{Д}_2^1)^{-2}, \; = q_1 . \text{Д}_4^2 . (\text{Д}_2^1)^{-2}, \ldots\ldots = q_1 . \text{Д}_{n-1}^2 . (\text{Д}_2^1)^{-2}, \\ Q_4 = \text{Д}_2^1 . \text{Д}_4^3 (\text{Д}_3^2)^{-2}, \; = \text{Д}_2^1 . \text{Д}_5^3 . (\text{Д}_3^2)^{-2} \ldots\ldots = \text{Д}_2^1 . \text{Д}_{n-1}^3 . (\text{Д}_3^2)^{-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_m = \text{Д}_{m-2}^{m-3} . \text{Д}_m^{m-1} . (\text{Д}_{m-1}^{m-2})^{-2}, \ldots\ldots = \text{Д}_{m-2}^{m-3} . \text{Д}_{n-1}^{m-1} . (\text{Д}_{m-1}^{m-2})^{-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_{n-1} = \text{Д}_{n-3}^{n-4} . \text{Д}_{n-1}^{n-2} . (\text{Д}_{n-2}^{n-3})^{-2} \end{array} \qquad (12)$$

Но на основаніи указанныхъ мною свойствъ опредѣлителей [2]) имѣемъ

$$\begin{array}{l} Q_1 = q_1, \; = q_2, \; = q_3, \ldots\ldots = q_{n-1} \\ Q_2 = \dfrac{d}{dx}\dfrac{q_2}{q_1}, \; = \dfrac{d}{dx}\dfrac{q_3}{q_1}, \; = \dfrac{d}{dx}\dfrac{q_4}{q_1}, \ldots\ldots = \dfrac{d}{dx}\dfrac{q_{n-1}}{q_1} \qquad (13) \\ Q_3 = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\text{Д}_3^1}{\text{Д}_2^1} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{Q_2^1}{Q_2}, \; = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\text{Д}_4^1}{\text{Д}_2^1} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{Q_2^2}{Q_2}, \ldots = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\text{Д}_{n-1}^1}{\text{Д}_2^1} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{Q_2^{n-3}}{Q_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_{n-1} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{\text{Д}_{n-1}^{n-3}}{\text{Д}_{n-2}^{n-3}} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{Q_{n-2}^1}{Q_{n-2}} \end{array}$$

---

[2]) См. мою статью: Двѣ формулы изъ теоріи опредѣлителей. Записки Казанской Математ. Секціи. Казань 1884.

гдѣ верхній указатель при различныхъ Q соотвѣтствуетъ указателю послѣдняго входящаго въ ихъ составъ частнаго интеграла q. Очевидно при такихъ условіяхъ мы получимъ

$$\int Q_1 dx = \int q_1 dx$$

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx = \int Q_1 dx \int \frac{d}{dx} \frac{q_2}{q_1} dx = \int q_2 dx \tag{14}$$

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx \int Q_3 dx = \int Q_1 dx \int Q_2 dx \int \frac{d}{dx} \frac{Q_2^1}{Q_2} dx = \int q_3 dx$$

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx \int Q_3 dx \int Q_4 dx = \int q_4 dx$$

. . . .

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx = \int q_{n-1} dx$$

Въ 1877 году мною былъ данъ способъ интегрированія линейныхъ уравненій [3]), причемъ интегралы, выражались рядами вида

$$y_1 = 1 + \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx \int Q_n dx +$$
$$+ \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx + \ldots$$

$$y_2 = \int Q_1 dx + \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx \int Q_1 dx + \ldots \tag{15}$$

$$y_3 = \int Q_1 dx \int Q_2 dx + \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx \int Q_1 dx \int Q_2 dx + \ldots$$

. . . .

$$y_n = \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx +$$
$$+ \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_n dx \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx + \ldots$$

Здѣсь всѣ Q_1, Q_2, . . . Q_{n-1} имѣютъ выше изслѣдованныя значенія интеграловъ тожественнаго данному уравненія $n-1$

---

[3]) Общій способъ интегрированія, линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ перемѣнными коэффиціентами. Одесса 1887.

порядка (6) и его пониженныхъ. Что-же касается Q_n, то оно опредѣляется выраженіемъ [4])

$$Q_n = \frac{P_n . Д_{n-2}^{n-3}}{P_0 . Д_{n-1}^{n-2}} = Д_{n-2}^{n-3} . P_n . (Д_{n-1}^{n-2})^{-2} \qquad (16)$$

такъ какъ по самому составу уравненія видно, что $P_0 = Д_{n-1}^{n-2}$ Принявъ во вниманіе формулы (14) и положивъ для краткости

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx \int Q_n . A . dx = \Phi(A)$$

ряды (15) можемъ написать такъ

$$y_1 = 1 + \Phi(1) + \Phi\Phi(1) + \Phi\Phi\Phi(1) + \ldots$$
$$y_2 = \int q_1 dx + \Phi\left(\int q_1 dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_1 dx\right) + \ldots$$
$$y_3 = \int q_2 dx + \Phi\left(\int q_2 dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_2 dx\right) + \ldots$$
$$y_4 = \int q_3 dx + \Phi\left(\int q_3 dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_3 dx\right) + \ldots \qquad (17)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{m+1} = \int q_m dx + \Phi\left(\int q_m dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_m dx\right) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = \int q_{n-1} dx + \Phi\left(\int q_{n-1} dx\right) + \Phi\Phi\left(\int q_{n-1} dx\right) + \ldots$$

По формулѣ (16) мы имѣемъ для Q_n выраженіе

$$Q_n = Д_{n-2}^{n-3} . P_n . (Д_{n-1}^{n-2})^{-2} \qquad (16)$$

Положимъ здѣсь P_n равнымъ

$$P_n = \Delta_n^{n-1} \qquad (18)$$

---

[4]) См. мою статью: Theorie des équations générales. Odessa 1889, p. 21, 25 etc.

или

$$P_n = \begin{vmatrix} \theta_{0,1}, & q_1, & q_2, & \dots q_{n-1} \\ \theta'_{0,1}, & q'_1, & q'_2, & \dots q'_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{n-1}_{0,1}, & q^{n-1}_1, & q^{n-1}_2, & \dots q^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{p=n-1}^{p=0} P_{n-p-1}\theta^p_{0,1} \qquad (19)$$

гдѣ $\theta_{0,1}$ и есть та неизвѣстная величина, которую слѣдуетъ опредѣлить для выполненія равенства (18). Очевидно, выраженіе (19) есть линейное уравненіе $n-1$-го порядка по $\theta_{0,1}$ вида

$$P_0 \frac{d^{n-1}\theta_{0,1}}{dx^{n-1}} + P_1 \frac{d^{n-2}\theta_{0,1}}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-2}\frac{d\theta_{0,1}}{dx} + P_{n-1}\theta_{0,1} = P_n \qquad (20)$$

т. е. вполнѣ одинаковое съ опредѣляющимъ Q_1 уравненіемъ (6), но лишь со второй частію, равною послѣднему коеффиціенту P_n въ данномъ уравненіи (1).

Если мы внесемъ въ выраженіе (16) значеніе для P_n, опредѣляемое изъ уравненія (18) или (20), то получимъ

$$Q_n = Д^{n-3}_{n-2}.\Delta^{n-1}_{n-1}.(Д^{n-2}_{n-1})^{-2} = \frac{d}{dx}\frac{\Delta^{n-2}_{n-1}}{Д^{n-2}_{n-1}} = \frac{d}{dx}\frac{Q'_{n-1}}{Q_{n-1}} \qquad (21)$$

гдѣ Δ^{n-2}_{n-1} и Q'_{n-1} имѣютъ такія-же значенія, какъ $Д^{n-2}_{n-1}$ и Q_{n-1} съ той лишь разницею, что въ нихъ вмѣсто послѣдняго q_{n-1} внесено $\theta_{0,1}$. При такихъ условіяхъ очевидно мы имѣемъ.

$$\int Q_1 dx \int Q_2 dx .. \int Q_{n-1} dx \int Q_n dx = \int Q_1 dx \int Q_2 dx .. \int Q'_{n-1} dx = \int \theta_{0,1} dx \qquad (22)$$

Съ другой стороны вообще въ выраженіи

$$Q_n \int \theta_{m-1,k} dx = Д^{n-2}_{n-3}.(P_n \int \theta_{m-1,k} dx).(Д^{n-2}_{n-1})^{-2} \qquad (23)$$

можемъ положить

$$P_n\int\theta_{m-1,k}dx=\Delta^{n-1}_{n,m}=\begin{vmatrix}\theta_{m,k}, & q_1, & q_2, & \dots q_{n-1}\\ \theta'_{m,k}, & q'_1, & q'_2, & \dots q'_{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \theta^{n-1}_{m,k}, & q^{n-1}_1, & q^{n-1}_2, & \dots q^{n-1}_{n-1}\end{vmatrix}=\sum_{p=n-1}^{p=0}P_{n-p-1}\theta^p_{m,k} \qquad (24)$$

тогда будемъ имѣть для опредѣленія $\theta_{m,k}$ линейное уравненіе $n-1$ порядка со второю частію вида

$$P_0\frac{d^{n-1}\theta_{m,k}}{dx^{n-1}}+P_1\frac{d^{n-2}\theta_{m,k}}{dx^{n-2}}+\dots+P_{n-2}\frac{d\theta_{m,k}}{dx}+P_{n-1}\theta_{m,k}=P_n\int\theta_{m-1,k}dx \qquad (25)$$

т. е. уравненіе тоже одинаковое съ (6), но лишь со второю частію. Помощію значенія $\theta_{m,k}$, найденнаго изъ (24) или (25) мы преобразуемъ выраженіе (23) въ слѣдующіе

$$P_n\int\theta_{m-1,k}dx=Д^{n-2}_{n-2}.\Delta^{n-1}_{n,m}.(Д^{n-2}_{n-1})^{-2}=\frac{d}{dx}\frac{Q^m_{n-1}}{Q_{n-1}} \qquad (26)$$

гдѣ Q^m_{n-1} отличается отъ Q_{n-1} только тѣмъ, что въ немъ вмѣсто q_{n-1} внесено $\theta_{m,k}$. При такихъ условіяхъ мы имѣемъ

$$\Phi\left(\int q_1dx\right)=\int\theta_{1,1}dx$$

$$\Phi\Phi\left(\int q_1dx\right)=\Phi\left(\int\theta_{1,1}dx\right)=\int\theta_{2,1}dx$$

$$\Phi\Phi\Phi\left(\int q_1dx\right)=\Phi\Phi\left(\int\theta_{1,1}dx\right)=\Phi\left(\int\theta_{2,1}dx\right)=\int\theta_{3,1}dx$$

. . . .

и такъ далѣе и вообще

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\int q_mdx\right)=\int\theta_{m,1}dx\\ &\Phi\Phi\Phi\dots\Phi\left(\int q_mdx\right)=\int\theta_{m,k}dx\end{aligned} \qquad (27)$$

На основаніи формулъ (27) ряды (17), представляющіе интегралы линейнаго уравненія n-го порядка вида (1), обратятся въ выраженія

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,0}dx=\int\Big[0+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,0}\Big]dx\\
y_2 &= \int q_1dx+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,1}dx=\int\Big[q_1+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,1}\Big]dx\\
y_3 &= \int q_2dx+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,2}dx=\int\Big[q_2+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,2}\Big]dx\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (28)\\
y_{m+1} &= \int q_mdx+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,m}dx=\int\Big[q_m+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,m}\Big]dx\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n &= \int q_{n-1}dx+\sum_{p=\infty}^{p=1}\int\theta_{p,n-1}dx=\int\Big[q_{n-1}+\sum_{p=\infty}^{p=1}\theta_{p,n-1}\Big]dx
\end{aligned}$$

гдѣ

$$0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ldots q_{n-1} \qquad (29)$$

суть частные интегралы уравненія $n-1$ порядка вида (6), а

$$\theta_{1,0},\ \theta_{1,1},\ldots\theta_{m,k},\ldots \qquad (30)$$

суть частные интегралы того-же самаго уравненія (6) лишь со второю частію, которая для каждаго изъ нихъ различна и измѣняется по простому закону.

Выраженіямъ (29) можно придать еще болѣе простую форму, соединяя интегралы (29) и (30) въ одну группу условіемъ, что указатель p принимаетъ всевозможныя значенія отъ 0 до ∞ и нулевое его значеніе опредѣляетъ интегралы уравненія (20) или (25) безъ второй части, т. е. уравненія (6), именно

$$\theta_{0,0}=0,\ \theta_{0,1}=q_1,\ \theta_{0,2}=q_2,\ldots\theta_{0,n-1}=q_{n-1}$$

При такихъ условіяхъ интегралы (28) будутъ имѣть видъ

$$
\left.
\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{p=\infty}^{p=0} \int \theta_{0,p} dx = \int \Big(\sum_{p=\infty}^{p=0} \theta_{0,p} \Big) dx \\
y_2 &= \sum_{p=\infty}^{p=0} \int \theta_{1,p} dx = \int \Big(\sum_{p=\infty}^{p=0} \theta_{1,p} \Big) dx \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_{m+1} &= \sum_{p=\infty}^{p=0} \int \theta_{m,p} dx = \int \Big(\sum_{p=\infty}^{p=0} \theta_{m,p} \Big) dx \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n &= \sum_{p=\infty}^{p=0} \int \theta_{n-1,p} dx = \int \Big(\sum_{p=\infty}^{p=0} \theta_{n-1,p} \Big) dx
\end{aligned}
\right\} \qquad (31)
$$

Формулы (28) и (31) представляютъ тѣ выраженія для интеграловъ линейнаго уравненія, выводъ которыхъ составляетъ предметъ настоящей статьи.

Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ.

И. В. Слешинскаго.

Zur Theorie der Methode der kleinsten Quadrate

Von J. Sleschinski.

Предисловіе.

Несмотря на большое число работъ, посвященныхъ исчисленію вѣроятностей [1]), въ новѣйшей литературѣ этого предмета встрѣчаемъ слѣдующее сужденіе [2]): «...darf es wol als allgemein anerkannt gelten, dass die umfangreichste Classe der die Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffenden Literatur in Bezug auf die principiellen Fragen nur sehr unzulängliches bietet: in den Schriften der Mathematiker nämlich findet man zwar den rechnenden Theil der Wahrscheinlichkeitstheorie in ausgezeichneter Weise entwickelt, daneben aber die Grundlagen der ganzen Lehre meist in einer Weise behandelt, welche an grossen Unklarheiten leidet und die mannigfaltigsten Zweifel bestehen lässt». Мы согласны съ авторомъ, что принципіальная сторона исчисленія вѣроятностей слабо обоснована. Но полагаемъ, что и аналитическая сторона также нуждается въ разработкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, сущность теоріи вѣроятностей заключается въ двухъ теоремахъ: законѣ большихъ чиселъ и теоремѣ, лежащей въ основаніи способа наименьшихъ квадратовъ. Какъ ни замѣчательны изслѣдованія Laplace'а [3]) и Poisson'а [4]) въ этой области,

---

[1]) См. Laurent. Traité du calcul des probabilités. Paris 1873. стр. 255--268.

[2]) Iohannes von Kries. Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg. 1886. стр. 1.

[3]) Théorie analytique des probabilités. 3 edition Paris 1820. стр. 275—303, 304—348.

[4]) Recherches sur la probabilité des jugements. стр. 7—13, 137—145, 246—318.

Sur la probabilité des résultats moyens des observations. Connaissance des tems... pour l'an 1827. Paris 1824. стр. 273—302.—Suite de Mémoire sur la probabilité du résultat moyen des observations. Conn. des tems pour l'an 1832. Paris 1829. стр. 3—22.

тѣмъ не менѣе онѣ не удовлетворяютъ необходимому требованію точности. Вотъ что говоритъ Чебышевъ по поводу доказательства Poisson'a закона большихъ чиселъ [1]); «Toute ingénieuse que soit la méthode employée par le celèbre Géomètre, il reste à être impossible de montrer la limite de l'erreur que peut admettre son analyse approximative et par cette incertitude de la valeur de l'erreur, sa démonstration n'est pas rigoureuse» Чебышевъ далъ два точныхъ доказательства закона большихъ чиселъ. [2]) Первое изъ нихъ основано на употребленіи логариѳмической строки. Второе требуетъ лишь простыхъ алгебраическихъ преобразованій. По поводу этого доказательства авторъ говоритъ слѣдующее [3]):» «Dans un mémoire très intéressant, sous plus d'un rapport, que M. Bienaymé a lu à l'Academie des Sciences en 1853, et que l'on trouve imprimé dans les Comptes Rendus, et reproduit dans le journal des Mathématiques pures et appliquées de M. Liouville (2 série. T. XII. 1867) sous le titre : Considérations à l'appui de la decouverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés — l'illustre savant donne une méthode qui mérite une attention toute particulière. Cette méthode consiste dans la détermination de la valeur limite de l'intégrale $\int_0^a f(x)dx$, d'après les valeurs

---

[1]) Crelle 33. (1846) Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités. стр. 259—267.

[2]) Опытъ елементарнаго анализа теоріи вѣроятностей. Сочиненіе написанное для полученія степени магистра кандидатомъ Чебышевымъ. Москва. 1845. Въ этой книгѣ, представляющей библіографическую рѣдкость, доказана лишь теорема Bernoulli, частный случай теоремы Poisson'a. Теорема Poisson'a доказана впервые въ работѣ, помѣщенной въ 33 томѣ журнала Crelle, цитированной выше. Затѣмъ, она доказана въ мемуарѣ «О среднихъ величинахъ» Мат. Сборникъ. Т. 2. 1867 г. Переводъ этого мемуара: «Des valeurs moyennes». Journ. de Math. 2 Sér. T. XI. стр. 177—184.

[3]) Journ. de Liouv. 2 Sér. T. XIX. 1874 г. стр. 157—160. «Sur les valeurs limites der intégrales».

des intégrales $\int_0^A f(x)dx,\ \int_0^A xf(x)dx,\ \int_0^A x^2 f(x)dx,\ldots\ldots ou\ A > a$ et $f(x)$ une fonction inconnue, assujetie seulement à la condition de garder le signe $+$ entre les limites d'intégration. La démonstration simple et rigoureuse de la loi de Bernoulli, que l'on trouve dans ma Note, sous le titre: Des valeurs moyennes, n'est, qu'un des résultats que l'on tire aisément de la méthode de M. Bienaymé et d'après laquelle il est parvenu lui même, à démontrer une proposition sur les probabilités, d'ou la loi de Bernoulli découle directement....». Хотя, такимъ образомъ, значительный пробѣлъ въ теоріи вѣроятностей былъ пополненъ Чебышевымъ [1]), но замѣчательныя изслѣдованія Laplace'а и Poisson'а остались однако неисправленными [2]) и въ такомъ видѣ продолжаютъ повторяться въ различныхъ книгахъ. Тоже самое можно сказать о способѣ наименьшихъ квадратовъ. Bienaymé характеризуетъ важность этого вопроса слѣдующими словами [3]) «La méthode des moindres carrés est si fréquemment employée aujourd'hui dans les sciences d'observation, que tout ce qui peut en rendre les applications plus sûres devient d'un grand interêt quelque simple qüe soit d'ailleurs.» Тѣмъ не менѣе Bienaymé продолжаетъ употреблять методъ Laplace'а, основанный на рядахъ, сходимость которыхъ остается недоказанной. Если

---

[1]) Болѣе чѣмъ странно въ новѣйшемъ курсѣ Bertrand'а (Calcul des probabilités. 1889), не только не встрѣтить имени Чебышева, но даже прочесть слѣдующія слова (стр. 94), «La généralisation proposée par Poisson sous le nom de loi des grands nombres manque non seulement de rigueur, mais de précision. Les conditions supposées dans l'énoncé échappent par le vague à toute appréciation mathématique». Это все, что говорится объ изслѣдованіи Poisson'а. Кстати замѣтить, что имя Bienaymé мы встрѣчаемъ въ этой книгѣ (стр. 295) безъ признанія заслугъ этого ученаго.

[2]) Доказательство Laurent'а l. c. содержитъ ошибку на стр. 103 въ строкѣ 13 сверху, которая существенно измѣняетъ заключенія.

[3]) Mémoire sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés. Mém. d. sav. etrang. XV. стр. 615—664. Также Journ. de Liouv. T. XVII. 1852.

принять въ соображеніе, что попытки доказательствъ Gauss'a [1]) содержатъ произвольныя допущенія, то должно признать, что Glaischer былъ правъ говоря [2]) «It is well known that all the proofs that have been given of the method of Least Squares contain, to say the least, some points of difficulty, and on this account any new investigation of the result is necessarily a matter of much interest». Лишь въ самое послѣднее время глубокія изслѣдованія въ области непрерывныхъ дробей привели Чебышева къ точному доказательству теоремы, лежащей въ основаніи способа наименьшихъ квадратовъ [3]). Въ основаніи доказательства лежитъ тотъ-же методъ, который привелъ къ доказательству закона большихъ чиселъ, но для приложенія его нужно было преодолѣть большія аналитическія трудности. При всей замѣчательности доказательства Чебышева, это доказательство нельзя назвать простымъ. Въ виду этого обстоятельства, а также въ виду важности вопроса, намъ казалось нелишеннымъ интереса напомнить объ изслѣдованіяхъ Cauchy, касающихся того же предмета. Способъ наименьшихъ квадратовъ былъ предметомъ спора, возникшаго въ 1853 году между Cauchy и Bienaymé. Этотъ-то интересный споръ былъ причиной появленія мемуара Bienaymé: «Sur l'appui...», о которомъ была рѣчь выше. Съ другой стороны тому-же спору наука обязана изслѣдованіями Cauchy, въ которыхъ содержится доказательство основной теоремы способа наименьшихъ квадратовъ при нѣкоторыхъ предположеніяхъ. Заслуги Cauchy, столь высоко цѣни

---

[1]) Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations. Par Ch Fr. Gauss. Trad. en franç. par Bertrand. Paris. 1855.

Bertrand. Calcul des Probabilités. Paris. 1889. стр. 247—258, 259—306.

См. также цитированную выше статью Bienaymé въ Mém. de Sav. etrang. стр. 619.

[2]) On the Law of Facility of Errors of observations and on the Method of Least Squares. Mem. of the r. astr. Soc. Part II. Vol XXXIX 1871—1872.

[3]) Записки Имп. акад. наукъ Т. 35. 1887. «О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей».

мыя въ другихъ отрасляхъ математики, остались, на сколько намъ извѣстно, почти незамѣченными въ области исчисленія вѣроятностей. Намъ казалось тѣмъ болѣе интереснымъ представить доказательство способа наименьшихъ квадратовъ по мемуарамъ Cauchy. Послѣдній изъ этихъ мемуаровъ, который содержалъ интересующее насъ доказательство, приведенъ въ Comptes Rendus въ краткомъ извлеченіи, передающемъ лишь одни результаты. Мы старались дать доказательство этихъ результатовъ, слѣдуя нѣкоторымъ указаніямъ, содержащимся въ предыдущихъ мемуарахъ Cauchy.

Прежде чѣмъ обратиться къ нашему предмету, мы позволимъ себѣ изложить вкратцѣ содержаніе спора о способѣ наименьшихъ квадратовъ. Поводомъ къ нему послужилъ написанный Cauchy во время пребыванія въ Прагѣ мемуаръ объ интерполяціи. Cauchy въ это время занимался теоріей свѣторазсѣянія [1]). Для этого изслѣдованія нужно было разлагать функціи въ ряды и Cauchy нашелъ способъ приближеннаго вычисленія коэффиціентовъ этихъ рядовъ по даннымъ значеніямъ функціи, разлагаемой въ рядъ; что приводилось къ рѣшенію линейныхъ уравненій. Мемуаръ, содержащій рѣшеніе этого вопроса, былъ литографированъ въ сентябрѣ 1835 года [2]). Затѣмъ онъ былъ напечатанъ въ журналѣ Liouville'a въ 1837 году [3]), впрочемъ съ пропускомъ приложеній къ свѣторазсѣянію [4]). Восемнадцать лѣтъ спустя Cauchy вернулся къ тому-же предмету и въ 36 томѣ Comptes Rendus напечаталъ помѣщенную въ отчетѣ о засѣданіи 27 Іюня статью: Mémoire sur l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations approximatives du premier degré. Этотъ мемуаръ начинается словами: «Comme l'a remarqué M. Faye, la nouvelle méthode d'interpola-

---

[1]) Valson. La vie et les travaux de Baron Cauchy T. 1. стр. 91.
[2]) Valson. l. c. стр. 31. Также Journ. de Liouv. T. 2. 1837. стр. 193.
[3]) Mémoire sur l'interpolation. Стр. 193—205.
[4]) Comptes Rendus. T. 37. стр. 108.

tion que j'ai donné dans un mémoire litographié en 1835, peut être utilement appliquée à l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations approximatives du premier degré». Дальше излагается тотъ-же способъ, что и въ предыдущемъ мемуарѣ, но въ другомъ видѣ, а именно — безъ связи съ разложеніемъ въ ряды. Способъ этотъ состоитъ въ послѣдовательномъ исключеніи неизвѣстныхъ изъ линейныхъ уравненій слѣдующимъ образомъ. Всякій разъ изъ оставшихся неизвѣстныхъ выбирается для исключенія то, для котораго сумма абсолютныхъ величинъ коэффиціентовъ въ различныхъ уравненіяхъ—наибольшая. Затѣмъ, измѣнивъ знаки въ уравненіяхъ, гдѣ коэффиціенты этого неизвѣстнаго отрицательны, складываемъ всѣ уравненія измѣненной такимъ образомъ системы. Рѣшивъ результатъ относительно исключаемаго неизвѣстнаго, подставляемъ выраженіе его въ каждое изъ уравненій. Такимъ образомъ получаемъ систему такого-же числа уравненій, содержащую одной неизвѣстной меньше и т. д. Уравненія, которыя служатъ для опредѣленія исключаемыхъ неизвѣстныхъ, образуютъ систему, въ которой каждое послѣдующее уравненіе содержитъ одной неизвѣстной меньше и служатъ для опредѣленія неизвѣстныхъ. Въ концѣ мемуара Cauchy показываетъ способъ перехода отъ полученныхъ такимъ образомъ значеній неизвѣстныхъ къ тѣмъ значеніямъ, которыя опредѣляются по способу наименьшихъ квадратовъ и высказываетъ убѣжденіе, что результаты двухъ методовъ вообще весьма близки между собою. Этотъ-то мемуаръ и былъ началомъ спора. Добавленіе, сдѣланное въ немъ и касающееся способа наименьшихъ квадратовъ, вызвано было возраженіемъ Bienaymé, статья котораго была напечатана нѣсколько позже, а именно въ отчетѣ о засѣданіи 4 Іюля (томъ 37). Статья Bienaymé носитъ заглавіе «Remarques sur les différences qui distinguent l'interpolation de M. Cauchy de la méthode des moindres carrés, et qui assurent la superiorité de cette méthode». Вотъ начало этого мемуара: «Depuis quelque temps, l'attention de plusieurs observa-

teurs s'est portée sur une méthode d'interpolation que M. Cauchy a publiée en 1835 et il semble qu'on ait regardé cette méthode comme ayant quelque chose d'analogue aux avantages de la célèbre méthode des moindres carrés. Il serait fâcheux, que les observateurs fussent trompés à cet égard par ce qui a pu être des deux méthodes, car elles diffèrent complétement, et si le procédé de M. Cauchy témoigne, comme tout ce qui sort de sa plume, de l'ingénieuse industrie, qu'il sait apporter jusque dans les questions pratiques, ce procédé n'en est pas moins tout à fait en contradiction avec les principes du calcul des probabilités». Далѣе авторъ, не оспаривая метода интерполяціи Cauchy, показываетъ, что множители, при помощи которыхъ Cauchy производитъ исключеніе неизвѣстныхъ, отличны отъ множителей способа наименьшихъ квадратовъ. Въ концѣ Bienaymé возражаетъ также противъ соединенія обоихъ методовъ, предлагаемаго Cauchy, находя, что это повело-бы къ удвоенію вычисленій. Въ отвѣтъ на это возраженіе Cauchy помѣстилъ въ отчетѣ о засѣданіи 18 Іюля статью подъ заглавіемъ: Mémoire sur l'interpolation ou Remarques sur les Remarques de M. Jules Bienaymé, въ которой приходитъ къ заключенію, что каждый изъ двухъ методовъ имѣетъ свои преимущества и что его методъ, главнымъ образомъ, предназначается для тѣхъ случаевъ, когда число неизвѣстныхъ напередъ не дано, какъ напримѣръ, число коэффиціентовъ безконечнаго ряда, которые должно удержать, ограничиваясь извѣстною степенью приближенія. Не удовлетворяясь однако этимъ, Cauchy переноситъ споръ отчасти на новый предметъ, а именно на состоятельность метода наименьшихъ квадратовъ независимо отъ сравненія его съ другими методами. Именно, въ отчетѣ о засѣданіи 25 Іюля помѣщенъ мемуаръ Cauchy подъ заглавіемъ «Sur la nouvelle méthode d'interpolation comparée à la méthode des moindres carrés. Этотъ мемуаръ заканчивается словами «Il est vrai que les calculs de Laplace assignent à la méthode des moindres

carrés une propriété importante, celle de fournir, comme le remarque M. Bienaymé, les résultats les plus probables. Mais cette propriété ne subsiste, comme je l'expliquerai dans un autre article, que sous certaines conditions; et alors même que ces conditions sont remplies, il peut se faire que, pour obtenir les résultats les plus probables, la voie la plus courte soit de joindre à la nouvelle méthode, la méthode de correction dont j'ai parlé». Для доказательства этихъ утвержденій Cauchy пришлось заняться критическимъ разборомъ доказательствъ способа наименьшихъ квадратовъ. Въ отчетѣ о засѣданіи 1 Августа Cauchy помѣщаетъ мемуаръ подъ заглавіемъ: «Mémoire sur les coefficients limitateurs ou restricteurs» въ которомъ изложено, въ иной формѣ, преобразованіе Dirichlet многократнаго интеграла къ постояннымъ предѣламъ. Именно, Cauchy пользуется для этой цѣли разрывнымъ множителемъ

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\theta\int_{\omega'}^{\omega''}dt\; e^{\theta(\tau-\omega)i},$$

который равенъ *1* для значеній ω, заключающихся между ω' и ω'', и равенъ нулю для значеній, лежащихъ внѣ этого промежутка. Въ концѣ этого мемуара Cauchy прилагаетъ сказанное преобразованіе къ нахожденію вѣроятности, что ошибка средняго результата содержится внутри данныхъ предѣловъ. Затѣмъ онъ разсматриваетъ подробно частный случай, когда функція, выражающая вѣроятность ошибки, имѣетъ видъ, указанный Gauss'омъ

$$f(\varepsilon)=Ke^{-k\varepsilon}$$

и для этого частнаго случая приходитъ къ способу наименьшихъ квадратовъ. Вслѣдъ за тѣмъ, въ мемуарѣ, напечатанномъ въ отчетѣ о засѣданіи 8 Августа подъ заглавіемъ: «Sur les résultats moyens d'observations de même nature et sur les résultats les plus probables», Cauchy старается рѣшить общій

вопросъ, т. е. изслѣдовать, по скольку способъ наименьшихъ квадратовъ даетъ наиболѣе вѣроятные результаты при произвольной функціи $f(\varepsilon)$. Исходя при этомъ отъ требованія, чтобы значенія множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, обращающія въ maximum вѣроятность предположенія, что линейная функція

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$$

ошибокъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ заключается между предѣлами $\pm\,\upsilon$, не зависѣли отъ υ, онъ находитъ, что должно

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-c\theta^N} \, Cos\theta\varepsilon d\theta \;,$$

гдѣ c и N суть постоянныя. Случай $N=2$ приводитъ къ способу наименьшихъ квадратовъ. Въ случаѣ-же $N=1$, получается

$$f(\varepsilon) = \frac{k}{\pi} \cdot \frac{1}{1+k^2\varepsilon^2}, \text{ гдѣ } k = \frac{1}{c} \,.$$

Въ этомъ случаѣ наиболѣе вѣроятное значеніе не получается по способу наименьшихъ квадратовъ. — Въ то время, какъ Bienaymé обѣщаетъ привести въ защиту результатовъ Laplace'а вѣскія соображенія, Cauchy въ засѣданіи 16 Августа читаетъ мемуаръ «Sur la probabilité des erreurs qui affectent des résultats moyens d'observations de même nature», въ которомъ, продолжая изслѣдованія, изложенныя въ предыдущемъ мемуарѣ, приходитъ въ концѣ къ такому заключенію: «la valeur la plus probable x de l'inconnue x peut différer sensiblement de celle qui fournit la méthode des moindres carrés». Онъ задается однако вопросомъ, не имѣетъ-ли способъ наименьшихъ квадратовъ преимуществъ передъ другими способами при достаточно большомъ числѣ наблюденій и представляетъ въ томъ-же засѣданіи «Mémoire sur la probabilité des erreurs qui affectent les résultats moyens d'un grand nombre d'observations». Между тѣмъ, въ отвѣтъ на сомнѣнія, возбуждаемыя изслѣдованіями Cauchy, Bienaymé въ засѣданіи 29 августа сообщаетъ знаме-

нитый мемуаръ «Considérations á l'appui...», о которомъ мы говорили выше. Въ этомъ мемуарѣ Bienaymé выражаетъ между прочимъ убѣжденіе, что формулы, которыя Cauchy даетъ въ предыдущихъ мемуарахъ, могутъ, при надлежащемъ примѣненіи, привести къ доказательству способа наименьшихъ квадратовъ при произвольной функціи $f(\varepsilon)$. Въ отчетѣ о преніяхъ, которыя имѣли мѣсто по поводу этого сообщенія, сказано на основаніи возраженія Cauchy слѣдующее: «L'analyse à l'aide de laquelle on avait établi les propriétés de la méthode des moindres carrés s'appuyait sur des séries dont la convergence n'est pas démontrée. M. Cauchy a remplacé cette analyse par des formules exactes et rigoureuses». Хотя Cauchy въ своемъ возраженіи не отрицалъ возможности доказать методъ наименьшихъ квадратовъ при помощи выведенныхъ имъ формулъ, однако въ мемуарѣ: «Sur la plus grande erreur à craindre dans un résultat moyen, et sur le systeme de facteurs qui rend cette plus grande erreur un minimum», напечатаномъ въ отчетѣ о томъ-же засѣданіи, онъ пришелъ къ отрицательному рѣшенію вопроса, даетъ-ли способъ наименьшихъ квадратовъ наивѣроятнѣйшіе результаты даже при достаточно большомъ n. Это мнѣніе основано было однако на выводахъ, полученныхъ лишь вслѣдствіе несовершенства формулъ, состоящаго въ слишкомъ грубомъ приближеніи къ точной формулѣ. При дальнѣйшемъ изслѣдованіи Cauchy самъ устраняетъ эти несовершенства въ послѣднемъ мемуарѣ: «Mémoire sur les résultats moyens d'un très grand nombre d'observations». Этотъ мемуаръ не былъ напечатанъ и въ отчетѣ о засѣданіи 5 Сентября мы находимъ лишь краткое извлеченіе изъ него. Этимъ мемуаромъ заканчивается споръ, который, какъ мы уже говорили, имѣлъ столь важное значеніе въ развитіи теоріи вѣроятностей. Въ результатѣ выяснилось, что истина была на сторонѣ Bienaymé, и Cauchy не замедлилъ въ концѣ концовъ прійти къ ней, подвергнувъ основательному сомнѣнію прежнія доказательства и проложивъ новый путь.

Введеніе.

Прежде чѣмъ перейти къ доказательству основной теоремы способа наименьшихъ квадратовъ, прослѣдимъ главные моменты въ ряду разсужденій, составляющихъ это доказательство.

Вообразимъ систему линейныхъ уравненій

$$\left.\begin{array}{c} a_{1,l}x_1+a_{2,l}x_2+\ldots+a_{m,l}x_m=u_l \\ l=1,2,\ldots n\ , \end{array}\right\} \quad (1)$$

гдѣ $a_{i,k}$—данныя числа, x_i—числа, выражающія значенія искомыхъ величинъ, u_i—числа, выражающія точно значенія наблюдаемыхъ величинъ. Если величины, выражающіяся числами x_i существуютъ, то система уравненій остается справедливой при всякомъ числѣ n. Для опредѣленія x_1 умножимъ эти уравненія соотвѣтственно на λ_1, $\lambda_2,\ldots\lambda_n$ и сложимъ полученные результаты. Затѣмъ выберемъ λ_1, $\lambda_2,\ldots\lambda_n$ такъ, чтобы удовлетворить уравненіямъ

$$\sum_{l=1}^{n} a_{1,l}\lambda_l=1, \sum_{l=1}^{n} a_{2,l}\lambda_l=o,\ldots \sum_{l=1}^{n} a_{m,l}\lambda_l=o\ . \quad (2)$$

Тогда найденный отъ сложенія уравненій результатъ обратится въ

$$x_1=\sum_{l=1}^{n} u_l\lambda_l\ . \quad (3)$$

Такимъ образомъ найдется значеніе x_1, если будутъ извѣстны значенія λ_l. Для опредѣленія значеній λ_l, имѣемъ уравненія (2), число которыхъ—m. Мы предполагаемъ что $n>m$ и, слѣдовательно, имѣемъ уравненій больше, чѣмъ неизвѣстныхъ. По-

этому вообще существуетъ безконечное множество системъ значеній λ_l, удовлетворяющихъ условіямъ (2) и опредѣляющихъ x_1. Если между n уравненіями есть покрайней мѣрѣ m независимыхъ, то каждая изъ системъ значеній λ_l даетъ одинъ и тотъ-же результатъ—искомое значеніе x_1. Но на самомъ дѣлѣ $u_l = k_l + \varepsilon_l$, гдѣ k_l получается изъ наблюденій, а ε_l представляетъ ошибку при наблюденіи. Вслѣдствіе этого

$$x_1 = \sum_{l=1}^{n} k_l\lambda_l + \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l\lambda_l = \sum_{l=1}^{n} k_l\lambda_l + \xi_1 \quad ,$$

гдѣ $\sum_{l=1}^{n} k_1\lambda_1$—значеніе x_1, получаемое по этому способу исключенія изъ системы уравненій, даваемой наблюденіями (уравненій, вообще несовмѣстныхъ), а ξ_1 ошибка въ этомъ значеніи. Ошибка

$$\xi_1 = \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l\lambda_l$$

остается, конечно, неизвѣстной намъ, потому что неизвѣстны ошибки ε_1, ε_2,...ε_n. Не существуетъ возможности путемъ анализа найти наиболѣе близкій къ истинѣ результатъ. Совершенно не зная величины ε, мы должны допустить, что она можетъ принимать всевозможныя значенія внутри извѣстныхъ предѣловъ. Если мы предположимъ дальше, что съ каждымъ значеніемъ ε связана опредѣленная вѣроятность его существованія, то окажется возможнымъ найти вѣроятность предположенія, что ошибка ξ заключается между предѣлами $-\upsilon$ и $+\upsilon$. При каждой величинѣ вѣроятности такого предположенія предѣлы $\pm\upsilon$ будутъ зависѣть отъ значеній λ_l. Изъ всѣхъ системъ значеній λ_l, удовлетворяющихъ уравненіямъ (2), можно искать той, для которой υ имѣетъ наименьшее значеніе, т. е. ошибка, отвѣчающая опредѣленной вѣроятности, становится возможно малою. Такой выборъ будетъ наиболѣе выгоднымъ. Однако сдѣлать его безъ

дальнѣйшихъ предположеній невозможно, ибо въ формулы входитъ совершенно неизвѣстная намъ функція, выражающая законъ вѣроятностей ошибокъ. Но оказывается, что съ увеличеніемъ n до ∞ вѣроятность предположенія, что ошибка ξ заключается между $\pm\upsilon$, приближается все больше и больше къ величинѣ, независящей отъ закона вѣроятностей ошибокъ:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\upsilon}{2\sqrt{c\Lambda}}} d\alpha\, e^{-\alpha^2},$$

гдѣ c нѣкоторое постоянное, а $\Lambda = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_i^2$. Если положимъ $\upsilon = 2t\sqrt{c\Lambda}$, то выйдетъ, что, выбравъ n достаточно большимъ, можемъ съ вѣроятностью сколь угодно близкой къ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t} d\alpha\, e^{-\alpha^2}$$

утверждать, что ξ заключается между предѣлами $\pm 2t\sqrt{c\Lambda}$. Но эти предѣлы будутъ наиболѣе тѣсными если Λ т. е. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ будетъ minimum. Итакъ изъ безчисленнаго множества системъ значеній λ_i, удовлетворяющихъ уравненіямъ (2), лучше всего выбрать ту, которая доставляетъ функціи этихъ перемѣнныхъ Λ наименьшую величину. Опредѣленіе такой системы значеній представляетъ непосредственное приложеніе теоріи наибольшихъ и наименьшихъ функцій отъ многихъ перемѣнныхъ и легко показать, что значенія x, получаемыя при помощи такихъ множителей λ, суть именно тѣ, которыя получаются по способу наименьшихъ квадратовъ.

Возвратимся теперь къ вѣроятности предположенія, что ошибка ξ заключается между предѣлами $\pm\upsilon$. Если представимъ вѣроятность предположенія, что ошибка наблюденія не превосходитъ величины ε, въ видѣ

$$F(\varepsilon)=\left|\int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha)\right| ,$$

то легко доказать, что вѣроятность предположенія, что

$$\xi=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n$$

заключается между $\pm\upsilon$, выразится формулой

$$P=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha} ,$$

гдѣ

$$\Phi(\alpha)=\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha)$$

$$\varphi(\alpha)=\int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\, e^{\alpha\varepsilon i} ,$$

а $\varkappa$ означаетъ величину, которой не можетъ превосходить никакая ошибка. Вся трудность заключается въ преобразованіи этого интеграла, дозволяющемъ прослѣдить переходъ къ предѣлу $n=\infty$. Если предположить, что $f(-\varepsilon)=f(\varepsilon)$, то

$$\varphi(\alpha)=2\int_0^\varkappa d\varepsilon f(\varepsilon) Cos\alpha\varepsilon .$$

Разложивъ $Cos\alpha\varepsilon$ въ рядъ и ограничиваясь двумя первыми членами разложенія, имѣемъ

$$\varphi(\alpha)=2\int_0^\varkappa d\varepsilon f(\varepsilon)-\alpha^2\int_0^\varkappa d\varepsilon\,.\,\varepsilon^2 f(\varepsilon)$$

Но
$$2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) = \int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) = 1\,,$$
ибо представляетъ вѣроятность, что ошибка принимаетъ одно изъ всѣхъ тѣхъ значеній, какія вообще возможны для нея (со включеніемъ значенія o). Если обозначимъ $\int_0^{\varkappa} d\varepsilon\,.\,\varepsilon^2 f(\varepsilon)$ чрезъ c, то получимъ приближенно
$$\varphi(\alpha) = 1 - c\alpha^2$$
Но
$$e^{-c\alpha^2} = 1 - c\alpha^2 + ..$$
Поэтому приближенно
$$\varphi(\alpha) = e^{-c\alpha^2}\,.$$
Вслѣдствіе этого
$$\Phi(\alpha) = e^{-c\alpha^2\Lambda}\,.$$
Поэтому приближенно
$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha\, e^{-c\alpha^2\Lambda}\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha}\,,$$
что, при помощи извѣстной формулы преобразованія, переходитъ въ
$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\upsilon}{2\sqrt{c\Lambda}}} d\alpha\, e^{-\alpha^2}$$
Такимъ образомъ мы приходимъ къ формулѣ, приведенной выше. Такой переходъ не позволяетъ дѣлать никакихъ точныхъ заключеній, ибо приближенное выраженіе для $\varphi(\alpha)$ будетъ

сколь угодно близко къ истинному лишь при достаточно маломъ α Между тѣмъ какъ въ выраженіи P, перемѣнное α возрастаетъ до ∞. Поэтому, для точнаго изслѣдованія P, приходится разбить это выраженіе на два слагаемыхъ:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha} \text{ и } \frac{2}{\pi}\int_\theta^\infty d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha}.$$

Теперь можно выбрать θ достаточно большимъ, чтобы сдѣлать второе слагаемое произвольно малымъ. Для доказательства этого утвержденія приходится пользоваться замѣчательнымъ свойствомъ функціи $\varphi(\alpha)$, по которому

$$\frac{1-\varphi^2(\alpha)}{\alpha^2\varphi^2(\alpha)}$$

при вещественныхъ значеніяхъ α остается больше нѣкоторой отличной отъ 0 величины. Послѣ этого остается заняться первой частью т. е.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha}.$$

Такъ какъ α въ интегралѣ принимаетъ значенія, непревышающія θ, то аргументы функцій φ, входящихъ въ Φ не превышаютъ значеній $\lambda_1\theta, \lambda_2\theta, \ldots \lambda_n\theta$ и, при сколь угодно большомъ θ, если λ достаточно малы, могутъ быть сдѣланы достаточно малыми для того, чтобы можно было замѣнить $\Phi(\alpha)$ чрезъ

$$e^{-c\Lambda\alpha^2}.$$

Вслѣдствіе чего получится выраженіе

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\, e^{-c\alpha^2\Lambda}\,\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha},$$

отъ котораго легко перейти къ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\, e^{-c\alpha^2\Lambda}\,\frac{Sin\alpha\nu}{\alpha}\,,$$

потому что функція $e^{-c\alpha^2\Lambda}$ чрезвычайно быстро убываетъ съ увеличеніемъ α и, вслѣдствіе этого, расширеніе предѣловъ до ∞ даетъ прибавку сколь угодно малую.

Итакъ видимъ, что переходъ отъ выраженія P къ окончательному простому результату раздѣляется на три перехода: 1) съуженіе предѣловъ интеграціи, 2) замѣна функціи подъ знакомъ интеграла, 3) расширеніе предѣловъ интеграціи. Для выполненія перваго изъ этихъ переходовъ необходимо знаніе вышеуказаннаго свойства функціи φ. Для втораго перехода необходимо преобразованіе

$$\int_0^\infty dt\, e^{-t^2}\frac{Sin2at}{t}=\sqrt{\pi}\int_0^a dt\, e^{-t^2}$$

Это преобразованіе, равнымъ образомъ и преобразованіе Dirichlet многократнаго интеграла къ постояннымъ предѣламъ мы предполагаемъ въ настоящей статьѣ извѣстными [1]).

[1]) Для точнаго обоснованія послѣдняго преобразованія должно изслѣдовать возможность измѣненія порядка интеграціи въ многократныхъ интегралахъ съ безконечными предѣлами. Stolz первый, на сколько намъ извѣстно, коснулся этого предмета въ статьѣ: «Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlichen zu den dadurh sich ergebenden Grenzwerthen, dass einige derselben constanten Werthen sich nähern». Результаты Stolz'а могутъ быть распространены на нѣкоторые случаи неравномѣрной сходимости и на случай многократныхъ интеграловъ. Этому вопросу мы надѣемся посвятить особую статью.

Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ.

1. Подъ функціей $f(x)$ мы будемъ разумѣть функцію, обладающую слѣдующими свойствами. Для вещественныхъ значеній перемѣнной x, заключающихся въ промежуткѣ $-\varkappa \ldots +\varkappa$, гдѣ $\varkappa$ нѣкоторое конечное положительное число, эта функція однозначна, конечна, положительна и имѣетъ для каждаго значенія перемѣнной опредѣленную производную. Для вещественныхъ значеній, лежащихъ внѣ этого промежутка, $f(x)=o$. Сверхъ того $f(-x)=f(x)$.

Изъ допущенія существованія производной вытекаетъ, что функція непрерывна и, слѣдовательно, интегрируема въ каждомъ конечномъ промежуткѣ [1]). По той-же причинѣ будутъ интегрируемы и произведенія

$$f(\varepsilon) Cos \alpha\varepsilon \text{ и } f(\varepsilon)\varepsilon^n$$

Подъ функціей $\varphi(x)$ будемъ разумѣть функцію, опредѣляемую равенствомъ

$$\varphi(x)=\int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) Cos x\varepsilon \;.$$

Такъ какъ $f(-\varepsilon)=f(\varepsilon)$, то $\varphi(x)=2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) Cos x\varepsilon$

и

$$\varphi(-x)=\varphi(x).$$

[1]) *Dini.* Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderichen reellen Grösse. Deutsch bearbeitet von Lüroth und Schepp. Leipzig 892. § 187.

Легко видѣть, что функція $\varphi(x)$ есть цѣлая трансцендентная функція. Въ самомъ дѣлѣ, рядъ

$$f(\varepsilon) Cos x\varepsilon = f(\varepsilon) - \frac{x^2\varepsilon^2}{2!} f(\varepsilon) + \frac{x^4\varepsilon^4}{4!} f(\varepsilon) \ldots$$

сходится равномѣрно, при каждомъ данномъ значеніи x, для всѣхъ конечныхъ значеній ε. Поэтому можно интегрировать этотъ рядъ почленно [1]). Такимъ образомъ, введя обозначенія

$$c_n = \int_0^\varkappa d\varepsilon . \varepsilon^{2n} f(\varepsilon) \ ,$$

получимъ

$$\varphi(x) = 2\int_0^\varkappa d\varepsilon f(\varepsilon) Cos x\varepsilon$$

$$= 2c_0 - \frac{2c_1}{2!} x^2 + \frac{2c_2}{4!} x^4 - \ldots$$

Но

$$c_n = \int_0^\varkappa d\varepsilon . \varepsilon^{2n} f(\varepsilon) \leqq \varkappa^{2n} \int_0^\varkappa d\varepsilon f(\varepsilon) \quad ,$$

т. е.

$$c_n \leqq c_0 \varkappa^{2n} \ .$$

Поэтому коэффиціенты ряда, выражающаго $\varphi(x)$ будутъ, по абсолютной величинѣ, не больше коэффиціентовъ ряда

$$2c_0 + 2c_0 \frac{\varkappa^2}{2!} x^2 + 2c_0 \frac{\varkappa^4}{4!} x^4 + \ldots$$

Но этотъ послѣдній рядъ сходится для всякаго конечнаго значенія x. Поэтому рядъ, выражающій $\varphi(x)$, обладаетъ тѣмъ-же

---

[1]) Dini. l. c. § 278.

свойствомъ, т. е. $\varphi(x)$ представляетъ цѣлую трансцендентную функцію.

2. Переходя къ теоріи ошибокъ, мы примемъ за исходную точку понятіе о вѣроятности предположенія, что ошибка наблюденія заключается между o и ε или равна меньшему изъ этихъ чиселъ и придадимъ этой вѣроятности слѣдующую форму

$$F(\varepsilon)=\left|\int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha)\right|,$$

т. е.

$$F(\varepsilon)=\int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha) \qquad \text{при } \varepsilon > o$$

$$F(\varepsilon)=\int_\varepsilon^0 d\alpha f(\alpha) \qquad \text{при } \varepsilon < o$$

Отсюда вѣроятность предположенія, что ошибка содержится между a и b или равна меньшему изъ нихъ, выражается такъ

$$\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right|$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть сначала будетъ $b>a$. Тогда возможны случаи: 1) $a>o$, 2) $a<o$, $b>o$, 3) $a<o$, $b<o$. Обозначимъ черезъ R вѣроятность, что ошибка заключается между a и b или равна меньшему изъ этихъ чиселъ. Тогда въ первомъ случаѣ

$$F(a)=\int_0^a d\alpha f(\alpha)\ , \quad F(b)=\int_0^b d\alpha f(\alpha)\ .$$

Но, по теоремѣ о сложеніи вѣроятностей, вѣроятность, что ошибка равна или больше O, но меньше b, равняется суммѣ вѣроятности,

что она равна или больше O, но меньше a и вѣроятности, что она равна или больше a, но меньше b, т. е.

$$F(b)=F(a)+R.$$

Отсюда

$$R=F(b)-F(a)=\int_a^b d\alpha f(\alpha)=\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right| .$$

Во второмъ случаѣ

$$F(a)=\int_a^0 d\alpha f(\alpha)\,, \quad F(b)=\int_0^b d\alpha f(\alpha)\ ,$$

$$R=F(a)+F(b)=\int_a^b d\alpha f(\alpha)=\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right| .$$

Въ третьемъ случаѣ

$$F(a)=\int_a^0 d\alpha f(\alpha)\,, \quad F(b)=\int_b^0 d\alpha f(\alpha)\ ,$$

$$F(a)=R+F(b)\ ,$$

$$R=F(a)-F(b)=\int_a^b d\alpha f(\alpha)=\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right|.$$

Пусть теперь будетъ $b<a$. Тогда, по только-что доказанному,

$$\left|\int_b^a d\alpha f(\alpha)\right|$$

выразитъ вѣроятность, что ошибка содержится между a и b или равна меньшему изъ этихъ чиселъ (въ данномъ случаѣ b).

Но

$$\left|\int_b^a d\alpha f(\alpha)\right|=\left|\int_a^b d\alpha f(\alpha)\right|$$

Слѣдовательно утвержденіе наше всегда справедливо.

Далѣе, мы предполагаемъ что никакая ошибка по абсолютной величинѣ не можетъ превосходить $\varkappa$, т. е. что значенія отъ $-\varkappa$ до $+\varkappa$ представляютъ всевозможныя значенія ошибки. Согласно съ этимъ мы должны предположить, что

$$\int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) = 1 \quad , \tag{1}$$

ибо лѣвая часть представляетъ вѣроятность, что ошибка содержится внутри предѣловъ $\pm\varkappa$, что достовѣрно. Замѣтимъ, что если функція $f_1(\varepsilon)$ не удовлетворяетъ этому требованію, то достаточно взять

$$f(\varepsilon) = kf_1(\varepsilon)$$

и выбрать k такъ, чтобы условіе (*1*) было удовлетворено. Для этого должно быть:

$$k\int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f_1(\varepsilon) = 1$$

т. е.

$$k = \frac{1}{\int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f_1(\varepsilon)} \quad .$$

Такъ какъ $f(-\varepsilon) = f(\varepsilon)$, то изъ (*1*) слѣдуетъ, что

$$\int_{0}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \tag{2}$$

3. **Теорема.** Вѣроятность, что сумма

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n,$$

гдѣ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$—величины ошибокъ, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$—данныя числа, заключается между предѣлами $\pm\upsilon$, выражается формулой

$$P = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha \Phi(\alpha) \frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha} \quad ,$$

гдѣ $$\Phi(\alpha)=\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha).$$

Доказательство. Вѣроятность, что ошибка наблюденія содержится между ε и $\varepsilon+d\varepsilon$ выражается, по *2*, такъ:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+d\varepsilon} d\alpha f(\alpha)\right|$$

или, при $$d\varepsilon>o,$$

$$d\varepsilon f(\varepsilon+\theta d\varepsilon),$$

гдѣ $$o<\theta<1.$$

Поэтому вѣроятность, что при n наблюденіяхъ получились ошибки, заключающіяся между ε_1 и $\varepsilon_1+d\varepsilon_1$, ε_2 и $\varepsilon_2+d\varepsilon_2$,.. ε_n и $\varepsilon_n+d\varepsilon_n$ выразится, по теоремѣ объ умноженіи вѣроятностей, произведеніемъ

$$f(\varepsilon_1+\theta_1 d\varepsilon_1)f(\varepsilon_2+\theta_2 d\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n+\theta_n d\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_n. \qquad (1)$$

Вообразимъ теперь, что каждое изъ чиселъ ε_ν принимаетъ значенія, образующія ариѳметическую прогрессію съ разностью $d\varepsilon_\nu$ и содержащіяся между $-\varkappa$ и $+\varkappa$. Возьмемъ сумму выраженій, подобныхъ (*1*), распространяя суммованіе на всѣ значенія ε_ν, удовлетворяющія условію

$$-\upsilon<\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n<\upsilon. \qquad (2)$$

Такимъ образомъ получимъ выраженіе

$$\sum\sum\ldots\sum f(\varepsilon_1+\theta_1 d\varepsilon_1)f(\varepsilon_2+\theta_2 d\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n+\theta_n d\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_n,$$

представляющее вѣроятность, что ошибки $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\varepsilon_n$ содержатся внутри области, границы которой опредѣляются разсматриваемыми значеніями ε_ν, удовлетворяющими условію (*2*). Если перейдемъ къ предѣлу, отвѣчающему $\lim d\varepsilon_\nu=o$, то получимъ вѣроятность,

что ошибки удовлетворяютъ условію (2). Предѣлъ этотъ будетъ

$$P=\int\int\ldots\int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_n f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n),$$

гдѣ интеграція распространяется на всѣ значенія $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, удовлетворяющія условію (2). Къ этому интегралу приложимъ преобразованіе Dirichlet [1]), основанное на свойствѣ интеграла

$$J=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha} e^{i\alpha(\lambda_1\varepsilon_1+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n)}$$

водиться къ 1 для значеній ε_ν, для которыхъ

$$\lambda_1\varepsilon_1+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n$$

заключается между $-\upsilon$ и $+\upsilon$; и—къ нулю для значеній, для которыхъ это выраженіе заключается внѣ того-же промежутка. Такимъ образомъ получимъ:

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha}\int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon_1 f(\varepsilon_1) e^{i\alpha\lambda_1\varepsilon_1}\ldots\int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon_n f(\varepsilon_n) e^{i\alpha\lambda_n\varepsilon_n}.$$

Замѣтивъ, что $f(-\varepsilon)=f(\varepsilon)$, и поэтому

$$\int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) Sin\alpha\varepsilon = o,$$

находимъ, что

$$\int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) e^{i\alpha\varepsilon} = \int_{-\varkappa}^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) Cos\alpha\varepsilon = \varphi(\alpha).$$

---

[1]) См. Meyer. Vorlesungen über die Theorie der best. Int. §§. 174, 175.

Положивъ

$$\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha)=\Phi(\alpha),$$

находимъ

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha v}{\alpha}.$$

Но

$$\varphi(-\alpha)=\varphi(\alpha)$$

Поэтому

$$\Phi(-\alpha)=\Phi(\alpha).$$

и, слѣдовательно,

$$P=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha v}{\alpha}.$$

4. **Теорема.** Если $x<\frac{1}{\varkappa}$, то

$$\varphi(x)=e^{-\zeta cx^2}, \text{ гдѣ } c=\int_0^{\varkappa}d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) \text{ и}$$

$$1-\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2<\zeta<\frac{1}{1-cx^2}.$$

Доказательство. Такъ какъ

$$Cos x\varepsilon=1-2Sin^2\frac{x\varepsilon}{2},$$

то

$$\varphi(x)=2\int_0^{\varkappa}d\varepsilon f(\varepsilon)Cos x\varepsilon=2\int_0^{\varkappa}d\varepsilon f(\varepsilon)-4\int_0^{\varkappa}d\varepsilon f(\varepsilon)Sin^2\frac{x\varepsilon}{2}$$

Но, по 2[(2)],

$$\int_0^{\varkappa}d\varepsilon f(\varepsilon)=\frac{1}{2}.$$

Поэтому будетъ

$$\varphi(x)=1-\int_0^x d\xi f(\xi)\left(2Sin\frac{x\xi}{2}\right)^2 . \tag{1}$$

Приложивъ теорему

$$\psi(\xi)=\psi(o)+\xi\psi'(\eta\xi) , \quad o<\eta<1 \tag{2}$$

къ функціи

$$\psi(\xi)=log(1-\xi) ,$$

имѣемъ

$$log(1-\xi)=-\xi\frac{1}{1-\eta\xi}=-\rho\xi \tag{3}$$

при условіи

$$o<\xi<1 . \tag{4}$$

При этомъ

$$\rho=\frac{1}{1-\eta\xi}$$

содержится между 1 и $\frac{1}{1-\xi}$, т. е.

$$\frac{1}{1-\xi}>\rho>1 . \tag{5}$$

Изъ (3) слѣдуетъ

$$1-\xi=e^{-\rho\xi} . \tag{6}$$

Чтобы съ помощью равенства (6) преобразовать правую часть равенства (1), должно положить

$$\xi=\int_0^x d\xi f(\xi)\left(2\,Sin\frac{x\xi}{2}\right)^2$$

и убѣдиться, что условіе (4) будетъ при этомъ удовлетворено.

Такъ какъ $f(\varepsilon)>o$ между предѣлами интеграціи, то ясно, что будетъ $\xi>o$. Съ другой стороны

$$\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2 < x^2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon),$$

т. е.

$$\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2 < cx^2\ . \tag{7}$$

Но

$$c=\int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) < \varkappa^2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\ ,$$

т. е.

$$c<\frac{1}{2}\varkappa^2\ .$$

Кромѣ того дано, что $x<\frac{1}{\varkappa}$. Поэтому

$$cx^2<\frac{1}{2}.$$

Теперь изъ (7) видно, что условіе (4) выполняется. Прилагая равенство (6), находимъ изъ (1)

$$\varphi(x)=e^{-\rho\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2}\ , \tag{8}$$

$$1<\rho<\frac{1}{1-\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2}\ . \tag{9}$$

Имѣя въ виду неравенство (7), положимъ

$$\rho\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\ Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2 = \zeta c x^2\ .$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{\rho}{cx^2}\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\ Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2\ . \qquad (10)$$

Равенство (8) обратится теперь въ

$$\varphi(x) = e^{-\zeta c x^2}\ ,$$

гдѣ ζ опредѣляется равенствомъ (10). Остается изслѣдовать ζ. Съ этой цѣлью обратимся опять къ теоремѣ (2). Полагая

$$\psi(\xi) = 2\ Sin\frac{\xi}{2}\ ,$$

находимъ

$$2\ Sin\frac{\xi}{2} = \xi Cos\frac{\eta\xi}{2}\ .$$

Отсюда

$$2\ Sin\frac{x\varepsilon}{2} = x\varepsilon\, Cos\frac{\eta x\varepsilon}{2}\ .$$

Поэтому (10) даетъ

$$\zeta = \frac{\rho}{c}\int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) Cos^2\frac{\eta x\varepsilon}{2}\ . \qquad (11)$$

Но

$$\eta x\varepsilon < x\varkappa \text{ и } x\varkappa < 1\ .$$

Отсюда

$$\frac{\eta x\varepsilon}{2} < \frac{x\varkappa}{2}$$

и оба эти числа меньше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$1 > Cos\frac{\eta x \varepsilon}{2} > Cos\frac{x \varkappa}{2} .$$

Слѣдовательно

$$\int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) > \int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) Cos^2 \frac{\eta x \varepsilon}{2} > Cos^2 \frac{x\varkappa}{2} \int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) ,$$

т. е.

$$c > \int_0^{\varkappa} d\varepsilon.\ \varepsilon^2 f(\varepsilon) Cos^2 \frac{\eta x \varepsilon}{2} > c Cos^2 \frac{x\varkappa}{2} .$$

Умножая на $\frac{\rho}{c}$ и пользуясь равенствомъ (11), находимъ

$$\rho > \zeta > \rho Cos^2 \frac{x\varkappa}{2} .$$

Принимая-же въ соображеніе (9), находимъ

$$\frac{1}{1 - \int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) \left(2\ Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2} > \zeta > Cos^2 \frac{x\varkappa}{2} . \qquad (12)$$

Такъ какъ $\frac{x\varkappa}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $Cos\frac{x\varkappa}{2} > 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2$

и, слѣдовательно,

$$Cos^2 \frac{x\varkappa}{2} > 1 - \left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^4 ,$$

т. е.

$$Cos^2\frac{x\varkappa}{2} > 1-\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2 . \qquad (13)$$

Далѣе, изъ (7) слѣдуетъ, что

$$1-\int_0^\varkappa d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\ Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2 > 1-cx^2.$$

Такъ какъ $cx^2 < 1$, то обѣ части этого неравенства $> o$ и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{1-\int_0^\varkappa d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\ Sin\frac{x\varepsilon}{2}\right)^2} < \frac{1}{1-cx^2} . \qquad (14)$$

При помощи (13) и (14) находимъ изъ (12)

$$\frac{1}{1-cx^2} > \zeta > 1-\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2.$$

5. **Теорема.** Функція $\varphi(x)$ при вещественныхъ значеніяхъ x всегда удовлетворяетъ неравенству

$$\varphi^2(x) \overline{\overline{<}} \frac{1}{1+rx^2} ,$$

гдѣ $r > o$ и не зависитъ отъ x.

Доказательство. Положивъ

$$\varphi^2(x) = \frac{1}{1+x^2\psi(x)} \qquad (1)$$

и обозначивъ чрезъ r нижній предѣлъ значеній функціи $\psi(x)$, отвѣчающихъ вещественнымъ значеніямъ x, находимъ послѣдовательно

$$\psi(x) \overline{\overline{>}} r ,$$

$$1+x^2\psi(x) \overline{\overline{>}} 1+rx^2 .$$

Отсюда, въ предположеніи, что

$$1+rx^2>o, \tag{2}$$

находимъ

$$\frac{1}{1+x^2\psi(x)}\leqq\frac{1}{1+rx^2}$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi^2(x)\leqq\frac{1}{1+rx^2}\ .$$

Остается показать, что $r>o$; такъ какъ въ такомъ случаѣ условіе (2) будетъ также выполнено и теорема будетъ доказана.

Вопросъ приводится къ изслѣдованію функціи $\psi(x)$. Изъ (1) находимъ

$$\psi(x)=\frac{1}{x^2\varphi^2(x)}-\frac{1}{x^2}\,.$$

Такъ какъ

$$\varphi(-x)=\varphi(x),$$

то и

$$\psi(-x)=\psi(x)$$

и, слѣдовательно, достаточно предположить, что x измѣняется отъ 0 до ∞. Изслѣдуемъ сначала $\psi(x)$ вблизи значенія $x=o$

Изъ предыдущей теоремы знаемъ, что при $x<\frac{1}{\varkappa}$, будетъ

$$\varphi(x)=e^{-\zeta cx^2},\ \text{ гдѣ }\ \zeta>1-\left(\frac{x\varkappa}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Поэтому

$$\psi(x)=\frac{1}{x^2}\left\{e^{2\zeta cx^2}-1\right\}>2\zeta c\ .$$

Но $x<\frac{1}{\varkappa}$, слѣдовательно $\frac{x\varkappa}{2}<\frac{1}{2}$.

Поэтому, изъ (3),

$$\zeta > \frac{3}{4}$$

и, слѣдовательно,

$$\psi(x) > \frac{3c}{2} \text{ при } x < \frac{1}{\varkappa}.$$

Изслѣдуемъ теперь $\psi(x)$ вблизи $x=\infty$. Интегрируя по частямъ, находимъ изъ равенства

$$\varphi(x)=2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f(\varepsilon) Cos x\varepsilon \quad .$$

равенство

$$\varphi(x)=2\frac{f(\varkappa) Sin x\varkappa-\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f'(\varepsilon) Sin x\varepsilon}{x}.$$

Слѣдовательно

$$x\varphi(x)=2f(\varkappa) Sin x\varkappa-2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon f'(\varepsilon) Sin x\varepsilon.$$

Отсюда

$$|x\varphi(x)| \leqq 2f(\varkappa)+2\int_0^{\varkappa} d\varepsilon |f'(\varepsilon)|.$$

Но извѣстно, что если функція интегрируема, то и абсолютная величина ея также [1]). Поэтому правая часть представляетъ опредѣленную конечную величину L, положительную и независящую отъ x и

$$|x\varphi(x)| \leqq L.$$

---

[1]) Dini. l. c. § 190. 15.

Поэтому

$$\frac{1}{x^2\varphi^2(x)} \geqq \frac{1}{L^2}$$

и, если предположимъ, что

$$x > \sqrt{2}\, L,$$

то будетъ

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{2L^2}$$

и, слѣдовательно,

$$\psi(x) = \frac{1}{x^2\varphi^2(x)} - \frac{1}{x^2} > \frac{1}{2L^2}\,.$$

Теперь легко показать, что нижній предѣлъ $\psi(x)$ больше O. Допустимъ противное, т. е. допустимъ, что $r = o$. По извѣстной теоремѣ [1]) существуетъ, по крайней мѣрѣ, одно значеніе перемѣнной $x = x_0$, обладающее свойствомъ, что въ сколь угодно маломъ промежуткѣ, заключающемъ его, могутъ быть найдены значенія перемѣнной, для которыхъ $\psi(x)$ сколь угодно близка къ O. Такое значеніе x_0, должно быть $\geqq \frac{1}{\varkappa}$ и $\leqq L\sqrt{2}$, ибо внѣ этого промежутка функція $\psi(x)$, какъ мы только что доказали, остается больше нѣкотораго положительнаго числа. Такъ какъ $\psi(x)$—цѣлая трансцендентная функція [1], то внутри разсматриваемаго промежутка она можетъ обратиться въ O лишь конечное число разъ. Сверхъ того каждое изъ значеній x, обращающихъ $\varphi(x)$ въ O, можетъ быть выдѣлено при помощи промежутка $x - h \ldots x + h$, гдѣ $h > o$ и притомъ такое число, что для всѣхъ значеній внутри этого промежутка

$$|x)| < \varepsilon, \varphi)$$

---

[1]) Dini. l. c. § 36.

гдѣ ε — данное число. Тогда внутри того-же промежутка будетъ

$$\frac{1}{\varphi^2(x)} > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

и, слѣдовательно, значеніе x_0 не можетъ лежать внутри него. Если исключимъ всѣ такіе промежутки, то x_0 должно лежать въ одномъ изъ оставшихся промежутковъ. Но въ каждомъ изъ этихъ послѣднихъ $\frac{1}{\varphi(x)}$, а вмѣстѣ съ ней и $\psi(x)$ непрерывна. Поэтому, по извѣстной теоремѣ [1]), $\psi(x)$ должна достигать своего нижняго предѣла, т. е. должно быть

$$\psi(x_0) = o.$$

Отсюда

$$\varphi^2(x_0) = 1,$$

т. е.

$$\varphi(x_0) = \pm 1 .$$

Если предположить, что $\varphi(x_0) = 1$, то изъ зависимости

$$\varphi(x_0) = 1 - \int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\, Sin\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2$$

слѣдуетъ, что

$$\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\, Sin\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2 = o \quad . \qquad (4)$$

Если-же предположить, что

$$\varphi(x_0) = -1 \ ,$$

то

$$\int_0^x d\varepsilon f(\varepsilon)\left(2\, Sin\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2 = 2 \qquad (5)$$

---

[1]) Dini. l. c. § 47.

Но

$$\int_0^\varkappa d\xi f(\varepsilon)\left(2\,Cos\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2+\int_0^\varkappa d\xi f(\varepsilon)\left(2\,Sin\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2=4\int_0^\varkappa d\xi f(\varepsilon)=2$$

и, слѣдовательно, (5) даетъ

$$\int_0^\varkappa d\xi f(\varepsilon)\left(2\,Cos\frac{x_0\varepsilon}{2}\right)^2=o\,. \qquad (6)$$

Итакъ должно выполняться (4) или (6). Но ни то, ни другое невозможно въ силу предположеній о функціи $f(\varepsilon)$ [1]). Итакъ должно быть $r>o$.

6. **Теорема.** Если λ_0 — наименьшее, а λ — наибольшее изъ чиселъ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$, если n превышаетъ большее изъ чиселъ 4 и $2\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2$, а Θ превышаетъ большее изъ чиселъ

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r(n\lambda_0^2-2\lambda^2)}} \text{ и } \frac{2}{\lambda_0\sqrt{r(n-4)}}\,,$$

то выраженіе

$$P=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha v}{\alpha}$$

можетъ быть замѣнено выраженіемъ

$$P_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\Theta d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha v}{\alpha}\,,$$

причемъ будетъ

$$|P-P_1|\leq\frac{1}{\pi\mathfrak{N}}e^{-\mathfrak{N}}$$

1

[1]) Din. l. c. § 190, 13.

гдѣ

$$\mathfrak{R}=\frac{1}{2}\,\frac{r\Lambda\theta^2}{1+r\lambda^2\theta^2}$$

$$\Lambda=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2 \ .$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нужно разсматривать разность

$$P-P_1=\frac{2}{\pi}\int_\theta^\infty d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin\alpha v}{\alpha} \ .$$

Имѣемъ

$$|P-P_1|\leqq\frac{2}{\pi}\int_\theta^\infty d\alpha\,\frac{|\Phi(\alpha)|}{\alpha} \ . \qquad (1)$$

Здѣсь

$$\Phi(\alpha)=\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha) \qquad (2)$$

Но, по 5,

$$\varphi^2(\lambda_p\alpha)\leqq\frac{1}{1+r\lambda_p^2\alpha^2} \ .$$

Поэтому

$$|\Phi(\alpha)|\leqq\frac{1}{\left|\sqrt{(1+r\lambda_1^2\alpha^2)\ldots(1+r\lambda_n^2\alpha^2)}\right|} ,$$

$$\frac{1}{|\Phi(\alpha)|}\geqq\left|\sqrt{(1+r\lambda_1^2\alpha^2)\ldots(1+r\lambda_n^2\alpha^2)}\right| ,$$

$$log\frac{1}{|\Phi(\alpha)|}\geqq\frac{1}{2}\Big\{log(1+r\lambda_1^2\alpha^2)+\ldots+log(1+r\lambda_n^2\alpha^2)\Big\} . \qquad (3)$$

Чтобы преобразовать правую часть послѣдняго неравенства, разсмотримъ выраженіе

$$\chi(\xi)=\frac{1}{2}\,\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\xi\alpha^2}+\frac{1}{n}log(1+r\xi\alpha^2) .$$

Имѣемъ

$$\chi'(\xi) = -\frac{nr\lambda_p^2\alpha^2 - 2r\xi\alpha^2 - 2}{2n(1+r\xi\alpha^2)^2}\, r\alpha^2 \ . \qquad (4)$$

Сравнивая числителя правой части съ выраженіемъ

$$nr\lambda_0^2\theta^2 - 2r\lambda^2\theta^2 - 2,$$

гдѣ θ—нѣкоторое число, находимъ тождество

$$nr\lambda_p^2\alpha^2 - 2r\xi\alpha^2 - 2 = nr\lambda_0^2\theta^2 - 2r\lambda^2\theta^2 - 2$$

$$+ nr\alpha^2(\lambda_p^2 - \lambda_0^2) + r(n\lambda_0^2 - 2\lambda^2)(\alpha^2 - \theta^2) + 2r\alpha^2(\lambda^2 - \xi)\ .$$

Такъ какъ $\lambda_p \overline{\overline{>}} \lambda_0$, то при $\alpha \geqq \theta$, если $n > \frac{2\lambda^2}{\lambda_0{}^2}$, будемъ имѣть

$$nr\lambda_p^2\alpha^2 - 2r\xi\alpha^2 - 2 > o$$

при всѣхъ значеніяхъ

$$\xi \overline{\overline{<}} \lambda^2,$$

коль скоро θ будетъ выбрано такъ, чтобы

$$nr\lambda_0^2\theta^2 - 2r\lambda^2\theta^2 - 2 > o\,,$$

т. е.

$$\theta > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(n\lambda_0^2 - 2\lambda^2)r}}\ .$$

Итакъ, при перечисленныхъ условіяхъ, будетъ

$$\chi'(\xi) < o.$$

Поэтому $\chi(\xi)$ убываетъ съ возрастаніемъ ξ, пока ξ не превосходитъ λ^2. Поэтому

$$\chi(\lambda^2) \leqq \chi(\lambda_p^2)\ ,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}+\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2)\leq\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda_p^2\alpha^2}+\frac{1}{n}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2).$$

Вычитая обѣ части этого неравенства изъ

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2),$$

находимъ:

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}-\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2)\geq$$

$$\frac{n-2}{2n}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda_p^2\alpha^2}. \tag{6}$$

Но, при $x>o$, $log(1+x)>\frac{2x}{2+x}$, что слѣдуетъ изъ того, что функція $log(1+x)-\frac{2x}{2+x}$ равна o при $x=o$, а производная ея равна $\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$, т. е. $>o$ при $x>o$. Примѣняя это неравенство ко второй части (6), получаемъ

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}-\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2)$$

$$\geq\frac{n-2}{n}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{2+r\lambda_p^2\alpha^2}-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda_p^2\alpha^2}$$

или

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)-\frac{1}{2}\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}-\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2) \tag{7}$$

$$\geq\frac{(n-4)r\lambda_p^2\alpha^2-4}{2n(1+r\lambda_p^2\alpha^2)(2+r\lambda_p^2\alpha^2)}r\lambda_p^2\alpha^2.$$

Сравнивая числителя правой части съ выраженіемъ

$$(n-4)r\lambda_0^2\Theta^2-4,$$

гдѣ Θ—нѣкоторое число, находимъ тождество

$$(n-4)r\lambda_p^2\alpha^2-4=(n-4)r\lambda_0^2\Theta^2-4$$

$$+(n-4)r\alpha(\lambda_p^2-\lambda_0^2)+(n-4)r\lambda_0^2(\alpha^2-\Theta^2).$$

Откуда, такъ какъ $\lambda_p\geqq\lambda_0$, видимъ, что, при $n>4$ и $\alpha\geqq\Theta$, будетъ всегда

$$(n-4)r\lambda_p^2\alpha^2-4>o\,,$$

коль скоро Θ будетъ выбрано такъ, чтобы

$$(n-4)r\lambda_0^2\Theta^2-4>o\,,$$

т. е.

$$\Theta>\frac{2}{\lambda_0\sqrt{(n-4)r}}.$$

При этомъ условіи правая часть неравенства (7) будетъ положительна. Поэтому лѣвая часть также будетъ положительна. Итакъ, если числа n и Θ удовлетворяютъ условіямъ, указаннымъ въ теоремѣ, то, при $\alpha\geqq\Theta$, будетъ:

$$\frac{1}{2}log(1+r\lambda_p^2\alpha^2)>\frac{1}{2}\,\frac{r\lambda_p^2\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}+\frac{1}{n}log(1+r\lambda^2\alpha^2).$$

Придавая p въ этомъ неравенствѣ значенія $1,2,\ldots n$ и складывая полученные результаты, находимъ:

$$\frac{1}{2}\left\{log(1+r\lambda_1^2\alpha^2)+\ldots+log(1+r\lambda_n^2\alpha^2)\right\}>$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}+log(1+r\lambda^2\alpha^2).$$

Возвращаясь теперь къ неравенству (3), находимъ, при помощи только что найденнаго неравенства,

$$log\frac{1}{|\Phi(\alpha)|}>\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}+log(1+r\lambda^2\alpha^2).$$

Откуда

$$\frac{1}{|\Phi(\alpha)|}>(1+r\lambda^2\alpha^2)e^{\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}$$

и

$$|\Phi(\alpha)|<\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}$$

для $\alpha\overline{>}\Theta$. Слѣдовательно, по (1),

$$|P-P_1|\leqq\frac{2}{\pi}\int_{\Theta}^{\infty}d\alpha\ \frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}}{\alpha}. \tag{8}$$

Для преобразованія правой части введемъ новую перемѣнную ξ, полагая

$$\xi=\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}.$$

Отсюда

$$1-\frac{2\lambda^2}{\Lambda}\xi=\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2},\ d\xi=\frac{r\Lambda\alpha d\alpha}{(1+r\lambda^2\alpha^2)^2},$$

$$\frac{d\xi}{\xi}=\frac{2d\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2},\ \frac{2d\alpha}{\alpha}=\frac{d\xi}{\xi\left(1-\frac{2\lambda^2}{\Lambda}\xi\right)}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}=\left(1-\frac{2\lambda^2}{\Lambda}\xi\right)e^{-\xi},$$

$$\frac{2d\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}}=\frac{d\xi}{\xi}e^{-\xi} \tag{9}$$

При $\alpha > o$ и $d\alpha > o$ имѣемъ

$$d\xi > o.$$

Поэтому ξ, т. е. $\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}$, возрастаетъ вмѣстѣ съ α и, слѣдовательно, при $\alpha \geqq \Theta$

$$\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2} \geqq \frac{1}{2}\frac{r\Lambda\Theta^2}{1+r\lambda^2\Theta^2},$$

т. е.

$$\xi \geqq \mathfrak{N}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{\xi} \leqq \frac{1}{\mathfrak{N}}.$$

Поэтому (9) даетъ

$$\frac{2d\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+r\lambda^2\alpha^2}e^{-\frac{1}{2}\frac{r\Lambda\alpha^2}{1+r\lambda^2\alpha^2}} \leqq \frac{d\xi}{\mathfrak{N}}e^{-\xi}.$$

Предѣламъ Θ и ∞ отвѣчаютъ предѣлы

$$\mathfrak{N} \text{ и } \frac{\Lambda}{2\lambda^2}.$$

Поэтому (8) даетъ

$$|P-P_1| \leqq \frac{1}{\pi\mathfrak{N}}\int_{\mathfrak{N}}^{\frac{\Lambda}{2\lambda^2}} d\xi\, e^{-\xi}.$$

Интегралъ, входящій въ правую часть неравенства, равенъ

$$e^{-\mathfrak{R}} - e^{-\frac{\Lambda}{2\lambda^2}}$$

и, поэтому, меньше, чѣмъ $e^{-\mathfrak{R}}$. Итакъ

$$|P - P_1| \leqq \frac{1}{\pi\mathfrak{R}} e^{-\mathfrak{R}} .$$

7 **Теорема.** Если $\theta < \frac{1}{\lambda\varkappa}$, то P_1 можно замѣнить выраженіемъ

$$P_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\, e^{-c\Lambda\alpha^2} \frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha} ,$$

причемъ будетъ

$$|P_1 - P_2| \leqq \frac{2h\sqrt{3}}{\pi} log\left(\frac{\theta\upsilon}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 + \frac{\theta^2\upsilon^2}{3}}\right) ,$$

гдѣ h означаетъ большее изъ чиселъ

$$e^{\frac{1}{4}c\Lambda\lambda^2\theta^4\varkappa^2} - 1 \quad \text{и} \quad 1 - e^{-\frac{c^2\lambda^2\Lambda\theta^4}{1 - c\lambda^2\theta^2}} .$$

Доказательство. Мы должны изслѣдовать разность

$$P_1 - P_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\left(\Phi(\alpha) - e^{-c\Lambda\alpha^2}\right)\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha} . \qquad (1)$$

Съ этой цѣлью представимъ $\Phi(\alpha)$ въ формѣ показательной функціи. Мы видѣли, что

$$\varphi(\alpha) = e^{-\zeta c\alpha^2} ,$$

гдѣ

$$1-\left(\frac{\alpha\varkappa}{2}\right)^2<\zeta<\frac{1}{1-c\alpha^2}$$

при условіи $\alpha<\frac{1}{\varkappa}$. Отсюда

$$\Phi(\alpha)=\varphi(\lambda_1\alpha)\varphi(\lambda_2\alpha)\ldots\varphi(\lambda_n\alpha)=e^{-(\zeta_1\lambda_1^2+\ldots+\zeta_n\lambda_n^2)c\alpha^2}$$

при условіи $\lambda_\nu\alpha<\frac{1}{\varkappa}$, $\nu=1, 2, \ldots n$. Это послѣднее условіе будетъ выполнено, если $\lambda\alpha<\frac{1}{\varkappa}$, т. е. $\alpha<\frac{1}{\lambda\varkappa}$. (2)

Положимъ теперь

$$\zeta_1\lambda_1^2+\ldots+\zeta_n\lambda_n^2=\zeta(\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2)=\zeta\Lambda.$$

Число ζ будетъ среднимъ между числами $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$. Тогда будемъ имѣть

$$\Phi(\alpha)=e^{-\zeta\Lambda c\alpha^2}. \tag{3}$$

Такъ какъ

$$1-\left(\frac{\alpha\lambda_\nu\varkappa}{2}\right)^2<\zeta_\nu<\frac{1}{1-c\lambda_\nu^2\alpha^2}$$

и, такъ какъ, по причинѣ $\lambda\geqq\lambda_\nu$, имѣемъ

$$\frac{1}{1-c\lambda_\nu^2\alpha^2}<\frac{1}{1-c\lambda^2\alpha^2} \text{ и } 1-\left(\frac{\alpha\lambda_\nu\varkappa}{2}\right)^2>1-\left(\frac{\alpha\lambda\varkappa}{2}\right)^2,$$

то будетъ и подавно

$$1-\left(\frac{\alpha\lambda\varkappa}{2}\right)^2<\zeta_\nu<\frac{1}{1-c\lambda^2\alpha^2}.$$

Поэтому и

$$1-\left(\frac{\alpha\lambda\varkappa}{2}\right)^2<\zeta<\frac{1}{1-c\lambda^2\alpha^2} \ .$$

Введемъ вмѣсто ζ число $\delta=1-\zeta$. Вычитая предыдущія неравенства изъ 1, найдемъ

$$-\frac{c\lambda^2\alpha^2}{1-c\lambda^2\alpha^2}<\delta<\left(\frac{\alpha\lambda\varkappa}{2}\right)^2 \ . \qquad (4)$$

Составимъ теперь разность $\Phi(\alpha)-e^{-c\Lambda\alpha^2}$, входящую въ выраженіе (1). На основаніи (3) имѣемъ:

$$\Phi(\alpha)-e^{-c\Lambda\alpha^2}=e^{-c\Lambda\zeta\alpha^2}-e^{-c\Lambda\alpha^2}$$

или

$$\Phi(\alpha)-e^{-c\Lambda\alpha^2}=e^{-c\Lambda\alpha^2}\left(e^{\delta c\Lambda\alpha^2}-1\right). \qquad (5)$$

Возьмемъ число θ, удовлетворяющее условію

$$\theta<\frac{1}{\lambda\varkappa} \ .$$

Тогда для всякого $\alpha\leqq\theta$ будетъ выполнено условіе (2) и, слѣдовательно, будутъ справедливы всѣ предыдущія неравенства. Лѣвая часть неравенства (4) равна

$$1-\frac{1}{1-c\lambda^2\alpha^2}$$

и, слѣдовательно, убываетъ съ увеличеніемъ α; а правая часть того-же неравенства возрастаетъ съ увеличеніемъ α. Поэтому при $\alpha\overline{\gtrless}\theta$ будетъ

$$-\frac{c\lambda^2\theta^2}{1-c\lambda^2\theta^2}<\delta<\left(\frac{\lambda\theta\varkappa}{2}\right)^2 \ . \qquad (6)$$

Предположимъ сначала, что $\delta > o$. Изъ предыдущаго неравенства имѣемъ

$$\delta < \left(\frac{\lambda\theta\varkappa}{2}\right)^2 .$$

Отсюда, такъ какъ $\alpha \overline{\overline{<}} \theta$,

$$e^{\delta c \Lambda \alpha^2} < e^{\frac{1}{4} c \Lambda \lambda^2 \theta^4 \varkappa^2} .$$

Поэтому

$$e^{\delta c \Lambda \alpha^2} - 1 < e^{\frac{1}{4} c \Lambda \lambda^2 \theta^4 \varkappa^2} - 1 . \qquad (7)$$

Пусть теперь будетъ $\delta < o$. Тогда, по (6), имѣемъ

$$\delta > -\frac{c\lambda^2\theta^2}{1 - c\lambda^2\theta^2} .$$

Отсюда, такъ какъ $\alpha \leq \theta$, будетъ $-\delta c \Lambda \alpha^2 < \frac{c^2\lambda^2\Lambda\theta^4}{1 - c\lambda^2\theta^2}$.

Поэтому

$$e^{\delta c \Lambda \alpha^2} > e^{-\frac{c^2\lambda^2\Lambda\theta^4}{1 - c\lambda^2\theta^2}} .$$

Откуда

$$1 - e^{\delta c \Lambda \alpha^2} < 1 - e^{-\frac{c^2\lambda^2\Lambda\theta^4}{1 - c\lambda^2\theta^2}} . \qquad (8)$$

Сопоставляя неравенства (7) и (8) и вспомнивъ значеніе h, находимъ

$$\left| e^{\delta c \Lambda \alpha^2} - 1 \right| < h .$$

Поэтому изъ (5) находимъ

$$\left| \Phi(\alpha) - e^{-c\Lambda\alpha^2} \right| < h e^{-c\Lambda\alpha^2} . \qquad (9)$$

Обращаясь теперь къ равенству (1), находимъ

$$|P_1-P_2| \leqq \frac{2\upsilon}{\pi}\int_0^{\Theta} d\alpha \left|\Phi(\alpha)-e^{-c\Lambda\alpha^2}\right| \left|\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha\upsilon}\right| .$$

Слѣдовательно, по (9),

$$|P_1-P_2| \leqq \frac{2h\upsilon}{\pi}\int_0^{\Theta} d\alpha\, e^{-c\Lambda\alpha^2} \left|\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha\upsilon}\right|$$

или, так какъ $e^{-c\Lambda\alpha^2} \leqq 1$,

$$|P_1-P_2| \leqq \frac{2h\upsilon}{\pi}\int_0^{\Theta} d\alpha \left|\frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha\upsilon}\right| . \tag{10}$$

Остается изслѣдовать $\frac{Sinx}{x}$. Разложивъ это выраженіе въ степенной рядъ, видимъ, что первые члены разложенія совпадаютъ съ первыми членами разложенія функціи

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}} .$$

Точное сравненіе этихъ функцій показываетъ, что

$$\left|\frac{Sinx}{x}\right| \leqq \frac{1}{\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}\right|} . \tag{11}$$

Докажемъ это неравенство. Для этого будемъ различать два случая: 1) $x \leqq \pi$ и 2) $x > \pi$. Разсмотримъ первый случай. Непосредственно видно, что (11) справедливо при $x=o$ и $x=\pi$. Поэтому будемъ предполагать, что $o<x<\pi$. Доказываемое

неравенство можетъ быть написано такъ: $\frac{x^2}{Sin^2x} > 1 + \frac{x^2}{3}$, т е. $\psi(x) > o$, если положимъ

$$\psi(x) = \frac{x^2}{Sin^2x} - 1 - \frac{x^2}{3} \ .$$

Отсюда

$$\frac{3\,Sin^3x}{2x}\psi'(x) = 3\,Sinx - Sin^3x - 3xCosx \ .$$

Если докажемъ, что правая часть $> o$, то отсюда будетъ слѣдовать, что $\psi'(x) > o$, т. е. $\psi(x)$ возрастаетъ. Такъ какъ $\psi(o) = o$, то будетъ

$$\psi(x) > o \, .$$

Поэтому вопросъ приводится къ доказательству неравенства

$$3\,Sinx - Sin^3x - 3xCosx > o.$$

Въ справедливости-же этого неравенства убѣждаемся, замѣтивъ, что лѣвая часть его равна o при $x = o$ и возрастаетъ съ возрастаніемъ x отъ o до π, потому что производная ея равна

$$3\,Sinx[x - SinxCosx]$$

или

$$\frac{3}{2}Sinx\Big[2x - Sin\,2x\Big]$$

и остается положительной для $x < \pi$. Итакъ неравенство (11) справедливо при $x \leqq \pi$. Остается доказать его для $x > \pi$. Замѣтивъ, что

$$\left|\frac{Sinx}{x}\right| < \frac{1}{x} \, ,$$

видимъ, что достаточно будетъ доказать справедливость неравенства

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}\right|}.$$

Разрѣшая это неравенство, находимъ, что оно будетъ выполнено, если

$$x>\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Такъ какъ

$$\pi>\sqrt{\frac{3}{2}}$$

то, дл $x>\pi$, доказываемое неравенство будетъ справедливо. Итакъ неравенство (11) справедливо. Поэтому изъ (10) находимъ

$$|P_1-P_2|\leqq\frac{2h\upsilon}{\pi}\int_0^\theta d\alpha\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\alpha\upsilon)^2}{3}}}$$

или, такъ какъ правая часть равна

$$\frac{2h\sqrt{3}}{\pi}\int_0^{\frac{\theta\upsilon}{\sqrt{3}}}dx\,.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

т. е.

$$\frac{2h\sqrt{3}}{\pi}log\left(\frac{\theta\upsilon}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{\theta^2\upsilon^2}{3}}\right),$$

$$|P_1-P_2|\leqq\frac{2h\sqrt{3}}{\pi}log\left(\frac{\theta\upsilon}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{\theta^2\upsilon^2}{3}}\right).$$

8. **Теорема.** Выраженіе P_2 можно замѣнить выраженіемъ

$$P_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\upsilon}{2\sqrt{c\Lambda}}} d\alpha e^{-\alpha^2},$$

причемъ будетъ

$$|P_2 - P_3| \leqq \frac{e^{-c\Lambda\Theta^2}}{\pi c\Lambda\Theta^2}.$$

Доказательство. Во первыхъ замѣтимъ, что, по извѣстному преобразованію,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\upsilon}{2\sqrt{c\Lambda}}} d\alpha e^{-\alpha^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha e^{-c\Lambda\alpha^2} \frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha}.$$

Поэтому

$$P_3 - P_2 = \frac{2}{\pi} \int_\Theta^{\infty} d\alpha e^{-c\Lambda\alpha^2} \frac{Sin\alpha\upsilon}{\alpha},$$

или

$$P_3 - P_2 = -\frac{1}{\pi c\Lambda} \int_\Theta^{\infty} d\alpha e^{-c\Lambda\alpha^2} (-2c\Lambda\alpha) . \frac{1}{\alpha^2} Sin\alpha\upsilon$$

$$= \frac{1}{\pi c\Lambda} \int_\infty^{\Theta} d\left(e^{-c\Lambda\alpha^2}\right) . \frac{1}{\alpha^2} Sin\alpha\upsilon.$$

Отсюда, такъ какъ $\frac{1}{\alpha^2} \leqq \frac{1}{\Theta^2}$ и $|Sin\alpha\upsilon| \leqq 1$,

$$|P_2 - P_3| \leqq \frac{1}{\pi c\Lambda\Theta^2} \int_\infty^{\Theta} d(e^{-c\Lambda\alpha^2}),$$

т. е.

$$|P_2-P_3|\leq\frac{e^{-c\Lambda\theta^2}}{\pi c\Lambda\theta^2}.$$

9. **Теорема.** Если P представляетъ вѣроятность, что

$$\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2+\ldots+\lambda_n\varepsilon_n$$

содержится между предѣлами $\pm 2t\sqrt{c\Lambda}$, то

$$\lim_{n=\infty} P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}$$

при условіи, что числа

$$|n\lambda_1|, |n\lambda_2| \ldots |n\lambda_n|$$

при возрастаніи n до ∞ содержатся между конечными положительными числами l и $L>l$.

Доказательство. Если въ 6, 7 и 8 положимъ произвольное число

$$\upsilon=2t\sqrt{c\Lambda},$$

то для выраженій

$$P=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin 2t\alpha\sqrt{c\Lambda}}{\alpha},$$

$$P_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\Theta d\alpha\Phi(\alpha)\frac{Sin 2t\alpha\sqrt{c\Lambda}}{\alpha},$$

$$P_2=\frac{2}{\pi}\int_0^\Theta d\alpha\, e^{-c\Lambda\alpha^2}\frac{Sin 2t\alpha\sqrt{c\Lambda}}{\alpha},$$

$$P_3=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}$$

найдемъ неравенства

$$|P-P_1| \leqq \frac{1}{\pi\mathfrak{N}} e^{-\mathfrak{N}},$$

$$|P_1-P_2| \leqq \frac{2h\sqrt{3}}{\pi} \log\left(\frac{2t\Theta\sqrt{c\Lambda}}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{4t^2\Theta^2c\Lambda}{3}}\right),$$

$$|P_2-P_3| \leqq \frac{e^{-c\Lambda\Theta^2}}{\pi c\Lambda\Theta^2}.$$

Откуда, такъ какъ

$$P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2} = P-P_1+(P_1-P_2)+(P_2-P_3),$$

$$\left|P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right| \leqq \frac{1}{\pi\mathfrak{N}} e^{-\mathfrak{N}} + \frac{2h\sqrt{3}}{\pi} \log\left(\frac{2t\Theta\sqrt{c\Lambda}}{3} + \sqrt{1+\frac{4t^2\Theta^2c\Lambda}{3}}\right)$$

$$+\frac{e^{-c\Lambda\Theta^2}}{\pi c\Lambda\Theta^2}. \qquad (1)$$

При этомъ должны выполняться слѣдующія условія

$$\left.\begin{array}{l} n>4,\ n>2\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 \\ \Theta>\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r(n\lambda_0^2-2\lambda^2)}},\ \Theta>\frac{2}{\lambda_0\sqrt{r(n-4)}} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\Theta<\frac{1}{\lambda\varkappa} \qquad (3)$$

Второе, третье и четвертое изъ неравенствъ (2) можно написать такъ

$$n > 2\left(\frac{n\lambda}{n\lambda_0}\right)^2, \quad \theta > \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{r([n\lambda_0]^2 - \frac{2}{n}[n\lambda]^2)}},$$

$$\theta > \frac{2\sqrt{n}}{(n\lambda_0)\sqrt{r\left(1-\frac{4}{n}\right)}}.$$

Но произведенія $|n\lambda|$ и $|n\lambda_0|$ заключаются между l и L, и потому эти неравенства будутъ выполнены, если возьмемъ

$$n > 2\frac{L^2}{l^2}, \quad \theta > \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{r\left(l^2 - \frac{2L^2}{n}\right)}}, \quad \theta > \frac{2\sqrt{n}}{l\sqrt{r\left(1-\frac{4}{n}\right)}}.$$

Если выберемъ n такъ, чтобы, сверхъ того, было

$$l^2 - \frac{2L^2}{n} > \frac{l^2}{2} \quad \text{и} \quad 1 - \frac{4}{n} > \frac{1}{2},$$

для чего должно быть

$$n > \frac{4L^2}{l^2} \quad \text{и} \quad n > 8,$$

то предыдущія неравенства для θ будутъ выполнены, если будетъ

$$\theta > \frac{2\sqrt{2n}}{l\sqrt{r}}.$$

Итакъ вмѣсто условій (2) имѣемъ

$$n > 8, \quad n > \frac{4L^2}{l^2}, \quad \theta > \frac{2\sqrt{2n}}{l\sqrt{r}}. \tag{4}$$

Что-же касается условія (3), то его можно написать такъ

$\theta < \frac{n}{(n\lambda)\varkappa}$ и, слѣдовательно, оно будетъ выполнено, если взять

$$\theta < \frac{n}{\varkappa L}.$$

Чтобы это неравенство было совмѣстно съ предыдущимъ, необходимо взять

$$n > \frac{8\varkappa^2 L^2}{r l^2}.$$

Итакъ, условія существованія неравенства (1) будутъ выполнены, если n будетъ превышать большее изъ чиселъ

$$8,\ \frac{4L^2}{l^2},\ \frac{8\varkappa^2 L^2}{r l^2} \tag{5}$$

и если будетъ

$$\frac{2\sqrt{2n}}{l\sqrt{r}} < \theta < \frac{n}{\varkappa L}. \tag{6}$$

Разсматривая вторую часть неравенства (1) и принявъ въ соображеніе значеніе чиселъ $\mathfrak{N}$ и h, видимъ, что выраженія, ее составляющія, зависятъ отъ трехъ произведеній:

$$\lambda\theta,\ \Lambda\theta^2 \text{ и } \lambda^2\Lambda\theta^4.$$

Для этихъ произведеній, замѣтивъ, что $|\lambda_p|$ содержится между $\frac{l}{n}$ и $\frac{L}{n}$, и, слѣдовательно Λ — между $\frac{l^2}{n}$ и $\frac{L^2}{n}$; имѣемъ:

$$\frac{l\theta}{n} < \lambda\theta < \frac{L\theta}{n},$$

$$l^2\left(\frac{\theta}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2 < \Lambda\theta^2 < L^2\left(\frac{\theta}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^2,$$

$$l^4\left(\frac{\theta}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^4 < \lambda^2\Lambda\theta^4 < L^4\left(\frac{\theta}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^4.$$

Отсюда видно, что достаточно выбрать Θ безконечно большимъ вмѣстѣ съ n порядка выше $\frac{1}{2}$ и ниже $\frac{3}{4}$, напримѣръ $\Theta = n^{\frac{2}{3}}$, чтобы съ возрастаніемъ n постоянно выполнялись условія (5) и (6), и было

$$\lim_{n=\infty} \lambda\Theta = o\,,\ \lim_{n=\infty} \Lambda\Theta^2 = \infty\,,\ \lim_{n=\infty} \lambda^2\Lambda\Theta^4 = o\,.$$

Вслѣдствіе чего будетъ

$$\lim_{n=\infty} \Re = \infty$$

$$\lim_{n=\infty} h\log\left(\frac{2t\Theta\sqrt{c\Lambda}}{3} + \sqrt{1 + \frac{4t^2\Theta^2 c\Lambda}{3}}\right) = o$$

и, слѣдовательно, на основаніи (1),

$$\lim_{n=\infty} P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\alpha\, e^{-\alpha^2}.$$

10. Переходя къ способу наименьшихъ квадратовъ, разсмотримъ

$$\xi = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n\,,$$

линейную функцію ошибокъ ε_1, $\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$.

По предыдущей теоремѣ, вѣроятность, что ξ содержится между предѣлами $\pm 2t\sqrt{c\Lambda}$, имѣетъ предѣломъ при $n = \infty$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t d\alpha\, e^{-\alpha^2}. \qquad (1)$$

Такъ какъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha\, e^{-\alpha^2} = 1\,,$$

то, при данномъ δ, можно взять t на столько большимъ, чтобы

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}<\frac{\delta}{2}. \qquad (2)$$

Далѣе, какому бы закону ни слѣдовали числа λ, можно, при выбранномъ t, найти такое N, что при $n>N$ будетъ

$$\left|P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right|<\frac{\delta}{2}. \qquad (3)$$

Тогда, такъ какъ

$$1-P=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}-\left(P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right),$$

будетъ

$$1-P\leqq\left|1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right|+\left|P-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\alpha e^{-\alpha^2}\right|,$$

т. е., на основаніи (2) и (3),

$$1-P<\delta$$

или

$$P>1-\delta. \qquad (4)$$

Отсюда видимъ возможность выбрать n столь большимъ, чтобы можно было утверждать съ вѣроятностью, превышающей данное число, что ξ заключается между предѣлами $\pm 2t\sqrt{c\Lambda}$. Такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty}\Lambda=o$, то можно найти такое число $N'\geqq N$, чтобы при $n>N'$ было

$$2t\sqrt{c\Lambda}<\eta,$$

гдѣ η данное число; т. е., выбравъ n достаточно большимъ, можемъ съ вѣроятностью, превосходящей данное число, утверждать, что ξ содержится въ сколь угодно тѣсныхъ предѣлахъ. Это справедливо при всякомъ законѣ, которому слѣдуютъ числа $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ при возрастаніи n до ∞, лишь бы по абсолютной величинѣ онѣ содержались между $\frac{l}{n}$ и $\frac{L}{n}$. Но если эти числа выбраны такъ, что, при всякомъ n, доставляютъ функціи Λ minimum, то, утверждая съ вѣроятностью, превосходящей данное число, что ξ содержится между предѣлами $\mp 2t\sqrt{c\Lambda}$, мы будемъ имѣть возможно тѣсные предѣлы. Такой выборъ вообще считаемъ наиболѣе выгоднымъ.

11. Возьмемъ теперь систему уравненій

$$\left\{ \begin{aligned} a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2 + \ldots + a_{l,m}x_m = v_l \\ l = 1,\ 2, \ldots n;\ n > m, \end{aligned} \right. \tag{1}$$

гдѣ $a_{l,k}$—данныя числа; $x_1, x_2, \ldots x_m$—искомыя числа; $v_1, v_2, \ldots v_n$—числа, точно выражающія наблюдаемыя величины. Для опредѣленія x_p, умножимъ каждое уравненіе нашей системы на соотвѣтствующаго ему множителя $\lambda_{p,l}$ и сложимъ полученные результаты. Такимъ образомъ найдемъ

$$x_1\sum_{l=1}^{n}a_{l,1}\lambda_{p,l} + x_2\sum_{l=1}^{n}a_{l,2}\lambda_{p,l} + \ldots + x_p\sum_{l=1}^{n}a_{l,p}\lambda_{p,l} + \ldots + x_m\sum_{l=1}^{n}a_{l,m}\lambda_{m,l}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} v_l \lambda_{p,l}.$$

Выберемъ сомножителей λ такъ, чтобы

$$\sum_{l=1}^{n}a_{l,1}\lambda_{p,l} = o, \ldots \sum_{l=1}^{n}a_{l,p-1}\lambda_{p,l} = o, \sum_{l=1}^{n}a_{l,p}\lambda_{p,l} = 1, \sum_{l=1}^{n}a_{l,p+1}\lambda_{p,l} = o, \ldots$$

$$\ldots \sum_{l=1}^{n}a_{l,m}\lambda_{p,l} = o. \tag{2}$$

Тогда предыдущее уравненіе обратится въ

$$x_p = \sum_{l=1}^{n} v_l \lambda_{p,l}\,. \tag{3}$$

Если искомыя числа $x_1, x_2, \ldots x_m$ выражаютъ существующія величины, то уравненія (1) совмѣстны при всякомъ n. Вторыя части этихъ уравненій, однако, неизвѣстны намъ, ибо изъ наблюденій мы получаемъ, вмѣсто точныхъ значеній $v_1, v_2, \ldots v_n$, значенія $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots \overline{v}_n$, содержащія ошибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, такъ что вообще $v_l = \overline{v}_l + \varepsilon_l$. Сообразно съ этимъ истинное значеніе x_p, по (3), будетъ

$$x_p = \sum_{l=1}^{n} \overline{v}_l \lambda_{p,l} + \sum_{l=1}^{n} \lambda_{p,l} \varepsilon_l$$

или

$$x_p = \overline{x}_p + \xi_p\,,$$

гдѣ

$$\overline{x}_p = \sum_{l=1}^{n} \overline{v}_l \lambda_{p,l}\,,\quad \xi_p = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{p,l} \varepsilon_l\,.$$

Здѣсь ξ_p представляетъ ошибку, происходящую вслѣдствіе того, что вмѣсто истиннаго рѣшенія x_p, мы беремъ рѣшеніе

$$\sum \overline{v}_l \lambda_{p,l}\,,$$

получаемое по нашему способу исключенія изъ неточныхъ уравненій. Ошибка въ числѣ x_p представляетъ, какъ видимъ, линейную функцію ошибокъ въ наблюдаемыхъ величинахъ. Отсюда, по 10, видно, что наивыгоднѣйшимъ выборомъ множителей λ будетъ тотъ, при которомъ, для всякого n, будетъ

$$\Lambda_p = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{p,l}^2 = \text{minimum}\,.$$

Множители λ опредѣляются уравненіями (2), число которыхъ m, по предположенію, меньше числа неизвѣстныхъ $\lambda_{p,1}, \lambda_{p,2}, \ldots \ldots \lambda_{p,n}$. Поэтому системъ множителей, выполняющихъ исключеніе всѣхъ x, кромѣ x_p, т. е.—дающихъ равенство (3), будетъ безконечно много. Среди этихъ системъ значеній, должно найти ту, которая доставляетъ функціи Λ_p minimum. Для этого, по правиламъ ученія о наибольшихъ и наименьшихъ функцій, должно разсматривать, вмѣсто функціи Λ_p, функцію

$$\Omega_p = \Lambda_p - 2\alpha_{p,1} \sum_{l=1}^{n} a_{l,1}\lambda_{p,l} - \ldots - 2\alpha_{p,p} \sum_{l=1}^{n}\left(a_{l,p}\lambda_{p,l} - \frac{1}{n}\right) - \ldots$$

$$\ldots - 2\alpha_{p,m}\sum_{l=1}^{n} a_{l,m}\lambda_{p,l} \qquad (4)$$

или

$$\Omega_p = \sum_{l=1}^{n}\left\{\lambda_{p,l}^2 - 2\alpha_{p,1}a_{l,1}\lambda_{p,l} - \ldots - 2\alpha_{p,p}\left(a_{l,p}\lambda_{p,l} - \frac{1}{n}\right) - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - 2\alpha_{p,m}a_{l,m}\lambda_{p,l}\right\},$$

гдѣ $\alpha_{p,1}, \alpha_{p,2}, \ldots \alpha_{p,m}$ — неопредѣленные множители; и искать ея minimum. Уравнивая нулю частныя производныя этой функціи по перемѣннымъ $\lambda_{p,1}, \lambda_{p,2}, \ldots \lambda_{p,n}$, находимъ уравненія

$$\lambda_{p,l} = \alpha_{p,1}a_{l,1} + \ldots + \alpha_{p,m}a_{l,m} \qquad (5)$$
$$l = 1, 2, \ldots n,$$

которыя въ соединеніи со (2) даютъ систему $n+m$ уравненій, изъ которыхъ, вообще говоря, найдется $n+m$ количествъ λ и α.—Чтобы убѣдиться, что найденная такимъ образомъ система значеній дѣйствительно доставляетъ функціи Λ_p minimum, находимъ

$$d^2\Omega_p = 2\sum_{l=1}^{n} d\lambda_{p,l}^2.$$

Отсюда видно, что всегда $d^2\Omega_p > o$. Поэтому найденная система значеній доставляетъ функціи Ω_p minimum при неограниченномъ измѣненіи перемѣнныхъ $\lambda_{p,1}$, $\lambda_{p,2}$, ... $\lambda_{p,n}$. Изъ опредѣленія понятія minimum слѣдуетъ, что эта система будетъ доставлять minimum той-же функціи, если ограничиться лишь тѣми значеніями перемѣнныхъ, для которыхъ выполняются условія (2). Но для этихъ значеній Ω_p, какъ видно изъ (4), обращается въ Λ_p. Слѣдовательно, для найденной системы значеній, функція Λ_p будетъ имѣть дѣйствительно minimum по отношенію ко всѣмъ значеніямъ перемѣнныхъ, удовлетворяющимъ условіямъ (2).

Умножимъ теперь равенства (2) соотвѣтственно на $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ... $\overline{x}_m$ и, сложивъ почленно, замѣнимъ во второй части $\overline{x}_p$ его выраженіемъ

$$\sum_{l=1}^{n} \overline{v}_l \lambda_{p,l}.$$

Перенеся всѣ члены въ одну часть уравненія, найдемъ окончательно

$$\sum_{l=1}^{n} (a_{l,1}\overline{x}_1 + a_{l,2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)\lambda_{p,l} = o$$

или, по (5),

$$\sum_{l=1}^{n} (a_{l,1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)(a_{l,1}\alpha_{p,1} + \ldots + a_{l,m}\alpha_{p,m}) = o,$$

т. е.

$$\begin{aligned}
&\alpha_{p,1}\sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1 + a_{l,2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)a_{l,1} + \\
&\alpha_{p,2}\sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1 + a_{l,2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)a_{l,2} + \\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\alpha_{p,m}\sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1 + a_{l,2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)a_{l,m} = o.
\end{aligned}$$

Такія уравненія получаются при $p=1, 2, 3, \ldots m$. Такимъ образомъ получается система однородныхъ уравненій, въ которой перемѣнными будутъ служить различныя суммы

$$\sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)a_{l,\nu}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots m,$$

а коэффиціентами—числа $\alpha_{i,k}$. Поэтому, если опредѣлитель

$$\Delta = \sum \pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} \ldots \alpha_{m,m} \gtrless o,$$

то всѣ вышеуказанныя суммы должны приводиться къ нулю, т. е. должно быть

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)a_{l,1} = o, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \sum_{l=1}^{n}(a_{l,1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{l,m}\overline{x}_m - \overline{v}_l)a_{l,m} = o. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Отсюда видимъ, что для опредѣленія значеній $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots \overline{x}_m$ должно поступить слѣдующимъ образомъ. Каждое изъ данныхъ уравненій умножить на коэффиціентъ въ немъ при x_1 и сложить полученныя уравненія; затѣмъ, каждое изъ данныхъ уравненій умножить на коэффиціентъ въ немъ при x_2 и сложить полученныя уравненія; и т. д. до x_m включительно. Такимъ образомъ получится m уравненій, изъ которыхъ опредѣлятся $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots \overline{x}_m$. Итакъ приходимъ къ тому сочетанію линейныхъ уравненій, которое, подъ именемъ способа наименьшихъ квадратовъ, было опубликовано Legendre'омъ въ 1806 году [1]).

[1]) Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des comètes; avec un supplément contenant divers perfectionnemens de ces méthodes et leur application aux deux comètes de 1805. A Paris. Année 1806. pag. 72—80. Appendice. Sur la Méthode des moindres quarrés.—6 mars 1805.

Система уравненій, къ которой мы пришли, разрѣшима, если опредѣлитель ея

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{l=1}^{n} a_{l,1}^2 & \sum_{l=1}^{n} a_{l,1} a_{l,2} & \ldots & \sum_{l=1}^{r} a_{l,1} a_{l,m} \\ \sum_{l=1}^{n} a_{l,2} a_{l,1} & \sum_{l=1}^{n} a_{l,2}^2 & \ldots & \sum_{l=1}^{n} a_{l,2} a_{l,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} a_{l,m} a_{l,1} & \sum_{l=1}^{n} a_{l,m} a_{l,2} & \ldots & \sum_{l=1}^{n} a_{l,m}^2 \end{vmatrix}$$

неравенъ нулю. Займемся теперь изслѣдованіемъ опредѣлителей D и Δ. Что касается перваго изъ нихъ, то, взглянувъ внимательно, замѣтимъ, что, по теоремѣ Cauchy,

$$D = \sum \begin{vmatrix} a_{l_1,1} & a_{l_1,2} & \ldots & a_{l_1,m} \\ a_{l_2,1} & a_{l_2,2} & \ldots & a_{l_2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l_m,1} & a_{l_m,2} & \ldots & a_{l_m,m} \end{vmatrix}^2 ,$$

гдѣ суммованіе распространяется на всевозможныя сочетанія $l_1, l_2, \ldots l_m$ изъ чиселъ $1, 2, \ldots n$. Отсюда видно, что D только тогда можетъ быть равенъ нулю, когда между линейными функціями, образующими лѣвыя части уравненій (1), нѣтъ ни одной системы m независимыхъ функцій. Въ этомъ случаѣ, если-бы намъ были извѣстны даже точныя значенія наблюдаемыхъ величинъ, данная система уравненій была-бы недостаточной для нахожденія неизвѣстныхъ. Мы предположимъ, напротивъ того, что ни одинъ изъ опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} a_{l_1,1} & a_{l_1,2} & \ldots & a_{l_1,m} \\ \vdots & & & \\ a_{l_m,1} & a_{l_m,2} & \ldots & a_{l_m,m} \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю. При каждомъ n существуетъ между ними наименьшій по абсолютной величинѣ. Если обозначимъ нижній

предѣлъ его абсолютной величины, при возрастаніи n до ∞, чрезъ g, то можетъ быть $g>o$ или $g=o$. Мы предположимъ, что $g>o$. Тогда, принявъ въ соображеніе число членовъ формулы, выражающей D, видимъ, что

$$D>\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}g^{2}. \tag{7}$$

Этимъ неравенствомъ воспользуемся дальше.—Для изслѣдованія Δ внесемъ выраженія (5) въ уравненія (2). Такимъ образомъ получимъ систему уравненій, опредѣляющихъ

$$\alpha_{p,1},\ \alpha_{p,2},\ldots\alpha_{p,m}:$$

$$\left.\begin{array}{l}
\alpha_{p,1}\sum_{l=1}^{n}a_{l,1}^{2}+\alpha_{p,2}\sum_{l=1}^{n}a_{l,1}a_{l,2}+\ldots+\alpha_{p,m}\sum_{l=1}^{n}a_{l,1}a_{l,m}=o,\\
\alpha_{p,1}\sum_{l=1}^{n}a_{l,2}a_{l,1}+\alpha_{p,2}\sum_{l=1}^{n}a_{l,2}^{2}+\ldots+\alpha_{p,m}\sum_{l=1}^{n}a_{l,2}a_{l,m}=o,\\
\vdots\\
\alpha_{p,1}\sum_{l=1}^{n}a_{l,p}a_{l,1}+\alpha_{p,2}\sum_{l=1}^{n}a_{l,p}a_{l,2}+\ldots+\alpha_{p,m}\sum_{l=1}^{n}a_{l,p}a_{l,m}=1,\\
\vdots\\
\alpha_{p,1}\sum_{l=1}^{n}a_{l,m}a_{l,1}+\alpha_{p,2}\sum_{l=1}^{n}a_{l,m}a_{l,2}+\ldots+\alpha_{p,m}\sum_{l=1}^{n}a_{l,m}^{2}=o.
\end{array}\right\} \tag{8}$$

Откуда видимъ, что опредѣлитель этой системы также равенъ D. Изъ этой системы уравненій находимъ

$$\alpha_{p,l}=\frac{D_{p,l}}{D}, \tag{9}$$

гдѣ $D_{p,l}$ — частный опредѣлитель опредѣлителя D. Отсюда опредѣлитель

$$\Delta=\frac{\sum\pm D_{1,1}D_{2,2}\ldots D_{m,m}}{D^{m}}.$$

Но, по извѣстной теоремѣ,

$$\sum \pm D_{1,1} D_{2,2} \ldots D_{m,m} = D^{m-1}.$$

Поэтому

$$\Delta = \frac{1}{D}.$$

Отсюда видно, что $\Delta > o$.

Остается изслѣдовать измѣненія λ_p съ возрастаніемъ n до ∞. Положивъ

$$\sum_{l=1}^{n} a_{l,i} a_{l,k} = n A_{i,k}, \qquad (10)$$

будемъ имѣть

$$D = n^m \begin{vmatrix} A_{1,1} \ldots A_{1,m} \\ \vdots \\ A_{m,1} \ldots A_{m,m} \end{vmatrix} = n^m E,$$

$$D_{p,l} = n^{m-1} E_{p,l},$$

гдѣ $E_{p,l}$ — частный опредѣлитель опредѣлителя E. Отсюда, по (9),

$$\alpha_{p,l} = \frac{1}{n} \cdot \frac{E_{p,l}}{E}.$$

Поэтому, на основаніи (5),

$$\lambda_{p,l} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_{l,1} E_{r,1} + a_{l,2} E_{p,2} + \ldots + a_{l,m} E_{p,m}}{E}. \qquad (11)$$

Далѣе, при помощи (7), замѣтивъ, что

$$E = \frac{D}{n^m},$$

находимъ

$$E > \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{m-1}{n})}{1.2\ldots m} g^2.$$

Поэтому, и подавно,

$$E > \frac{(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\ldots(1-\frac{m-1}{m})}{1.2\ldots m} g^2,$$

т. е.

$$E > \frac{g^2}{m^m}. \qquad (12)$$

Далѣе предположимъ, что коэффиціенты $a_{i,k}$ остаются конечными съ возрастаніемъ n до ∞, т. е.

$$|a_{i,k}| < a,$$

гдѣ a — нѣкоторое конечное число. Тогда будетъ, по (10),

$$|A_{i,k}| < a^2.$$

Опредѣлитель $E_{p,l}$, по абсолютной величинѣ, меньше того выраженія, которое получится, если каждый членъ опредѣлителя замѣнить его абсолютной величиной и всѣ полученныя величины сложить. Поэтому $|E_{p,l}|$ не превосходитъ нѣкоторой независящей отъ n величины. Отсюда, принявъ въ соображеніе неравенство (12), заключаемъ, на основаніи (11), что $|\lambda_{p,l}|$ также не превосходитъ $\frac{b}{n}$, гдѣ b—нѣкоторое независящее отъ n число. Поэтому $\lambda_{p,l}$ будутъ числами, безконечно малыми вообще того-же порядка, что и $\frac{1}{n}$ при безконечно возрастающемъ n.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ XV.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36.
1893.

Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Секретарь Общества *П. Бучинскій.*

MÉMOIRES
de la section mathématique
de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russe
(Odessa).

T. XV.

СОДЕРЖАНІЕ.

TABLE DES MATIÈRES.



КЪ ТЕОРІИ ВѢКОВОГО ОХЛАЖДЕНІЯ ЗЕМЛИ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

О ПРОИСХОЖДЕНІИ МАТЕРИКОВЪ и ОКЕАНИЧЕСКИХЪ БАССЕЙНОВЪ.

М. П. Рудскаго.

ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36.
1892.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Въ I-ой части этой работы (XIV томъ Записокъ) въ III математическомъ приложеніи на 65 стр. формулы XIV ошибочны. Вмѣсто указаныхъ тамъ выраженій должно стоять:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{x^2 . X_{n-1}}{(2n-1).(2n+1)}$$

$$X'_{n+1} = X'_n - \frac{x^2 . X'_{n+1}}{(2n-1).(2n+1)}$$

потомъ:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} = \frac{x^2 . \xi_{n-1} + (2n-1)(2n+1)\xi_n}{x[x^2 \xi'_{n-} - (2n-1)(2n+1)\xi'_n]}$$

Однако эта ошибка ничуть не вліяетъ на дальнѣйшій ходъ доказательства такъ, что высказанная подъ конецъ приложенія теорема вполнѣ справедлива.

Въ настоящей второй части моей работы въ III главѣ я повторяю иные результаты, изложенные уже въ I-ой части. Я это дѣлаю потому, что желаю второй части, составляющей нѣкоторое примѣненіе теоріи вѣкового охлажденія къ вопросу образованія материковъ, придать видъ законченнаго цѣлаго.

М. П. Рудскій.

ГЛАВА I.

Краткій очеркъ исторіи вопроса. Новѣйшія теоріи.

Уже древніе географы знали, что очертанія материковъ, уровень моря и т. д. не абсолютно постоянны. Иные, какъ н. п. Страбонъ задавались вопросомъ, какимъ образомъ происходятъ измѣненія рельефа земли. Страбонъ [1]) полагалъ, что измѣненія уровня морей и перемѣщенія береговой линіи вызываются движеніями твердыхъ частей земли. Море играетъ пассивную роль. Страбону казалось, что материки мало способны къ измѣненіямъ, за то морское дно можетъ подниматься и опускаться. Поднятіе дна сопровождается выступленіемъ моря изъ береговъ и сокращеніемъ поверхности суши, опусканіе дна влечетъ за собою противуположные результаты.

У нѣкоторыхъ средневѣковыхъ авторовъ встрѣчаемъ мнѣніе очевидно тѣсно связанное съ вѣрой въ чрезвычайное вліяніе звѣздъ на жизнь и на человѣческую судьбу, столь распространенной въ это время. Ристоро д'Ареццо [2]) и Данте думали, что суша сама по себѣ не можетъ ни подниматься ни опускаться; но звѣзды дѣйствуютъ на нее или такимъ-же образомъ, какъ магнитъ, или, вызывая внутри земли образованіе давящихъ вверхъ паровъ, притяженіемъ своимъ подымаютъ горы и возвышенности. Такимъ образомъ здѣсь рядомъ съ представ-

---

[1]) Ch. Lyell. Geschichte der Fortschritte der Geologie. Ubers. v. Hartmann. Weimar 1842 г. стр. 33.

[2]) Suess. Antlitz der Erde II томъ. Wien 1888 г. 9 стр.

леніемъ о дѣйствіи звѣздъ встрѣчаемъ указанія на реакцію вулканическихъ силъ.

Плутонисты XVIII и XIX столѣтія, какъ Гуттонъ и Плейфэръ, а потомъ Бухъ и Гумбольтъ объясняли преобразованія рельефа земли воздѣйствіемъ вулканическихъ силъ. Но эта теорія зародилась въ Италіи, гдѣ раньше Гуттона встрѣчаемъ настоящаго вулканиста въ лицѣ Лаццаро Моро. Монахъ Дженерелли [1]) въ докладѣ, читанномъ въ 1749 г. въ Кремонской Академіи Наукъ утверждалъ, что вулканическія силы могутъ поднимать не только отдѣльныя горы, но даже цѣлые материки.

Рядомъ съ теоріями вулканистовъ въ XVIII столѣтіи встрѣчаемъ и другія. По мнѣнію Демалье [2]) поверхность земли была искони неровная, но первоначально была вся покрыта водою. Материки образовались благодаря постепенному отступленію моря.

Любопытную, но фантастическую теорію предлагалъ въ 1799 г. Бертранъ [3]). Внутри земли находится полость, а въ ней подвижной магнитъ. Онъ перемѣщается подъ вліяніемъ притяженія кометъ и увлекаетъ за собою воды океановъ. Такимъ образомъ очертанія морей измѣняются, море смѣняетъ сушу, а суша море.

Въ XIX столѣтіи разныя теоріи быстро смѣняютъ другъ друга. Кювье [4]) и Э. де-Бомонъ полагали, что рельефъ земли созданъ рядомъ катаклизмовъ, изъ которыхъ послѣдній извѣстенъ подъ названіемъ Ноева потопа. Со времени этого послѣдняго катаклизма въ рельефѣ земли произошли только самыя незначительныя измѣненія. Эли де-Бомонъ утверждалъ [5]) что,

---

[1]) Ch. Lyell. loc. cit.

[2]) Cuvier. Discours sur les révolutions de la surface du globe. Paris 1840 г. стр. 50. (Это сочиненіе служитъ вступленіемъ къ: Ossements fossiles).

[3]) Cuvier. loc. cit. стр. 56.

[4]) Cuvier. loc. cit. стр. 280.

[5]) Elie de Beaumont. Ueber das relative Alter der Gebirgszüge. Извлеченіе изъ письма къ Гумбольту. Poggendorff's annalen XVIII томъ 1830 г. стр. 24.

Американскія Анды образовались во время Ноева потопа. Другіе хребты образовались раньше, но ихъ рельефъ подобно рельефу всей земли потерпѣлъ тогда значительныя измѣненія. Извѣстно что потомъ Бомонъ придумалъ теорію, по которой земля уподоблялась огромному кристаллу. Кристаллизація происходитъ медленно и постепенно, но образованіе реберъ и прочихъ частей кристалла происходитъ не равномѣрно, а прерывисто, внезапно, что даетъ поводъ къ катаклизмамъ. Горные хребты, это ребра кристалла.

Другіе приверженцы теоріи катаклизмовъ, отчасти самъ Бомонъ искали причину катаклизмовъ въ вулканическихъ и тому подобныхъ силахъ. Эти силы дѣйствуютъ внезапно и прерывисто, ибо отвердѣвшая кора земная не даетъ возможности расходовать вулканическую энергію постепенно.

Въ связи съ этими теоріями находится и Буховская теорія образованія горъ, по которой горы ничто иное, какъ вулканы особаго рода, именно такъ называемые вулканы поднятія.

На мѣсто теоріи катаклизмовъ Ляелль поставилъ свою теорію о медленномъ, но непрерывномъ дѣйствіи геологическихъ факторовъ. Отрицая возможность самостоятельныхъ колебаній уровня моря, онъ объяснялъ многочисленные слѣды наводненія суши волнами моря и послѣдовавшаго затѣмъ отступленія водъ, поднятіемъ или опусканіемъ самыхъ материковъ или частей ихъ. Онъ между прочимъ указывалъ на то, что такія перемѣщенія суши могутъ происходитъ вслѣдствіе химическихъ [1]) процессовъ, измѣняющихъ объемъ веществъ, процессовъ, происходящихъ внутри земли. Это послѣднее ученіе было потомъ подробно и основательно развито Моромъ въ его «Принципахъ Геологіи».

Мы сдѣлали бѣглый обзоръ этихъ теорій, не вдаваясь въ подробную критику. Критика здѣсь не нужна, ибо онѣ уже

---

[1]) Или физическихъ н. п. кристаллизаціи.

давно разобраны и всякой изъ нихъ отведено надлежащее мѣсто. Иныя изъ этихъ теорій заключаютъ въ себѣ значительную долю истины. Это можно н. п. сказать о теоріи Мора. Несомнѣнно многія дислокаціи произошли и происходятъ вслѣдствіе измѣненія объема при химическихъ процессахъ. Извѣстно, что дислокаціи въ области мѣсторожденій гипса объясняются сильнымъ расширеніемъ при превращеніи ангидрида въ гипсъ.

Остальныя прежнія теоріи образованія неровностей рельефа по большей части усматриваютъ причину дислокацій въ дѣйствіи вулканическихъ силъ. Новыя теоріи по большей части указываютъ на вѣковое охлажденіе земли, какъ на «primum mobile» дислокацій. Кромѣ этого указывается иногда на измѣненіе сжатія земли и на другіе факторы. Мы вкратцѣ просмотримъ нѣкоторыя изъ новѣйшихъ теорій образованія неровностей рельефа земли.

1. *Гипотеза Ноака* [1]) составлена отчасти еще подъ вліяніемъ идей Буха. «Мощныя цѣпи высокихъ горъ» говоритъ Ноакъ «возвышаются на трещинахъ, далеко простирающихся по поверхности земнаго шара и составляютъ нѣчто вродѣ остова материковъ. Возникновеніе горныхъ хребтовъ вызвало образованіе и обусловило очертанія современныхъ материковъ и соотвѣтствующихъ имъ морскихъ бассейновъ» [2]).

Ноакъ полагаетъ, что первоначальная тонкая кора земная была пересѣчена цѣлой сѣтью трещинъ, но по мѣрѣ того, какъ процессъ охлажденія подвигался впередъ, число трещинъ уменьшалось; наконецъ осталась только одна огромная трещина, опоясывающая всю землю. Чрезъ открытыя трещины лава выступала наружу, измѣняя положеніе ближайшихъ пластовъ земной оболочки. Такимъ образомъ произошли горные хребты съ продольнымъ ядромъ гранитной или другой лавы.

---

[1]) Noak. Ueber die Bildung der Continente. Neues Jahrb. für Mineralogie за 1875 г.

[2]) Loc. cit. стр. 904.

Когда сѣть трещинъ была густая, то образовались многочисленные, но не высокіе кряжи. По мѣрѣ того, какъ число трещинъ уменьшалось, высота новообразуемыхъ хребтовъ увеличивалась. Послѣдней единственной трещинѣ соотвѣтствуетъ самая большая горная система.

Ноакъ думаетъ, что эта система состоитъ изъ Андовъ Южной и Сѣверной Америки, потомъ изъ горъ Восточной Сибири, Центральной Азіи, изъ горъ Персіи, Кавказа, Балкана и Альпъ. Чтобы пояснить тотъ фактъ, что почти всѣ эти горные хребты находятся въ сѣверномъ полушаріи Ноакъ пробуетъ воспользоваться теоріей Шмика [1]).

Образованіе материковъ Ноакъ объясняетъ слѣдующимъ образомъ [2]): въ расплавленномъ ядрѣ земномъ есть приливы лавы, слѣдующіе съ Востока на Западъ. Гребень приливной волны поднимаетъ надъ собою кору земную, но, дойдя до трещины, выливается наружу, а потому за трещиной реакція прилива значительно слабѣе. Такимъ образомъ приливъ внутренней лавы ежедневно поднимаетъ кору на одной сторонѣ трещины все выше и выше, а по другую сторону остается углубленіе. Выливающаяся на поверхность земли лава, на мѣстѣ трещины образуетъ горный хребетъ, служащій границею между сушею и моремъ.

Не говоря о другихъ слабыхъ сторонахъ гипотезы Ноака, замѣтимъ только, что 1) волна прилива въ ядрѣ земномъ согласно изслѣдованіямъ Томсона и молодого Дарвина весьма незначительна, 2) что за приливомъ слѣдуетъ отливъ, во время котораго части земной коры, поднявшіяся во время прилива должны опуститься. Эту трудность Ноакъ обходитъ молчаніемъ.

---

[1]) Теорія Шмика впрочемъ ложная. Приливная волна всегда сопровождается подобной волной на противуположномъ полушаріи, которой высота только немногимъ меньше высоты волны на полушаріи, обращенномъ къ притягивающему тѣлу. Слѣдовательно солнечная аттракція никакъ не можетъ вызвать постояннаго прилива на одномъ только полушаріи. *Авторъ.*

[2]) Loc. cit. стр. 906 и слѣд. Описаніе образованія материка Южной Америки.

Гипотезу Пиляра [1]) можно назвать гидростатической. Согласно этой гипотезѣ, кора земная состоитъ изъ отдѣльныхъ частей, плавающихъ въ Океанѣ лавы совершенно такъ, какъ льдины плаваютъ въ водѣ. Дѣйствительно, средняя плотность породъ, изъ которыхъ состоятъ верхніе пласты земли меньше, чѣмъ плотность вулканическихъ лавъ. Подобно тому, какъ льдина тѣмъ болѣе выдается надъ поверхностью воды, чѣмъ ея толщина подъ поверхностью больше, такъ и материки соотвѣтствуютъ болѣе толстымъ частямъ земной коры [2]).

Мы должны однако замѣтить, что это мнѣніе противурѣчитъ законамъ вѣкового охлажденія земли, согласно которымъ, какъ это было показано въ первой части этой работы, земля должна быть болѣе охлаждена подъ дномъ моря, вслѣдствіе чего толстыя части земной коры должны скорѣе соотвѣтствовать областямъ Океана, чѣмъ суши.

По теоріи Дэны [3]) земля состоитъ изъ твердой оболочки, пластичнаго полужидкаго промежуточнаго слоя и твердаго ядра. Внутреннее ядро имѣетъ пожалуй нѣсколько иную фигуру, чѣмъ сама земля. Нѣкоторыя части поверхности твердаго ядра могутъ находиться ближе къ поверхности земли. Такимъ образомъ слой расплавленной лавы, будучи нѣсколько тоньше, могъ скорѣе охладиться и внѣшняя кора здѣсь образовалась раньше. Материки находятся на мѣстѣ этихъ раньше отвердѣвшихъ частей земной коры. Въ остальныхъ областяхъ уровень еще

---

[1]) Pilar. Grundzüge der Abyssodynamik. Agram. 1881.

[2]) Подобное мнѣніе относительно горныхъ хребтовъ было высказано уже прежде извѣстнымъ астрономомъ: Airy: онъ называлъ предполагаемыя утолщенія земной коры подъ горными кряжами, *корнями* горъ. См. O Fisher. On the Variations of gravity Phil. Magaz. Vol XXII 5 series (1886) стр. 1. Тотъ самый Fisher считаетъ ядро земли расплавленнымъ, для коры земной вычисляетъ слѣдующую толщину. Въ области материковъ 41 километровъ. Подъ Океанами глубиною въ 1609 метровъ (1 англ. миля) - толщина коры 50,7 кил. подъ Океанами въ 3,2 кил.—почти къ 80 кил. подъ Океанами глубиною въ 4,8 кил.—200 килом. см. рефератъ о новомъ изданіи книги Фишера. Physics of the Earth's crust Phil. Mag. 1890 г. 29 томъ 5 сер. стр. 213.

[3]) J. Dana. Manual of geology New-York 1875 стр. 738 и слѣд.

жидкой лавы былъ, должно быть, такой-же, какъ уровень отвердѣвшихъ частей, но потомъ вслѣдствіе дальнѣйшаго отвердѣнія и охлажденія онъ значительно понизился и такимъ образомъ составилъ морское дно. Дэна думаетъ, что кромѣ разстоянія отъ внутренняго ядра и другія причины могли вліять на неравномѣрное отвердѣніе разныхъ частей коры.

Разумѣется подъ материками мы здѣсь понимаемъ первоначальные материки, не современные.

Мнѣ кажется, что основная мысль теоріи Дэны справедлива. Дѣйствительно нѣтъ сомнѣнія, что охлажденіе и отвердѣніе земли неодинаковы въ разныхъ ея областяхъ,—но гипотеза внутренняго ядра, отвердѣвшаго раньше, чѣмъ поверхностная кора сама по себѣ вовсе не доказана, а потому нетолько не поддерживаетъ, но даже ослабляетъ гипотезу образованія материковъ.

Впрочемъ объ областныхъ различіяхъ въ отвердѣніи и охлажденіи земли будемъ говорить въ послѣдствіи. Тогда то мы найдемъ возможность окончательно обсудить, въ какой степени эти различія способствуютъ образованію неровностей рельефа [1]).

«Въ рельефѣ морского дня» говоритъ *Мушкетовъ* [2]) преимущественно развиты аккумулятивныя (каралловые рифы, пластовыя равнины) и отчасти тектоническія и денудаціонныя формы; изъ послѣднихъ исключительно абразіонныя, происшедшія

---

[1]) Въ небольшой статьѣ: (The origin of the Deep Troughs o the Oceanic Depression. Amer. Journ. of science 1889 г. см. тоже Fisher Physics of the Earth. London 1889 г. Appendix. стр. 16) Дэна разбираетъ вопросъ образованія глубокихъ ямъ среди Океаническихъ впадинъ. Онъ приходитъ къ заключенію, что эти ямы находятся въ тѣснѣйшей связи съ морфологіей сосѣднихъ материковъ. Онъ полагаетъ, что ни вулканическія силы, ни внѣшнія причины не могли дать повода къ образованію подобныхъ ямъ. Онѣ образовались подъ вліяніемъ тѣхъ-же самыхъ силъ, которыя моделлировали рельефъ земли.

Къ сожалѣнію статья Дэны была для меня недоступна, а потому я повторяю краткую выдержку изъ книги Фишера.

[2]) Мушкетовъ. Физич. Геологія I томъ С.-Пет. 1891 г. стр. 578.

отъ тектоническихъ, тогда какъ эрозіонныя формы почти отсутствуютъ. Изъ тектоническихъ формъ первое мѣсто занимаютъ дизъюнктивныя, именно грабены». Дальше встрѣчаемъ слѣдующія слова: «Уже à priori можно думать, что такіе крупные элементы пластики земной коры, какъ океаническія впадины и материковые массивы могли быть произведены только тектоническими процессами, какъ самыми мощными».

«Многія области» говоритъ Зюссъ [1]) «какъ н. п. Индо-Африка съ незапамятныхъ временъ не испытывали никакого движенія, вызывающаго складчатость; напротивъ того, онѣ или задерживаютъ складки, или проваливаются передъ ними. Результаты второго направленія движенія, (вертикальнаго въ противуположность къ тангенціальному, вызывающему образованіе складокъ) впадины или провалы всюду оставили свои слѣды».

«Средиземныя моря и самые большіе Океаны образуются и расширяются благодаря впадинамъ и проваламъ». «Мы свидѣтели того, какъ шаръ земной проваливается. Провалы собрали воду въ глубокіе Океаны. Благодаря проваламъ образовались материки и существованіе дышащихъ легкими животныхъ сдѣлалось возможнымъ».

Итакъ Мушкетовъ и Зюссъ согласны въ томъ, что крупныя черты рельефа земли произошли главнымъ образомъ отъ проваловъ. Подобное мнѣніе встрѣчаемъ у *Рейера* [2]).

Извѣстно, что *Лаппаранъ* [3]) критиковалъ взгляды Зюсса. Онъ почти совершенно отрицаетъ образованіе впадинъ и проваловъ. За то по его мнѣнію [4]) при сокращеніи объема земли могутъ образоваться большія плоскія складки въ родѣ тѣхъ, которыя у Дэны называются Геоактиклиналями и Геосинклина-

---

[1]) Suess. Antlitz der Erde I Bd. Prag 1885 стр. 777.

[2]) Reyer. Theoretische Geologie. Stuttgart 1888 стр. 781.

[3]) A. de Lapparent. Mouvements de l'écorce terrestre Bull. Soc. Geol. ser. 15 tome стр. 215 и слѣд. Sur le refroid issement et la contraction du Globe terrestre ibidem. стр. 383.

[4]) Loc. cit. стр. 235.

лями. Замѣтимъ, что Дэна признаетъ за такими складками большую роль въ процессѣ образованія крупныхъ неровностей рельефа.

Я не могу здѣсь высказаться въ пользу того или другого взгляда. Настоящая работа именно имѣетъ цѣлью бросить нѣкоторый свѣтъ на эти вопросы. Слѣдовательно только подъ конецъ ея я буду въ состояніи выразить свое мнѣніе. Теперь я могу сказать только то, что Зюссъ вовсе не пытался показать, что сокращеніе объема земли вслѣдствіе охлажденія дѣйствительно можетъ объяснить всѣ дислокаціи земной коры, а вычисленія Лаппарана не лишены погрѣшностей.

Упомянемъ еще о работѣ *Вальтера* [1]), который разсматриваетъ Океаны какъ большія впадины и пытается доказать, что настоящую границу материковъ и океановъ составляютъ флексуры. Того-же мнѣнія придерживается *Рудольфъ* [2]). *Рейеръ* [3]) же думаетъ, что Океаническіе высокіе берега, происшедшіе отъ тектоническихъ процессовъ состоятъ скорѣе изъ линій излома, чѣмъ изъ флексуръ.

Здѣсь умѣстно привести нѣкоторыя замѣчанія Неймайра [4]). Они интересны потому, что составляютъ до нѣкоторой степени «Credo» той школы геологовъ, которой главою считается Зюссъ. Мысль Неймайра можно вкратцѣ выразить слѣдующими словами: тѣ-же самыя силы, которыя воздвигли горные хребты, образовали материки и океаническіе бассейны. Материки—это нѣкотораго рода столбы, которые остались на своемъ мѣстѣ, или скорѣе понизились меньше, чѣмъ окружающія ихъ области. Радіусъ земли съ Силурійскаго времени до настоящаго сократился по крайней мѣрѣ на пять тысячъ метровъ, ибо красные силурійскіе известняки съ «Orthoceras», соотвѣтствующіе гло-

---

[1]) Johannes Walther. Ueber den Bau der Flexuren an den Grenzen der Continente. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. XX Bd. Jena 1887 стр. 266.

[2]) Мушкетовъ, loc. cit. стр 579.

[3]) Reyer loc. cit. стр. 781.

[4]) M. Neumayr. Erdgeschichte I Leipzig 1886 стр. 365.

бигериновому и красному илу Тихаго Океана, образующемуся на глубинахъ въ 4500 — 5000 метровъ, въ настоящее время залегаютъ совершенно горизонтально на высотѣ нѣсколькихъ десятковъ метровъ надъ уровнемъ моря.

Даже въ архэйскихъ формаціяхъ распространены разные сланцы, песчаники и другія породы, образующіяся изъ породъ суши, разрушенныхъ механической дѣятельностью волнъ у берега. Изъ этого Неймайръ заключаетъ, что даже въ архэйскую эпоху суша занимала обширныя области. Еслибы въ какую нибудь эпоху вся поверхностъ земли была покрыта Океаномъ, то отъ этой эпохи остались-бы только известняки, да пожалуй вулканическіе туффы.

Въ послѣдніе годы появилось нѣсколько работъ спеціально насъ интересующихъ. Таквми являются работы: Роміе, Тейлора, Гроссувра и т. д. Роміе [1]) разсматриваетъ охлаждающійся эллипсоидъ и находитъ, что величина дислокацій находится въ зависимости отъ географической широты. Это вполнѣ справедливо. Но дефомація Роміе не можетъ объяснить образованія материковъ, хотя онъ и полагаетъ, что даже впадина Тихаго Океана образовалась путемъ имъ указаннымъ. Дѣло въ томъ, что при однообразномъ охлажденіи однороднаго эллипсоида на поверхности могутъ образоваться только узкія складки. Образованію широкихъ морщинъ подъ дѣйствіемъ бокового давленія мѣшаетъ треніе о ниже лежащіе пласты, недопускающее до большихъ перемѣщеній частицъ. Это обстоятельство, наряду съ недостаточной упругостью и есть причина почему въ областяхъ складчатости вмѣсто одной большой складки образуются многочисленныя параллельныя складки.

На зависимость дислокацій отъ широты указываетъ и Гроссувръ [2]). Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ полагаетъ, что область складчатости отступаетъ на югъ. Гроссувръ говоритъ, что его тео-

---

[1]) A. Romieux. Comptes Rendus: томъ 108, 1889 г. стр. 337 и 851.

[2]) Grossouvre. Comptes Rendus томъ, 1888 г. стр. 827.

рія указываетъ на причину почему, «Vorländer» Зюсса находятся на сѣверѣ отъ Альпъ и Карпатовъ, но спрашивается какъ объяснить то явленіе, что «Vorländer» Азіятскихъ хребтовъ лежатъ на югѣ.

Теорія Гроссувра основана впрочемъ на абсолютно ложномъ физическомъ принципѣ. Онъ полагаетъ, что у охлаждающагося эллипсоида сжатіе уменьшается. Это положительно ложно. Если только нѣтъ внѣшнихъ силъ, измѣняющихъ моментъ вращенія, то при охлажденіи сжатіе эллипсоида увеличивается. Вотъ краткое доказательство справедливости нашихъ словъ. Сжатіе однороднаго эллипсоида опредѣляется изъ уравненія [1]).

$$(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arctang}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right] = \frac{25\mu^2}{6f.M^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Здѣсь μ есть вращательный моментъ.

M — масса тѣла.

ρ — средняя плотность.

f — постоянная притяженія, зависящая только отъ единицъ длины и массы.

λ есть нѣкоторая величина, связанная со сжатіемъ слѣдующей формулой:

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Слѣдовательно, сжатіе ε растетъ вмѣстѣ съ λ. Въ нашемъ уравненіи μ и M постоянны, но если эллипсоидъ охлаждается, то ρ, средняя плотность возрастаетъ, т. е. правая сторона уравненія возрастаетъ. Между тѣмъ лѣвая сторона уравненія для $\lambda=0$ тоже равна нулю, потомъ постоянно возрастаетъ и для $\lambda=\infty$ тоже дѣлается безконечно большой. Слѣдовательно, когда правая сторона, т. е. ρ больше, тогда и λ, а затѣмъ ε, т. е.

[3]) Tisserand Traité de Mécanique céleste II томъ стр. 96.

сжатіе больше. Тэйлоръ [1]) тоже предполагаетъ, что сжатіе земли уменьшается, но по другимъ причинамъ. Тэйлоръ имѣетъ главнымъ образомъ въ виду образованіе складчатыхъ горъ. По его теоріи складчатыя горы должны, собственно говоря, образоваться только въ экваторіальной области.

Наконецъ имѣемъ теорію Г. Г. Дарвина, спеціально относяшуюся къ образованію материковъ. Дарвинъ полагаетъ, что вращательная скорость земли уменьшается. Это привело его къ гипотезѣ образованія луны о которой будетъ сейчасъ рѣчь. Но рядомъ съ этимъ онъ замѣчаетъ, что при замедленіи вращенія измѣненія угловой скорости не идутъ «pari passu» во всѣхъ частяхъ жидкой массы, хотя огромное внутреннее треніе на ряду съ медленностью всего процесса не допускаютъ до значительныхъ отступленій отъ средней угловой скорости. Тѣмъ не менѣе эти небольшія отступленія могутъ довести до образованія широкихъ морщинъ, идущихъ въ сѣверномъ полушаріи съ Юго-Запада на Сѣверо-Востокъ, въ южномъ съ Сѣверо-Запада на Юго-Востокъ. Дарвинъ замѣчаетъ, что на сѣверномъ полушаріи подобное направленіе имѣетъ Атлантическій берегъ Америки, до нѣкоторой степени Атлантическій берегъ Европы и Тихоокеанскій берегъ Азіи.

Но гипотеза Дарвина, точно такъ, какъ гипотеза Роміе и большинство самыхъ раціональныхъ гипотезъ объ образованіи материковъ или складчатыхъ горъ страдаютъ тѣмъ [2]), что не могутъ объяснить несимметричности въ распредѣленіи материковъ и горъ.

Дѣйствительно несимметричность есть характеристическая черта рельефа земли. По всей вѣроятности не только въ нашу

---

[1]) T ylor. On the Crumpling of the Earth's Crust. Рефератъ въ Peterm. Mitth. за 1886 годъ. Litteraturber. 5.

[2]) G. H. Darwin Problems connected with the theory of the t des. Phil. Trans. 1879 г. стр. 589. I часть.

[3]) Дуттонъ выставляетъ этотъ упрекъ противъ всѣхъ горообразовательныхъ теорій. *Прим авт.*

геологическую эпоху, но и въ прежнія времена рельефъ земли былъ несимметричный. По крайней мѣрѣ во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда удавалось воспроизвести приблизительную картину[1]) распредѣленія материковъ и морей, всегда оказывалась, что это распредѣленіе несимметрично.

Между тѣмъ предполагается, что первоначально земля состояла изъ сфероидальныхъ слоевъ жидкости, симметричныхъ вокругъ оси вращенія и относительно экватора[2]). Съ другой стороны тѣ силы, на которыя обыкновенно указывается, какъ на причины образованія горъ и вообще неровностей рельефа дѣйствуютъ или однообразно по всей поверхности или симметрично относительно экватора.

Только однѣ дислокаціи, вызванныя перемѣщеніемъ оси вращенія не обладаютъ этой симметріей, но за то онѣ симметричны въ другомъ смыслѣ. Именно дислокація должна быть одинакова въ антиподахъ. Впрочемъ этого рода дислокаціи весьма незначительны, ибо сами отклоненія оси вращенія заключены въ весьма тѣсные предѣлы. По крайней мѣрѣ современное отношеніе главныхъ моментовъ инерціи земли таково, что, какъ показалъ Дарвинъ[3]) даже при распредѣленіи под-

---

[1]) Сравн. M. Neumayr. Die Geographische Verbreitung der Juraformation. Denkschr. Akad. Wiss. Wien за 1886 г.

Мушкетовъ. Физич. Геол. I часть С.-Пет. 1891 г. карты A. Geikie на стр. 648, 649, 650, 651.

[2]) Кромѣ гипотезы Канта-Лапласа имѣемъ гипотезу Норденшельда, высказанную уже въ началѣ этого столѣтія Маршаллемъ, состоящую въ томъ, что земля есть аггрегатъ метеоритовъ, скопившихся вокругъ какого-то малаго тѣла. Потомъ имѣемъ гипотезу Локіера и Дарвина (On the mechanical conditions of a swarm of meteorites and on theories of Cosmogony. Phil. Trans. за 1889 г.) по которой небесныя тѣла образуются вслѣдствіе конденсаціи облака газовъ, усѣяннаго мелкими метеоритами. По обѣимъ гипотезамъ первоначальное внутреннее строеніе земли тоже должно быть симметрично относительно экватора и независимо отъ геогр. долготы. Гипотеза Маршалля приводится у Кювье въ Discours surles revolutions du Globe Paris 1840 стр. 55. *Прим. авт.*

[3]) G. H. Darwin. On the influence of geological changes. Phil Trans. 1887. Дѣло слѣдуетъ понимать такъ: дислокаціи вызываютъ измѣненія въ по-

нятій и опусканій, обусловливающемъ максимальный эффектъ, поднятіе *половины* поверхности земли на 10,000 футовъ вызываетъ отклоненіе оси вращенія на $8^{0}4^{1}/_{2}'$. Между тѣмъ цѣлые материки составляютъ только малую долю поверхности земли: [н. п. Африка занимаетъ только $\frac{5,9}{100}$ поверхности] [1]).

ложеніи оси вращенія. Затѣмъ слѣдуетъ принаровленіе къ фигурѣ равновѣсія вокругъ новой оси, которое сопровождается подобными дислокаціями въ антиподахъ. *Прим. авт.*

[1]) Иные геологи, какъ Ваагенъ *), Фейстмантель утверждаютъ, что въ отложеніяхъ Каменноугольной и Пермской эпохи въ южной Африкѣ, въ Деканѣ и въ Австраліи конгломераты, извѣстные подъ названіемъ Талькировъ, Двайка—конгломератовъ и т. д. составляютъ слѣды ледниковой эпохи.

Очевидно гипотеза Ваагена плохо согласуется съ вышеприведенными изслѣдованіями Дарвина и другихъ математиковъ. Конечно, для устраненія противорѣчія можно предположить, что климатъ всей земли былъ весьма холодный въ эту эпоху. Но такое предположеніе само по себѣ мало вѣроятно, да при томъ идетъ въ разрѣзъ съ общимъ убѣжденіемъ относительно климата каменоугольной эпохи.

Здѣсь кстати приведемъ замѣчаніе Неймайра **) относительно климата древнихъ Геологическихъ эпохъ. Судя по ископаемымъ животнымъ и растеніямъ можно положительно утверждать, что, начиная съ Юрайскаго времени до нашего, климатическіе поясы распредѣлены концентрически вокругъ современныхъ полюсовъ. «Міоценскія флоры» говоритъ Гееръ «обступили сѣверный полюсъ какъ собаки такъ, что онъ не можетъ ускользнуть ни въ ту, ни въ другую сторону». Для Силурійской эпохи можно прослѣдить совершенно ясно точно такое распредѣленіе климатическихъ зонъ. Въ промежуточныя эпохи климатическіе поясы очерчены менѣе ясно Ископаемые остатки каменноугольнаго времени указываютъ на удивительно однообразный климатъ, но нѣтъ такого времени, для котораго можно доказать распредѣленіе климатическихъ поясовъ вокругъ другихъ полюсовъ. Жюдъ тоже указываетъ на климатическія зоны въ Камбрійскую, Силурійскую, Тріассовую, Юрайскую и Мѣловую эпохи. Въ виду всего этого мы склоняемся къ мнѣнію, что положеніе оси вращенія было во всѣ Геологическія эпохи, приблизительно такое, какъ въ наше время, а потому деформаціи, соединенныя съ перемѣной положенія оси вращенія играли небольшую роль въ образованіи рельефа земли. Ср. I часть 44 стр.

*) Waagen. Carbone Eiszeit. Jahrb. der k. k. Geol. Reichsanstalt Wien 1887 г.

Feistmantel. Litteratur Ber. Peterm. 1887 г. стр. 88. 1889 г. стр. 115.

David. On the evidence of glacial action in the Carboniferous. New South Wales. Phil. Magaz. XXIV. 5 ser стр. 135.

**) M. Neumayr. Die Klimazonen der Jurazeit. Denkschr. Akad. Wiss. Wien. 1883 г.

Но если положимъ, что строеніе земли «ab origine ipsa» было не симметрично, тогда тѣ-же самыя силы будутъ производитъ несимметричныя дислокаціи. При несимметричномъ строеніи сокращеніе объема земли вслѣдствіе охлажденія должно привести къ дислокаціямъ въ высокой степени несимметричнымъ. Но спрашивается, откуда могла произойти несимметричность внутренняго строенія? Отвѣтъ найдется въ нѣкоторыхъ работахъ Г. Г. Дарвина [1]) и Пуэнкаре, изъ которыхъ Фишеръ извлекаетъ заключеніе, что материки образовались при отдѣленіи луны отъ земли и что вѣроятно Тихій Океанъ находится на томъ мѣстѣ, откуда оторвалась луна.

Постараемся дать краткій очеркъ этой теоріи. Въ настоящее время благодаря реакціи приливовъ одновременно замедляется вращательная скорость земли и увеличивается разстояніе луны. Поэтому въ прошедшемъ день былъ короче, а луна ближе, реакція приливовъ еще сильнѣе. Такимъ образомъ, отступая мысленно назадъ видимъ, что скорость уменьшенія дня и уменьшенія разстоянія луны все больше и больше. Естественно предположить, что въ извѣстный моментъ оба тѣла соприкасались. Если въ этотъ моментъ оба тѣла были расплавлены, то само собою очевидно, что они должны были составлять одно цѣлое. Въ работѣ «On the Equilibrium of rotating masses of fluid» Дарвинъ пытался доказать, что распаденіе жидкой массы на двѣ части возможно при нѣкоторой враща-

[1]) G. H. Darwin. Precession of a viscous spheroid Phil- Trans. 1879.
On problems connected with the theory of the tides. ibid. 1879.
Evolution of the solar system. ibid. 1881.
Tidal friction. Treatise Nat. Phil. 1888 г. II часть.
Equilibrium of rotating masses of fluid. Phil. Trans. 1887 года.
Poincaré Equilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation. Acta Mathematica 7 томъ 1885 г.
O. Fisher. Physics of the Earth's Crust (II изд.) London 1889 г. глава XXV.

тельной скорости. Подобное изслѣдованіе, но гораздо выше стоящее во всѣхъ отношеніяхъ, было проведено Пуэнкаре, который показалъ, что жидкая однородная масса, вращающаяся вокругъ извѣстной оси по мѣрѣ того, какъ подвигается охлажденіе, а вслѣдствіе того вращательная скорость увеличивается; переходитъ отъ формы эллипсоида вращенія къ формѣ трехъосеваго эллипсоида Якоби [1]) а потомъ къ формѣ, въ которой стремленіе къ распаденію на двѣ части дѣлается совсѣмъ очевиднымъ.

Скажемъ еще нѣсколько словъ «pro» и «contra» гипотезы отдѣленія луны. Въ ея пользу говоритъ то, что по изслѣдованіямъ Максвелля, Ковалевской и Пуэнкаре [2]) надъ Сатурновыми кольцами и Пуэнкаре [3]) надъ кольцеобразными фигурами равновѣсія, оказывается, что кольцо есть фигура неустойчиваго равновѣсія и что Сатурновы кольца вѣроятно состоятъ изъ множества мелкихъ сателлитовъ. Это послѣднее мнѣніе подтверждается фотометрическими паблюденіями Зелигера.

Изъ этого опять слѣдуетъ, что по всей вѣроятности отдѣленіе спутника отъ планеты происходитъ не посредствомъ отдѣленія экваторіальнаго кольца, а какимъ-нибудь другимъ путемъ.

Но противъ гипотезы Дарвина и Пуэнкаре говоритъ то обстоятельство, что неоднородная жидкая масса можетъ правда, какъ показалъ Клэро, принять форму сфероида, весьма мало различающагося отъ шара, но не можетъ принять формы эллипсоида. Послѣднее положеніе было доказано независимо другъ отъ друга Гами и Биркенмайеромъ [4]) Поэтому вообще еще не-

---

[1]) Если a. b, c суть наибольшая, средняя и наименьшая полуоси эллипсоида, то эллипсоиды Якоби удовлетворяютъ условію:

$$\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

[2]) Tisserand. Traité de méc. cel. II часть стр. 185.

[3]) Poincaré. loc. cit. стр. 289.

[4]) Hamy Thèse de doctorat Paris 1887. см. Tisserand loc. cit. стр. 192. Birkenmayer. O kinetycznej równowadze ellipsoidy.............. Pam. Krakowskiej Akad. Umiej. VII томъ матем. отд.

извѣстно, какія формы равновѣсія можетъ принимать жидкая масса первоначально сфероидальной формы по мѣрѣ того, какъ охлажденіе подвигается впередъ.

И такъ пожалуй удобнѣе принять эту гипотезу съ нѣкоторымъ варіантомъ, указаннымъ Дарвиномъ [1]) въ послѣдствіи ближе обработаннымъ Лоувомъ [2]). Фишеръ тоже принимаетъ измѣненную гипотезу Дарвина. Сущность варіанта состоитъ въ слѣдующемъ. При малой длинѣ сутокъ, н. п. около 4 часовъ по всей вѣроятности періодъ солнечныхъ приливовъ совпадаетъ съ періодомъ свободныхъ колебаній жидкой массы той величины, какъ земля. Но въ такомъ случаѣ солнечные приливы въ жидкой массѣ земли могли достигать огромной величины. Сотрясенія должны быть настолько сильны, что отдѣленіе одной приливной выпуклости отъ земли дѣлается вполнѣ возможнымъ.

Этотъ варіантъ имѣетъ за собою еще то преимущество, что, если отдѣленіе приливной выпуклости совершилось въ то время, когда максимальный приливъ былъ не на экваторѣ, а подъ другой широтой, то отъ обоихъ полушарій отдѣлились неодинаковыя количества жидкой массы. Вслѣдствіе этого строеніе оставшейся земной массы сдѣлалось совсѣмъ несимметричнымъ. Разумѣется вслѣдствіе такой катастрофы фигура земли и моментъ вращенія должны были сразу измѣниться. Положеніе оси вращенія тоже измѣнилось. Подобная катастрофа сразу измѣнила внутреннее строеніе особенно у внѣшнихъ пластовъ, вмѣстѣ съ тѣмъ она оставила послѣ себя слѣды въ видѣ значительнаго углубленія и другія второстепенныя неровности рельефа. Конечно нельзя угадать, какой долженъ быть видъ земного рельефа сейчасъ послѣ подобной катастрофы, но нѣтъ сомнѣнія, что неровности были крупныя и что въ послѣдствіи, благодаря приноровленію къ фигурѣ равновѣсія, онѣ отчасти изгладились. Гипотеза отдѣленія луны даетъ намъ сразу крупные

[1]) Precession of a viscous spheroid 527.

[2]) On the oscillations of a rotating liquid spheroid. Phil. Mag. 1889 г. 27 томъ.

первичные материки. Это хорошо согласуется съ нѣкоторымъ обстоятельствомъ, на которое указываетъ Неймайръ, именно, что даже въ архэйскую эпоху несомнѣнно существовали крупные материки. Гипотеза Дарвина или вообще другая подобная гипотеза катастрофы даетъ ключъ къ объясненію другихъ вопросовъ, ибо влечетъ за собою предположеніе о существенно несимметричномъ внутреннемъ строеніи земли.

Теперь слѣдуетъ разобрать вопросъ, какія силы могутъ повести къ образованію новыхъ неровностей рельефа.

ГЛАВА II.

Значеніе измѣненій фигуры и вѣкового охлажденія.

Въ самой гипотезѣ Дарвина уже подразумѣвается причина нѣкоторыхъ измѣненій рельефа. Хотя бы даже, какъ думаетъ Фишеръ, въ моментъ катастрофы уже существовала кора земная, то во всякомъ случаѣ главная масса земли была еще настолько пластична, что притокъ жидкихъ массъ къ мѣстамъ слабаго давленія долженъ былъ отчасти загладить нѣкоторыя неровности рельефа, образовавшіяся во время катастрофы. Кромѣ этой причины существуютъ еще другіи вричины измѣненій рельефа.

Мы должны разсматривать землю съ того момента послѣ катастрофы, когда наконецъ установилась новая ось вращенія. Эту ось слѣдуетъ считать весьма постоянной, такъ какъ сжатіе земли, согласно большей скорости вращенія было въ прошедшемъ больше, чѣмъ въ настоящее время. Реакція приливовъ постоянно уменьшала вращательную скорость. Вслѣдствіе этого сжатіе уменьшалось.

Мы высказываемъ эти слова съ полной увѣренностью, ибо даже твердое тѣло должно измѣнять свою форму подъ вліяніемъ уменьшенія или увеличенія центробѣжной силы. Такъ н. п. Томсонъ [1]) находитъ, что при экваторіальной скорости враще-

---

[1]) Treat. on Nat. Phil. II часть стр. 435.

нія въ 100 метровъ въ секунду ($4^1/_2$ раза меньше какъ экват. скорость земли) стальной шаръ той величины, что земля, долженъ измѣниться въ эллипсоидъ со сжатіемъ $\frac{1}{7220}$, а стеклянной въ эллипсоидъ со сжатіемъ: $\frac{1}{6015}$.

Значитъ, смотря по степени пластичности веществъ, изъ которыхъ земля состоитъ, за измѣненіями центробѣжной силы должны непремѣнно послѣдовать большія или меньшія измѣненія формы [1]).

Тейлоръ [2]) основалъ свою теорію образованія горъ на де-

[1]) Мы здѣсь затронули важнѣйшій вопросъ *неподатливости* (rigidité) земли. На основаніи явленія приливовъ Томсонъ думаетъ, что земля весьма неподатлива. Дарвинъ (Treat. on Nat. Phil. II часть стр. 460) пытался опредѣлить степень этой неподатливости и пришелъ къ заключенію, что она близка къ степени неподатливости стали. Но Фишеръ (Physics of the Earth стр. 40) оспариваетъ этотъ результатъ, хотя вообще считаетъ неподатливость земли вполнѣ доказанной. Однако нельзя считать этотъ вопросъ вполнѣ рѣшеннымъ. Кри (M. Chree: On some applications of Physics and Mathematics to Geology. Phil. Magaz. 1891 г. 32 томъ) приходитъ къ заключенію, что на основаніи теоріи упругости (loc. cit. стр. 251) нельзя порѣшать, находится-ли земля въ жидкомъ или пластичномъ, или въ твердомъ состояніи. Съ другой стороны К. Барусъ (C. Barus Viscosity of solids Bulletin U. S. Geological survey N. 73 1891 года) нашелъ экспериментальнымъ путемъ, что уже при температурѣ 450° С. стекло обладаетъ всѣми свойствами вязкой жидкости. Тоже самое можно сказать относительно стали. По крайней мѣрѣ при этой темпер. сталь почти не сопротивляется скашиванію. Барусъ заключаетъ (loc. cit. стр. 71) что, если земля все таки обнаруживаетъ свойства упругаго твердаго тѣла, то это слѣдуетъ отнести на счетъ огромныхъ давленій внутри земли. Къ сожалѣнію онъ не изслѣдовалъ вліянія давленія на вязкость.

По всей вѣроятности земля обнаруживаетъ большую неподатливость въ реакціи приливовъ, въ которой деформирующая сила переходитъ отъ наименьшаго до наибольшаго напряженія въ сравнительно короткіе промежутки времени. Напротивъ того медленное увеличеніе или уменьшеніе центробѣжной силы, продолжающееся милліоны лѣтъ можетъ произвести крупную деформацію. Вѣдь хрупкіе стекляные пруты сгибаются подъ вліяніемъ постояннаго но весьма медленнаго гнутія. На это обстоятельство обращаетъ вниманіе Рейеръ. (Reyer. Theoretische Geologie Stuttgart. 1888 г. стр. 445 и слѣд.),

[2]) См. выше.

формаціи, зависящей отъ измѣненія сжатія. Насколько кажется эта деформація играетъ второстепенную роль.

Такъ какъ, несмотря на всяческія неровности, фигура земли въ общихъ чертахъ всегда была довольно близка къ эллипсоиду вращенія, то въ слѣдующемъ затѣмъ разсужденіи будемъ говорить объ эллипсоидѣ. Результатъ этого разсужденія въ общихъ чертахъ совершенно примѣнимъ къ землѣ.

Если объемъ эллипсоида совсѣмъ неизмѣняется или мало измѣняется, а между тѣмъ сжатіе уменьшается, то двѣ слѣдующія другъ за другомъ поверхности эллипсоида пересѣкаются вдоль параллели, которая всегда находится близко отъ 37° широты. Южнѣе этой параллели (Можно говоритъ объ одномъ полушаріи въ виду полной симметріи деформаціи относительно экватора) новая поверхность находится ниже прежней, сѣвернѣе параллели пересѣченія она находится выше. Слѣдовательно на югѣ кора подвергается сдавленію во всѣхъ направленіяхъ. Сдавленіе вдоль параллелей болѣе интензивно, оно доходитъ до *максимума* на экваторѣ, уменьшается до параллели пересѣченія, тутъ переходитъ въ растяженіе, все возрастающее до самаго полюса. Параллели остаются по прежнему кругами. Въ меридіональномъ направленіи кривизна увеличивается на сѣверѣ, уменьшается на югѣ.

Поэтому выше параллели пересѣченія складки не образуются. Онѣ будутъ образоваться южнѣе этой параллели, съ особенной интензивностью на экваторѣ. Такъ какъ давленіе дѣйствуетъ со всѣхъ сторонъ, то о направленіи складокъ рѣшаютъ второстепенныя обстоятельства н. п. различія въ свойствахъ веществъ и т. п.

Сравненіе этой картины съ рельефомъ земли показываетъ, что дислокаціи, обусловленныя измѣненіемъ сжатія играютъ второстепенную роль. Роль эта пожалуй сказывается въ томъ, что материки и горы экваторіальной области въ среднемъ все таки выше, чѣмъ материки и горы полярной области. Но одно ско-

пленіе величайшихъ Азіятскихъ горъ подъ средними широтами уже доказываетъ, что главная причина дислокацій заключается въ чемъ-то другомъ.

И такъ мы обращаемся къ извѣстнѣйшей причинѣ дислокацій, къ сокращенію объема земли вслѣдствіе вѣкового охлажденія. Но здѣсь сразу встрѣчаемъ работы новѣйшаго времени, которыя вообще оспариваютъ значеніе вѣкового охлажденія. Это работы Маллярдъ Рида и Фишера [1]).

Сущность аргументаціи этихъ ученыхъ состоитъ въ слѣдующемъ. Если охлаждается шаръ однородный, имѣвшій въ извѣстный моментъ всюду одну и туже температуру, то сначала внѣшніе слои настолько сокращаются, что мѣсто, занимаемое ими, оказывается слишкомъ просторнымъ. Вслѣдствіе этого они должны сначала растянуться. Только въ послѣдствіи, когда охлажденіе проникнетъ въ болѣе глубокіе слои и когда объемъ ниже лежащихъ слоевъ уменьшится, растяженіе прекращается и переходитъ въ сдавленіе. Такимъ образомъ внутри шара находится параллельная къ его поверхности шаровая поверхность, въ которой въ данный моментъ вещество не испытываетъ ни растяженія ни сокращенія. Это такъ называемая *поверхность безъ деформаціи*. О значеніи этой поверхности писалъ тоже Давизонъ [2]).

Поверхность безъ деформаціи опускается со временемъ. Основываясь на данныхъ, предложенныхъ Томсономъ, Фишеръ вычисляетъ, что поверхность безъ деформаціи въ настоящее

---

[1]) Ученіе свое Маллярдъ Ридъ изложилъ въ книгѣ Origin of Mountain Ranges London 1886 и въ цѣломъ ряду мелкихъ статей, помѣщаемыхъ въ Phil. Magaz. вплоть до послѣдняго года.

Фишеръ изложилъ свои взгляды тоже въ статьяхъ, помѣщаемыхъ въ Phil. Magaz. и въ книгѣ: Physics of the Earth's Crust London 1889 г. съ приложеніемъ, изданнымъ только въ 1891 г.

[2]) On the distribution of strain.... Phil. Trans. 1887 г. съ примѣчаніемъ Г. Г. Дарвина.

время находится на глубинѣ 2,13 [1]) анг. миль, если земля есть твердое тѣло, на глубинѣ 4,109 анг. миль, если ядро находится въ жидкомъ состояніи [2]). Дарвинъ и Ридъ нашли весьма близкія къ этому числа, Давизонъ, благодаря грубому методу вычисленія, нѣсколько большія.

Нѣтъ сомнѣнія, что при поверхности безъ деформаціи, залегающей на глубинѣ нѣсколькихъ верстъ подъ поверхностью земли, образованіе такихъ горныхъ хребтовъ, какъ Альпы, Гималаи или Тіань-шань, совершенно немыслимо. Но можно получить гораздо большіе результаты просто полагая, что охлажденіе продолжается не сто милліоновъ лѣтъ, какъ полагаетъ Томсонъ, а больше. Однако сущность вопроса заключается въ чемъ то другомъ. Томсонъ предполагаетъ, что въ исторіи земли былъ такой моментъ, когда температура земли была всюду одинакова. Но по всей вѣроятности такой моментъ никогда не существовалъ. Температура земли всегда была выше около центра, чѣмъ у поверхности. Но въ послѣднемъ случаѣ слой безъ деформаціи долженъ всегда находиться значительно глубже, чѣмъ у шара, разъ имѣвшаго всюду одну и туже температуру.

Докажемъ наше положеніе на нѣкоторомъ примѣрѣ. Прежде всего намъ нужно вывести формулу, опредѣляющую положеніе поверхности безъ деформаціи внутри шара, въ которомъ температура всегда была и есть единственно функція отъ радіуса. Въ выводѣ формулы пойдемъ по слѣдамъ Фишера.

Введемъ слѣдующія знакоположенія.

V обозначаетъ температуру.
t — время.
r — разстояніе отъ центра.

---

1) O. Fisher. On the amount etc..... Ph. Mag. 1887 г. 23 томъ.
.... On the mean height.... Ph. Mag. 1888 г. 25 томъ.

2) .... Physics...... Appendix стр. 48.

ε обозначаетъ коэффиціентъ разширенія (линейный).
k — коэффиціентъ теплопроводности.
c — коэффиціентъ теплоемкости по отношеніи къ объему [1]).
R — радіусъ шара.

Буквы со штрихами относятся къ спеціально разсматриваемому слою шара.

Въ продолженіи времени dt объемъ безконечно тонкаго сферическаго слоя измѣняется на

$$3\varepsilon . 4\pi r^2 dr. \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

Слѣдовательно объемъ всего вещества внутри сферы радіуса: r_1 измѣняется на:

$$12\pi\left[\int_0^{r_1} \varepsilon r^2 \frac{\partial V}{\partial t} dr\right] dt$$

а поверхность этой сферы измѣняется на

$$\frac{24\pi}{r_1}\left[\int_0^{r_1} \varepsilon r^2 \frac{\partial V}{\partial t} dr\right] dt.$$

Налегающій на эту сферу слой не испытываетъ ни сокращенія, ни растяженія, если въ тотъ самый моментъ измѣненіе его поверхности, вызванное измѣненіемъ температуры, какъ разъ равно измѣненію поверхности сферы. Но его поверхность измѣнилась на:

$$4\pi r_1^2 . 2\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} dt$$

Слѣдовательно положеніе поверхности безъ деформаціи опредѣляется условіемъ:

[1]) У английскихъ авторовъ $\frac{k}{c}$ обозначено буквой k.

$$\frac{3}{r_1^3}\int_0^{r_1} \varepsilon r^2 \frac{\partial V}{\partial t}\, dr = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial t} \qquad \text{I.}$$

Причемъ, смотря потому будетъ-ли [1])

$$\frac{3}{r_1^3}\int_0^{r_1} \varepsilon r^2 \frac{\partial V}{\partial t}\, dr \gtreqless \varepsilon_1 \frac{\partial V}{\partial t} \qquad \text{II}$$

данный слой испытываетъ сдавленіе, не испытываетъ деформаціи, или испытываетъ растяженіе. Между тѣмъ температура удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r^2 c}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2 . \frac{\partial V}{\partial r}\right) \qquad \text{III}$$

Если предположимъ, что шаръ однороденъ, т. е. что:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \text{пост.}$$
$$k = \text{пост.}$$
$$c = \text{пост.}$$

тогда, замѣщая въ уравн. I: $\frac{\partial V}{\partial t}$ посредствомъ его значенія, взятаго изъ уравн. III, найдемъ весьма простыя формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3k}{c}\frac{\partial V}{\partial r} &= r\frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \end{aligned}\right\} \text{I bis.}$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что положеніе слоя безъ деформаціи у однороднаго шара не зависитъ отъ коэфф. расширяемости, о чемъ говоритъ и Фишеръ. Дальше, вторая формула показываетъ, что изъ наблюденій надъ градіентомъ

---

[1]) У Фишера какъ разъ наоборотъ, но разсуждая объ охлаждающемся шарѣ онъ видно въ данный моментъ забылъ о томъ, что $\frac{\partial V}{\partial t}$ есть отрицательная величина. см. работу въ 25 томѣ Phil. Magaz. стр. 9. *Прим. авт.*

можно найти положеніе поверхности безъ деформаціи, если шаръ однороденъ. Послѣдняя формула можетъ быть приведена къ виду

$$G = (R - x)\frac{dG}{dx}$$

гдѣ G обозначаетъ градіентъ, x разстояніе отъ поверхности шара.

$$G = -\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial r}}$$

Для простоты предположимъ, что наши единицы температуры и длины таковы, что первоначальная температура центра шара равнялась одному градусу, а радіусъ шара равенъ π. Положимъ, что температура поверхности шара была равна 0^0 и что температура среды постоянно равна 0^0. Положимъ наконецъ, что первоначальная температура выражалась функціей.

$$\frac{sinr}{r}$$

эта функція постоянно уменьшается отъ значенія: 1 при $r = o$ до значенія 0 при $r = \pi$.

Тогда во всякое время, во всякой точкѣ внутри шара температура выразится функціей.

$$V = \frac{sinr}{r} e^{-\frac{k}{c}t}$$

Подставимъ эту функцію въ условныя уравненія: I bis. Получимъ слѣдующее уравненіе, опредѣляющее положеніе поверхности безъ деформаціи:

$$tangr = \frac{3r}{3 - r^2}$$

Этому уравненію удовлетворяетъ вопервыхъ значеніе:

$$r = o$$

Слѣдующіе затѣмъ положительные корни (отрицательные не имѣютъ физическаго значенія) находятся по одному между [1]).

$$\frac{3\pi}{2} \text{ и } 2\pi$$

$\frac{5\pi}{2}$ и 3π и т. д., т. е. за предѣлами радіуса нашего шара.

Наконецъ отъ o до π:

$$tang r > \frac{3r}{3-r^2}$$

Слѣдовательно:

$$V\frac{\partial V}{\partial t} > \frac{3k}{c}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Изъ этого заключаемъ, что въ данномъ случаѣ поверхность безъ деформаціи сводится къ одной точкѣ, къ центру шара и, разумѣется, положеніе ея не зависитъ ни отъ времени, ни отъ коэффиціентовъ ε и $\frac{k}{c}$ Притомъ всѣ слои шара постоянно подвержены сдавленію.

Я думаю, что этотъ примѣръ довольно хорошо показываетъ вліяніе первоначальнаго распредѣленія температуры. Вмѣстѣ съ тѣмъ я думаю, что выводы Фишера и Маллярдъ Рида, основанные на задачѣ Томсона [2]) принятой безъ всякой критики, совершенно несостоятельны и что мы должны скорѣе скло-

---

[1]) М. П. Рудскій. Къ теоріи вѣкового охлажденія земли I часть XIV томъ Зап. Нов. Общ. Ест. Одесса, 1891 г. стр. 70.

[2]) Cooling of the Earth. II часть Treat. on Nat. Phil. II Appendix

ниться къ мнѣнію многочисленныхъ геологовъ, усматривающихъ во вѣковомъ охлажденіи земли причину образованія горъ и другихъ неровностей рельефа.

Мы, конечно, не утверждаемъ, что температура земли выражается закономъ, принятымъ въ только что изложенной задачѣ, но утверждаемъ, что температура наружныхъ слоевъ была всегда ниже температуры перицентрической области и что *слой* безъ деформаціи находился и находится значительно глубже, чѣмъ полагаетъ Фишеръ.

Чтобы подкрѣпить это мнѣніе скажемъ слѣдующее. Земля есть неоднородное тѣло. Вещества ея распредѣлены по удѣльной плотности, самыя тяжелыя вокругъ центра, самыя легкія снаружи. Поэтому даже въ то время, когда земля была жидкая, или газообразная, конвективные токи были ограничены нѣкоторыми предѣлами. Тяжелыя вещества перицентрической области выносились наружу только при исключительныхъ обстоятельствахъ.

Непрерывные токи, идущіе отъ центра къ поверхности и назадъ возможны только въ однородной жидкой массѣ. Между тѣмъ только при такихъ перемѣшивающихъ всю массу *жидкости* токахъ возможна приблизительно постоянная температура всей массы. Но безъ такихъ конвективныхъ токовъ, температура будетъ всегда выше около центра, чѣмъ у поверхности, гдѣ происходитъ передача теплоты въ междупланетное пространство.

Томсонъ полагаетъ, что температура всей массы земной была въ извѣстный моментъ постоянная потому, что онъ склоняется къ мнѣнію Лапласа, что большая плотность ядра земли обусловлена давленіемъ. Но, думаю, немногіе геологи согласны съ этимъ мнѣніемъ. Извѣстно, что базальты, происходящіе изъ сравнительно небольшой глубины уже значительно тяжелѣе, чѣмъ породы, залегающія на поверхности, чѣмъ граниты и т. д. Изслѣдованія Добрэ [1]) надъ строеніемъ метеоритовъ даютъ по-

[1]) Daubrée. Etudes synthetiques sur la Geologie Experimentale. Paris 1879.

водъ полагать, что ядро земли заключаетъ много желѣза, а нахожденіе самороднаго желѣза въ базальтахъ острова Антримъ, въ нашихъ Волынскихъ анамезитахъ и на островѣ Диско въ высокой степени поддерживаютъ это мнѣніе.

Но разъ допустимъ, что земля неоднородна, то предположеніе Томсона объ однообразности температуры въ жидкой массѣ земли «eo ipso» падаетъ.

Въ такомъ случаѣ задача объ *общемъ* охлажденіи земли не можетъ быть рѣшена. Для ея рѣшенія непремѣнно нужно знать распредѣленіе температуры отъ поверхности до центра въ извѣстный моментъ времени. Зная подобное распредѣленіе, нетрудно опредѣлить температуру для всего послѣдующаго времени, а вводя условіе, чтобы теоретическій градіентъ въ поверхностныхъ пластахъ былъ равенъ наблюдаемому, нетрудно вычислить, какой промежутокъ времени истекъ отъ того момента, когда существовала заданная температура до настоящаго.

Но намъ неизвѣстно не то ужъ распредѣленіе температуры внутри земли въ какой-либо моментъ прошедшаго, но даже въ настоящее время. Поэтому задача объ общемъ охлажденіи земли и о ея возрастѣ есть совершенно неопредѣленная.

Замѣтимъ, что при предположеніи, что первоначальная температура центра выше, чѣмъ температура поверхности оказывается слѣдующее:

Если допустить, что температура центра была значительно больше, чѣмъ у Томсона (у Томсона 3800°C.), то при совершенно вѣроятныхъ распредѣленіяхъ температуры получается возрастъ земли несравненно большій, чѣмъ 100 милліоновъ лѣтъ. Но изъ допущенія, что температура центра была значительно больше, чѣмъ 3800°C, слѣдуетъ, что въ первоначальное время и даже въ настоящее значительная часть ядра была вѣроятно жидкая. Въ свою очередь слѣдуетъ помнить, что даже при довольно большомъ жидкомъ ядрѣ земля можетъ обнаруживать большую неподатливость.

Значить, намъ остается только разсмотрѣть, какимъ образомъ и при какихъ условіяхъ охлажденіе земли можетъ привести къ образованію крупныхъ неровностей рельефа т. е. материковъ и Океаническихъ бассейновъ. Здѣсь, правда, мы затронули мимоходомъ и теорію образованія горъ, но оба вопроса тѣсно связаны между собою, а потому пожалуй умѣстно указать на тѣ причины, которыя обусловливаютъ съ одной стороны образованіе горъ, а съ другой образованіе материковъ.

Еслибъ первочальное распредѣленіе температуры внутри земли было функція отъ одного лишь радіуса, еслибъ охлажденіе подъ всѣми широтами и долготами было одинаково и еслибы распредѣленіе веществъ внутри земли было функція отъ одного лишь радіуса, то сокращеніе земли былобы во всѣхъ направленіяхъ одно и тоже, а потому на поверхности моглибы образоваться лишь складки да мелкія трещины и впадины. Но коль скоро одно изъ трехъ вышеупомянутыхъ условій не удовлетворено, то сокращеніе неодинаково во всѣхъ направленіяхъ. Вслѣдствіе этого образуются обширныя выпуклости и впадины. Поэтому Леконтъ [1]) предполагаетъ, что материки образуются благодаря мѣстнымъ различіямъ въ общемъ радіальномъ сокращеніи земли. Фишеръ [2]) вооружается противъ этого мнѣнія, говоря, что такъ какъ радіусъ земли отъ начала охлажденія до настоящаго времени сократился всего на 6 анг. миль, (анг. миля=1,609 метрамъ) то разности въ радіальномъ сокращеніи никакъ не могли довести до образованія материковъ. Здѣсь опять встрѣчаемъ туже самую слѣпую вѣру въ авторитетъ Томсона. Такъ какъ тотъ остановился на числѣ 100,000,000 лѣтъ для возраста земли, то Фишеръ вычисляетъ сокращеніе радіуса послѣ ста милліоновъ лѣтъ, хотя самъ Том-

---

[1]) Physics of the Earth's Crust стр. 126.

[2]) ditto...... стр. 355.

сонъ [1]) говоритъ, что возрастъ земли вѣроятно заключается между 20 и 400 милліонами лѣтъ. Мы здѣсь не будемъ опредѣлять возраста земли, не будемъ искать доказательствъ *pro* и *contra*, основанныхъ на продолжительности времени, въ теченіе котораго земля охлаждается. Мы только посмотримъ, какіе процессы и при какихъ условіяхъ способны довести до образованія новыхъ материковъ и Океаническихъ бассейновъ.

Прежде всего разсмотримъ вліяніе внѣшнихъ условій, которыя можно обозначить однимъ названіемъ *климатическихъ условій*. Этому вопросу была посвящена первая часть настоящей работы (XIV томъ Зап. Математ. Отдѣл. Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей) поэтому въ слѣдующихъ затѣмъ строкахъ только вкратцѣ повторимъ изложенные тамъ результаты.

---

[1]) Cooling of the Earth. Treat. on Nat. Phil. II часть стр. 474.

ГЛАВА III.

Разборъ термическихъ факторовъ, способствующихъ образованію новыхъ неровностей рельефа.

Подъ климатическими факторами будетъ понимать разности въ распредѣленіи средней солнечной теплоты въ поверхности суши, вліяніе холодной воды въ Океанахъ на температуру дна и т. п.

Можно совсѣмъ не вдаваться въ разсмотрѣніе условій утраты теплоты въ поверхности суши и на днѣ Океана.

Извѣстно, что, если внутри тѣла передача теплоты совершается путемъ теплопроводности; то температура вполнѣ опредѣляется во всякое время, во всякомъ мѣстѣ, если извѣстно первоначальное распредѣленіе температуры и температура поверхности во всякое время [1]). Слѣдовательно вмѣсто того, чтобы разсматривать условія передачи теплоты, лучше взятъ во вниманіе данныя, позволяющія опредѣлитъ температуру поверхности шара.

Мы будемъ разсматривать однородный шаръ, вопервыхъ потому, что строеніе ядра земли намъ неизвѣстно, во вторыхъ потому, что задача объ охлажденіи неоднороднаго шара, пока

---

[1]) Т. е. другими словами извѣстному первон. распредѣленію температуры и извѣстному ходу температуръ внутри тѣла въ послѣдующее время соотвѣтствуетъ только одно распредѣленіе температуры въ поверхности и наоборотъ.

коэффиціенты теплопроводности и т. д. не выражены въ функціи отъ координатъ не можетъ быть доведена до окончательныхъ результатовъ.

Мы задаемся н. п. слѣдующимъ вопросомъ? Не производитъ-ли климатическое неравенство между экваторомъ и полюсами нѣкотораго вліянія на форму земли. Отвѣтъ послѣдуетъ изъ нѣкоторой теоретической задачи, которую сейчасъ рѣшимъ.

Исключимъ вліяніе всѣхъ прочихъ климатическихъ факторовъ. Предположимъ, что первоначальное распредѣленіе температуры внутри шара было функція отъ радіуса, но съ извѣстнаго момента, положимъ съ момента $t=o$ въ средней годичной температурѣ верхняго слоя почвы оказываются нѣкоторыя разности, зависящія отъ географической широты. Если средняя температура почвы подъ экваторомъ превышаетъ среднюю температуру почвы на полюсѣ на A градусовъ, то можно выразить это неравенство въ видѣ функціи отъ геогр. широты слѣдующимъ образомъ:

$$A\left(sin^2\varphi - \frac{2}{3}\right)$$

или, вводя вмѣсто геогр. широты угловое разстояніе отъ сѣвернаго полюса;

$$A\left(\frac{1}{3} - cos^2\theta\right).$$

Температура шара выразится слѣдующей формулой [1])

$$V.+\left(\frac{r}{R}\right)^2 A\left(\frac{1}{3} - cos^2\theta\right).\left[1 - s^2\right] \qquad \text{(IV)}.$$

V есть функція только отъ времени и радіуса. Поэтому во всякой шаровой концентрической поверхности она имѣетъ

[1]) См. I часть этой работы § 4.

вездѣ одно и тоже значеніе, измѣняющееся только въ зависимости отъ времени. Слѣдующій членъ выражаетъ вліяніе климатическаго неравенства между полюсомъ и экваторомъ. Функція: s_2 есть нѣкоторый рядъ, состоящій изъ экспоненціальныхъ и изъ Бесселевыхъ функцій слѣдующаго вида [1]):

$$s_2 = \sum_{i=1}^{i=\infty} a_{2,i}\,\varphi_2(p_i r)\,e^{-\frac{k}{c}p_i^2 t} \qquad \text{V}$$

гдѣ

$$a_{2,i} = -\frac{2}{p_i \frac{d\,\varphi_2(p_i R)}{dp_i}}$$

$$\varphi_2(pr) = \frac{J_{2+1/2}}{(pr)^{2+1/2}}$$

$J_{2+1/2}$ есть функція Бесселя порядка: $2+1/2$.

Коэффиціенты: p опредѣляются изъ уравненія:

$\varphi_2(p_i R) = o$, гдѣ R = радіусу шара

Для	$t = o$	$s_2 = 1$	
	$t = \infty$	$s_2 = o$	VI
для	$r = R$	$s_2 = o$	

Благодаря этимъ свойствамъ ряда s_2, въ поверхности шара т. е. въ поверхности $r = R$ разности температуръ поверхности зависятъ только отъ члена:

$$A\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right)$$

ибо V, въ поверхности всюду имѣетъ одно и тоже самое значеніе. Тоже самое происходитъ и внутри шара во всякой концентрической шаровой поверхности. Только разности температуръ меньше. Онѣ зависятъ отъ выраженія:

[1]) Знакоположенія остаются тѣ же, что прежде. *Прим. авт.*

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 A\left(\frac{1}{3} - cos^2\theta\right)(1 - s_2)$$

Въ продолженіе времени отъ o до t, всякій элементъ полярнаго или экваторіальнаго радіуса, имѣвшій длину: dr измѣнится и будетъ имѣть длину.

$$dr\left[1 + \varepsilon(V_i - V_o)\right] \qquad \text{VII}$$

Такъ какъ температура V въ формулѣ IV не можетъ оказать вліянія на измѣненіе сжатія, только на общее сокращеніе, то предположимъ, что она совсѣмъ постоянна по отношенію ко времени.

Значитъ: (смотри формулы: IV)

$$V_t - V_o = -\frac{2A}{3}(1 - s^2)\left(\frac{r}{R}\right)^2 \text{ [1]}$$

вдоль полярнаго радіуса;

$$V_t - V_o = \frac{1}{3}A(1 - s_2)\left(\frac{r}{R}\right)^2 \qquad \text{VIII}$$

вдоль экваторіальнаго радіуса.

Слѣдовательно полярный радіусъ, имѣвшій въ моментъ $t = o$, длину: R въ моментъ $t = t$ имѣетъ длину:

$$R - \frac{\varepsilon}{R^2}\frac{2}{3}A\int_o^R (1 - s^2)r^2\,dr \qquad \text{IX}$$

---

[1]) Если взять во вниманіе другой радіусъ, составляющій съ полярнымъ уголъ θ, то:

$$V_t - V_o = A\left(\frac{1}{3} - cos^2\theta\right)(1 - s^2)\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Однако, кромѣ направленія главныхъ осей, по всѣмъ другимъ напраавленіямъ происходятъ нѣкоторыя тангенціальныя, хотя крайне малыя перемѣщенія. Вслѣдствіе этого формула VII примѣнима къ нимъ только въ приближеніи.

Прим. авт.

или

$$R\left(1-\frac{2\varepsilon A}{9}\right)+\frac{\varepsilon}{R^2}\cdot\frac{2A.}{3}\int_o^R s_2\, r^2\, dr$$

Экваторіальный радіусъ, имѣвшій длину: R, теперь имѣетъ длину:

$$R\left(1+\frac{\varepsilon A}{9}\right)-\frac{\varepsilon}{R^2}\frac{1}{3}A\int_o^R s_2\, r^2\, dr \qquad \text{X}$$

отсюда, пренебрегая малыми величинами, найдемъ для сжатія [1]) выраженіе:

$$\frac{\varepsilon.A}{3}-\frac{\varepsilon.A}{R^3}\int_o^R s_2\, r^2\, dr$$

Когда $t=\infty$, то $s_2=o$ и сжатіе равно:

$$\frac{\varepsilon.A}{3} \qquad \text{XI}$$

Полагая, вмѣстѣ съ Фишеромъ [2]) $\varepsilon = 0{,}000007$ на 1^0 F. или $0{,}0000126$ на 1^0C., полагая дальше, что $A = 50^0$ [3]), найдемъ сжатіе:

---

[1]) Въ 1-ой части этой работы я вычислялъ деформаціи другимъ образомъ. Результатъ получился большій, но формула для измѣненія длины радіуса была не совсѣмъ точная. Она была выведена въ предположеніи, что расширеніе въ сторору невозможно. *Прим. авт.*

[2]) O. Fisher. On the mean height...... Phil. Magaz. 25 томъ 17 стр.

[3]) Разность средней температуры почвы у полюса и на экваторѣ въ 50°C., кажется мнѣ, достаточна. Въ самомъ жаркомъ климатѣ въ настоящее время средняя температура воздуха не превышаетъ 30°C. Изъ наблюденій надъ температурой почвы извѣстно, что средняя темп. почвы обыкновенно нѣсколько выше средней температуры воздуха. Въ Нукусѣ надъ Аму Дарьей по наблюденіямъ Доранта положительная разница 4°C. Температура почвы на полюсѣ намъ неизвѣстна, но средняя температура почвы въ Якутскѣ на глубинѣ 2 метровъ равна—11°1C., а, судя по температурамъ воздуха, въ иныхъ мѣстахъ Восточной Сибири она доходитъ до—15°C. Такимъ образомъ, въ настоящую эпоху разность между самыми крайними температурами почвы вѣроятно не больше 50°R. Что касается предъидущихъ геологическихъ эпохъ, если припомнимъ, что вліяніе внутренней теплоты земли на темп.

$$0{,}00021 = \frac{1}{4762}.$$

Разность между экваторіальнымъ и полярнымъ радіусомъ равна 1378 метрамъ, если среднiй радіусъ земли равенъ 6370 километрамъ.

Такъ какъ климатическое неравенство между полюсомъ и экваторомъ есть навѣрно самое древнее, то быть можетъ, въ сжатіи земли есть нѣкоторая доля, которую слѣдуетъ отнести на счетъ этого климатическаго неравенства. Но эта доля навѣрно меньше вычисленнаго здѣсь сжатія, ибо оно составляетъ предѣлъ, достижимый только послѣ безконечнаго времени. Оно мало увеличивается, если коэфф. расширенія для ядра больше коэффиціента расширенія для веществъ коры; ибо окончательное сжатіе внутреннихъ слоевъ опредѣляется формулой [1]).

$$\frac{\varepsilon}{3} \cdot A \cdot \frac{r^2}{R^2} \qquad \text{XII}$$

Слѣдовательно оно уменьшается прямо пропорціонально квадрату разстоянія отъ центра—а потому въ общемъ преимущественно зависитъ отъ сокращенія верхнихъ слоевъ. Точно такъ, если предположимъ, что въ температурѣ почвы существуетъ неравенство вида

$$\frac{B}{2} \cos \theta$$

[гдѣ B выражаетъ амплитуду разности температуръ между однимъ и другимъ полюсомъ], то найдемъ на одномъ полюсѣ возвышеніе поверхности въ:

почвы было вѣроятно больше, чѣмъ въ настоящее время; то придемъ къ заключенію, что разность температуръ въ 50°C. для этихъ эпохъ совершенно достаточна. *Прим. авт.*

[1]) Эту формулу легко вывести на подобіе формулы XI, интегрируя въ формулахъ IX и X отъ o до r. *Прим. авт.*

$$\frac{B}{4}\varepsilon . R \text{ метровъ}$$

а на другомъ пониженіе въ:

$$\frac{B}{4}\varepsilon . R \text{ метровъ}$$

н. п. полагая, что $B=10^0$ найдемъ, что

$$\frac{B}{4}\varepsilon . R = 200{,}6 \text{ метрамъ.}$$

Я взялъ амплитуду въ 10°C. имѣя въ виду неравенство температуры между полушаріемъ Океановъ и полушаріемъ суши.

Такимъ образомъ полюсъ: $\theta = o$ долженъ находиться вблизи Лондона, полюсъ $\theta = \pi$, въ антиподахъ Лондона. Амплитуду въ 10°C. нахожу изъ приблизительнаго вычисленія, если устранить всѣ прочіе климатическіе факторы. Разумѣется функція

$$\frac{B}{2}\cos\theta$$

только въ грубомъ приближеніи изображаетъ разсматриваемое климатическое неравенство. Можно себѣ представить, что обѣ деформаціи, прежде вычисленная и только что упомянутая, какъ бы наложены другъ на друга [1]) и вычислить поднятіе, или пониженіе поверхности въ данномъ мѣстѣ. Нужно только помнить, что для первой полярная ось проходитъ сквозь географическіе полюсы, для второй сквозь Лондонъ и его антиподы.

Большія неровности рельефа, какъ обѣ Америки, Европа съ Африкой выражаются гармоническими функціями 4-аго по-

---

[1]) Еслибъ взять предѣльныя разности между температурой дна Океановъ и почвы материковъ, то получились бы возвышенія и пониженія доходящія до 700 м. Но тогда нельзя уже сочетать обѣ деформаціи вмѣстѣ.

Прим. авт.

рядка [1]) но различія въ температурѣ почвы, находящіяся въ прямой зависимости отъ этихъ неровностей рельефа, незначительны [2]). Съ другой стороны въ выраженіи ихъ вліянія на температуру внутри земли появляется факторъ:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4$$

а потому даже окончательныя деформаціи будутъ незначительны. Онѣ не будутъ больше какой нибудь сотни метровъ.

Помощью ряда сферическихъ функцій можно выразить какое угодно распредѣленіе температуры въ поверхности земли и прослѣдить вліяніе такого распредѣленія на температуры ядра, но для нашей цѣли этого не нужно, ибо мы уже показали какое значеніе для деформаціи земли имѣютъ главнѣйшіе климатическіе факторы.

Теперь мы въ состояніи дать отвѣтъ на нѣкоторые въ послѣднее время затронутые вопросы. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ Фэй и Лаппаранъ [3]) вели оживленный споръ объ охлажденіи земли. Фэй утверждалъ, что земля болѣе охлаждена подъ Океанами, чѣмъ подъ материками. Очевидно Фэй былъ правъ, ибо разъ температура почвы на днѣ Океана ниже, чѣмъ въ поверхности суши, то это отзывается и на внутреннемъ распредѣленіи температуры. Въ свою очередь Лаппаранъ былъ правъ, говоря, что у полюсовъ, или вообще въ области очень холоднаго климата охлажденіе больше, чѣмъ подъ дномъ Океановъ.

Аргументъ Лаппарана, что почва подъ дномъ Океана плохо проводитъ теплоту не выдерживаетъ критики. Почва на

---

[1]) G. H. Darwin· On the stresses. Phil. Trans. 173 томъ Part. l. стр. 228.

[2]) Чтобы пояснить значеніе этихъ словъ укажемъ н. п. на разности температуры, соотвѣтствующей данной широтѣ. Здѣсь можно тоже взять предѣльныя разности. Тогда деформація дойдетъ до 300—400 метровъ пониженія или повышенія.

[3]) C. R. Revue. Scientifique. Bull. Soc. Geol. за 1886 г.

днѣ Океановъ состоитъ изъ тѣхъ-же самыхъ твердыхъ веществъ, что почва материковъ. Почва въ поверхности материковъ пропитана отчасти водою, но кромѣ этого воздухомъ. Почва на днѣ Океановъ пропитана лишь водою. Литровъ-же [1]) доказалъ, что, чѣмъ меньше воздуха въ данной почвѣ, а больше воды, тѣмъ лучше она проводитъ теплоту. Фэй полагаетъ, что вслѣдствіе большого охлажденія плотность веществъ подъ Океанами больше такъ, что массы веществъ въ двухъ конусахъ, имѣющихъ вершины въ центрѣ, одинъ и тотъ же уголъ отверстія у вершины и основанія: одинъ на поверхности материка, другой на поверхности моря равны.

По нашему выходитъ, что это во всякомъ случаѣ не можетъ быть отнесено на счетъ климатическихъ факторовъ, такъ какъ ихъ воздѣйствіе слишкомъ слабо. Наши разсужденія и вычисленія вмѣстѣ съ тѣмъ показываютъ, что климатическіе факторы играютъ малую роль въ образованіи неровностей рельефа, хотя несомнѣнно до нѣкоторой степени способствуютъ постоянству Океаническихъ бассейновъ. Охлажденіе все таки интензивнѣе подъ Океанами, ибо дно ихъ покрыто холодной водою, вслѣдствіе чего они углубляются противъ средней поверхности земли.

Говоря въ главѣ I о гипотезѣ Дэны мы отложили ея обсужденіе до того времени, когда займемся вопросомъ вліянія климатическихъ факторовъ на образованіе материковъ. Очевидно теперь въ нашихъ глазахъ гипотеза Дэны оказывается мало вѣроятной.

Если вышеизложенная гипотеза отдѣленія луны справедлива, то благодаря катастрофѣ, распредѣленіе температуры внутри земли сдѣлалось несимметричнымъ. Дѣйствительно, до катастрофы мѣсто, гдѣ температура доходила до *максимума* вѣроятно совпадало съ центромъ фигуры, а изотермическія по-

---

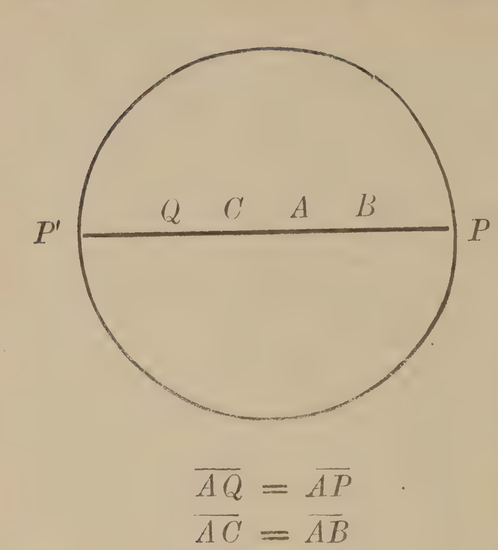
[1]) Littrow. Ueber relative Wärmeleitungsfähigkeit Sitzb. Acad. Wiss. Wien LXXXI. II Abt. стр. 110.

верхности были поверхности того-же вида, что и фигура земли. Такъ н. п. въ эллипсоидѣ онѣ были концентрическіе эллипсоиды. Послѣ катастрофы центръ фигуры измѣнилъ свое положеніе относительно мѣста, гдѣ температура доходила до *максимума*. Вслѣдствіе этого охлажденіе сдѣлалось неодинаково въ направленіи разныхъ радіусовъ. Оно сдѣлалось болѣе интензивнымъ съ той стороны тѣла, гдѣ внѣшняя поверхность находилась ближе отъ наиболѣе нагрѣтой области.

Объемъ луны въ 50 разъ меньше объема земли. Если до и послѣ катастрофы фигура земли была приблизительно шаровая и все вещество для образованія луны было отнято у одной стороны земли, то не трудно вычислить, что разстояніе между центромъ фигуры и наиболѣе нагрѣтой точкой послѣ катострофы должно составлять всего около 42 километровъ,—но при другой фигурѣ это разстояніе можетъ бытъ больше.

Вліяніе эксцентрическаго распредѣленія температуры можетъ быть прослѣжено на примѣрѣ шара. Съ этой цѣлью можно воспользоваться извѣстными аналитическими задачами, въ которыхъ рѣшается вопросъ перемѣннаго состоянія при какомъ угодно первоначальномъ распредѣленіи температуры. Но путь этотъ неудобенъ, ибо нужно непремѣнно опредѣлить форму функціи, выражающей первоначальную температуру. Между тѣмъ у насъ нѣтъ никакого критеріума для опредѣленія этой функціи такъ, что выборъ ея остается въ широкихъ предѣлахъ произвольнымъ. Притомъ функція, выражающая температуру имѣетъ видъ рядовъ, неудобныхъ для разсмотрѣнія.

Поэтому мы избираемъ слѣдующій обходной путь. Положимъ, что у насъ есть шаръ. Въ извѣстный моментъ температура въ этомъ шарѣ есть функція отъ разстоянія отъ нѣкоторой точки: A, находящейся на разстояніи a отъ центра C. Самая высокая температура въ точкѣ: A. Очевидно самое большое сокращеніе будетъ въ области точки P, самое малое въ области точки P'.



$$\overline{AQ} = \overline{AP}$$
$$\overline{AC} = \overline{AB}$$

Вычислимъ окончательное сокращеніе радіуса CP и радіуса CP'.

Въ моментъ $t=o$ температура въ извѣстной точкѣ внутри шара была: V_o. Послѣ безконечнаго времени, температура шара всюду дѣлается равна температурѣ среды; V_m. Поэтому элементъ радіуса: dr послѣ безконечнаго времени сокращается на:

$$\varepsilon . (V_o - V_m)\, dr$$

гдѣ ε обозначаетъ коэффиціентъ линейнаго разширенія. Поэтому послѣ совершеннаго охлажденія, разность между длиной радіуса CP и CP' будетъ:

$$\varepsilon \int_o^{\overline{CP}} (V_o - V_m)\, dr - \varepsilon \int_o^{\overline{CP'}} (V_o - V_m)\, dr$$

Эту разность можно написать такъ:

$$\varepsilon \Big[\int_o^{\overline{CA}} (V_o - V_m) dr + \int_{\overline{CA}}^{\overline{CB}} (V_o - V_m)\, dr +$$
$$+ \int_{\overline{CB}}^{\overline{CP}} (V_o - V_m)\, dr - \int_o^{\overline{CQ}} (V_o - V_m)\, dr - \int_{\overline{CQ}}^{\overline{CP'}} (V_o - V_m)\, dr \Big]$$

Но V_m всюду имѣетъ одно и тоже значеніе, V_o симметрично относительно точки: A, поэтому первый и второй интегралъ равны, третій и четвертый интегралъ тоже равны.—Вслѣдствіе этого можно написать нашу разность подъ видомъ:

$$\varepsilon\left[2\int_{o}^{\overline{CA}}(V_o-V_m)\,dr-\int_{\overline{CQ}}^{CP'}(V_o-V_m)\,dr\right]$$

Замѣтимъ сначала, что такъ какъ:

$$\overline{QP'}=2.\overline{CA}$$

то, коль скоро V_o постоянно во всемъ шарѣ, эта разность обращается въ нуль, какъ и слѣдовало ожидать.

Разсматривая это выраженіе замѣчаемъ, что разность между длиною радіусовъ CP и CP' тѣмъ больше, чѣмъ больше: 1) коэффиціентъ расширенія, 2) разстояніе $\overline{CA}$ между центромъ шара и точкой, гдѣ температура доходитъ до максимума, 3) Когда: $V_o - V_m$ въ промежуткѣ $\overline{CA}$ значительно больше, чѣмъ въ промежуткѣ QP'. Этому послѣднему условію удовлетворяетъ такое распредѣленіе температуры до катастрофы, при которомъ *температура центральной части тѣла была высокая, сравнительно съ температурой внѣшнихъ слоевъ.* Чтобы составить себѣ понятіе о величинѣ деформаціи, возьмемъ слѣдующій примѣръ. Пусть $CA=42$ килом. пусть $\varepsilon=0{,}0000126$ [1]) на 1°C. Пусть въ промежуткѣ CA $V_o - V_m = 10000$°C. въ среднемъ: [это самая нагрѣтая область!] а въ промежуткѣ QP' $V_o - V_m = 500$°C. [это внѣшніе пласты до глубины 80 километровъ]. Тогда разность:

$$CP' - CP = 10 \text{ километрамъ съ небольшимъ.}$$

Разстояніе между центромъ прежней и новой фигуры, принятое нами въ этомъ примѣрѣ, скорѣе минимальное, чѣмъ преувеличенное. Разность между температурой центральной области и внѣшнихъ слоевъ въ какіе нибудь 9500°C. тоже принадлежитъ къ разряду вѣроятныхъ разностей. Между тѣмъ предѣльный эффектъ деформаціи оказался значительно больше,

---

[1]) Это коэффиціентъ Фишера.

чѣмъ въ случаѣ климатическихъ факторовъ, да притомъ абсолютная величина этой деформаціи есть величина совершенно того-же самаго разряда, что разстоянія между уровнемъ дна въ весьма глубокихъ частяхъ Океановъ и уровнемъ поверхности самыхъ высокихъ плоскогорій.

Обсуждая климатическіе факторы и вліяніе эксцентрическаго первоначальнаго распредѣленія температуры, мы говорили единственно о предѣльной деформаціи т. е. о деформаціи, которая завершается только послѣ безконечнаго промежутка времени. Поэтому здѣсь умѣстно сдѣлать слѣдующія замѣчанія: 1) Охлажденіе и всѣ соединенныя съ нимъ явленія идутъ сначала въ болѣе быстромъ тэмпо, которое потомъ все больше и больше замедляется. 2) Климатическія неравенства тѣмъ скорѣе доходятъ до предѣльнаго вліянія, чѣмъ порядокъ ихъ выше [1]). Для поясненія этого положенія приведемъ слѣдующій примѣръ. Пусть у охлаждающагося шара будетъ неравенство климатическихъ условій между однимъ и другимъ полушаріемъ и кромѣ того неравенство климатическихъ условій между полярными и экваторіальной областью. Въ выраженіе температуры войдутъ сферическія функціи нулевого, перваго и второго порядка. Функція нулевого порядка отвѣчаетъ общему охлажденію, перваго — неравенству климатическихъ условій между обѣими полушаріями, второго, неравенству условій между полярными и экваторіальной областью. Прежде всего до предѣла доходитъ вліяніе неравенства второго порядка т. е. измѣненіе сжатія, потомъ несимметричная деформація обоихъ полушарій. Наконецъ только общее охлажденіе.

Можно подобнымъ образомъ опредѣлить ходъ деформаціи, зависящей отъ первоначальнаго эксцентрическаго распредѣленія температуры; если извѣстна форма функціи, выражающей эту температуру.

---

[1]) Ср. Къ теоріи вѣковаго охлажденія. I часть. Стр. 33.

Ходъ охлажденія и рядомъ съ этимъ сокращеніе особенно на первыхъ порахъ зависитъ отъ предположеннаго первоначальнаго распредѣленія температуры. Такъ н. п. у однороднаго шара въ сравнительно простомъ случаѣ, когда температура всегда была и есть функція отъ радіуса въ общемъ случаѣ температура выражается безконечнымъ рядомъ вида:

$$\sum A e^{-a^2p^2t} \cdot \frac{\sin pr}{r}$$

Если нашъ шаръ имѣетъ размѣры земли [1]) то численное значеніе коеффиціентовъ при t будетъ поочереди

$$\frac{\pi^2}{10^{12}},\ \frac{4\pi^2}{10^{12}},\ \frac{9\pi^2}{10^{12}},\ \frac{25\pi^2}{10^{12}},\ \ldots$$

Первый членъ ряда уменьшается до значенія въ половину меньше первоначальнаго только черезъ 70,000 милліоновъ лѣтъ слишкомъ, второй послѣ времени въ четыре раза менѣе продолжительнаго, третій черезъ время въ девять разъ менѣе продолжительное и т. д.

Очевидно, коль скоро въ данномъ выраженіи температуры первый, второй и т. д. члены появляются съ большими коэффиціентами, а члены болѣе высокаго порядка съ очень малымы, то характеръ всего процесса зависитъ отъ этихъ первыхъ членовъ и охлажденіе идетъ весьма медленно. Въ противномъ случаѣ наоборотъ. Но абсолютная величина коэффиціентовъ A находится въ самой тѣсной связи со свойствами функціи, выражающей первоначальную температуру [2]).

---

[1]) Здѣсь принимаемъ, что a^2 т. е. отношеніе коэффиціента теплопроводности къ коэффиціенту теплоемкости при единицахъ: времени—годъ, длины англ. футъ имѣетъ численное значеніе: 400 [коэфф. Томсона] Радіусъ земли въ футахъ: 20,000,000. Ср. Къ теоріи охлажденія земли. I часть 42 стр.

[2]) Подъ первоначальной температурой понимаемъ температуру въ какой нибудь опредѣленный моментъ времени н. п. въ моментъ катастрофы, благодаря которой луна отдѣлилась отъ земли. *Прим. авт.*

Изъ этого слѣдуетъ, что въ концѣ концовъ нельзя сказать ничего положительнаго о томъ, въ какой степени въ современномъ рельефѣ земли выражается вліяніе распредѣленія температуры внутри земли въ моментъ катастрофы. При извѣстныхъ условіяхъ быть можетъ, что въ настоящее время уже цѣлые материки слѣдуетъ разсматривать какъ результатъ деформаціи, обусловленной несимметричностью распредѣленія температуры. Но при другихъ условіяхъ деформація пожалуй состоитъ въ незначительныхъ поднятіяхъ и опусканіяхъ.

Теперь мы должны перейти къ вліянію несиметричнаго распредѣленія веществъ внутри земли. При другихъ теоріяхъ происхожденія материковъ и горъ предполагается, что земля имѣетъ концентрически слоистое строеніе кромѣ тонкой внѣшней коры, въ которой, благодаря геологическимъ процессамъ, господствуетъ большое разнообразіе. Но это разнообразіе имѣетъ до нѣкоторой степени мѣстный характеръ. Слои смѣняютъ другъ друга, но рѣдко встрѣчается слой, занимающій настолько обширное пространство, чтобы его термическія свойства могли отразиться въ ходѣ охлажденія земли. Притомъ, слои внѣшней коры не прочны. Они подвержены разрушенію отъ дѣятельности воды. Періодъ ихъ существованія въ сравненіи съ продолжительностью существованія земли не великъ. Между тѣмъ, какъ выше было указано, нужны неслыханно долгіе промежутки времени для того, чтобы произвести замѣтный эффектъ въ ходѣ охлажденія земли. Совсѣмъ не то, если положимъ, что въ болѣе глубокихъ, не затронутыхъ денудаціей слояхъ земли распредѣленіе веществъ не вполнѣ концентрически слоисто. Можно напримѣръ полагать, что катастрофа съ одной стороны земли устранила цѣлый слой, который съ другой стороны сохранился. Яма могла быть отчасти занесена различными другими веществами.

Если притомъ сказанный слой довольно значительно различается по своимъ термическимъ свойствамъ отъ сосѣднихъ

слоевъ, то въ ходѣ охлажденія одной и другой стороны земного тѣла должны существовать довольно крупныя различія.

Отъ прямого аналитическаго изслѣдованія вопроса мы должны отказаться, вопервыхъ потому, что задачи объ охлажденіи неоднородныхъ тѣлъ принадлежатъ къ разряду нерѣшенныхъ, за исключеніемъ [1]) нѣкоторыхъ болѣе простыхъ случаевъ, во вторыхъ потому, что рѣшенія получаются водъ видомъ безконечныхъ рядовъ крайне неудобныхъ для изслѣдованія. Притомъ коэффиціенты рядовъ зависятъ отъ неизвѣстнаго намъ распредѣленія температуры въ моментъ катастрофы. Даже въ задачахъ, относящихся къ однороднымъ тѣламъ, относительно которыхъ существуютъ полныя аналитическія рѣшенія, коль скоро первоначальная температура неизвѣста, ряды даютъ крайне немногое. Въ виду этого и здѣсь постараемся получить нѣкоторые результаты другимъ путемъ. Притомъ будемъ разсматривать шаровидное тѣло.

Прежде всего слѣдуетъ замѣтить, что въ неоднородномъ тѣлѣ деформація зависитъ нетолько отъ различій въ ходѣ охлажденія, но тоже отъ различій въ ходѣ сокращенія различныхъ веществъ. Такъ н. п. охлажденіе можетъ идти въ двухъ мѣстахъ «pari passu», а сокращеніе благодаря различнымъ коэффиціентамъ расширенія можетъ быть совершенно различное. Возьмемъ слѣдующій примѣръ. Въ задачѣ Томсона [2]) предполагается, что первоначальная температура постоянна внутри всего тѣла. Для цѣлаго милліарда лѣтъ можно пренебречь вліяніемъ кривизны. Поэтому Томсонъ разсматриваетъ безконечное

---

[1]) Такъ н. п. Пуасонъ рѣшилъ задачу объ однородномъ шарѣ съ концентрической оболочкой. Эта задача находится въ его «Théorie mathématique de la chaleur». Таже задача и задача объ охлажденіи двойной пластинки, состоящей изъ двухъ веществъ рѣшена авторомъ настоящей работы. См. М. П. Рудскій. Двѣ задачи изъ теоріи теплоты XI томъ Зап. Матем. Отд. Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

[2]) Cooling. of the Earth. loc. cit.

тѣло, ограниченное съ одной стороны плоскостью. Онъ находитъ, что послѣ ста милліоновъ лѣтъ на глубинѣ 500—600 [1]) англ. миль измѣненіе температуры совсѣмъ незначительно. Поэтому, если предположимъ, что различія въ способности сокращаться ограничиваются слоемъ тоже въ 500—600 англ. миль толщины, а различій въ теплопроводности и теплоемкости нѣтъ, то можемъ воспользоваться задачей Томсона. Фишеръ [2]) на основаніи данныхъ Томсона вычисляетъ, что за эти сто милліоновъ лѣтъ радіусъ земли сократился на 6 англ. миль. Если положимъ, что въ нѣкоторой обширной области [3]) коэффиціентъ расширенія въ n разъ больше коеффиціента Фишера [0,0000126 на 1°C.), то найдемъ сокращеніе радіуса въ $6n$ англ. миль.

Поэтому разность уровней будетъ: $(n-1)\,6$ англ. миль. Уже этотъ примѣръ показываетъ, что благодаря неравномѣрному сокращенію могутъ образоваться довольно крупныя неровности рельефа, если:

1. Слои сильно различаются другъ отъ друга въ способности расширяться подъ вліяніемъ измѣненій температуры.

2. Если слой, различающійся отъ другихъ слоевъ по своимъ свойствамъ отличается большой мощностью и занимаетъ большое пространство (н. п. хоть цѣлое полушаріе):

3) Если время, истекшее съ момента катастрофы [4]), достаточно продолжительно.

Здѣсь мы должны напомнить, что даже въ слоѣ, состоящемъ изъ одного и того-же самаго вещества, сокращеніе мо-

---

[1]) Англ. миля=1619 метрамъ.

[2]) On the mean height of elevation...... Phil. Magaz. 25 т. 5 серіи.

[3]) Слѣдуетъ помнить, что постоянно идетъ рѣчь о различіяхъ не въ вертикальномъ, а въ горизонтальномъ направленіи. *Прим. авт.*

[4]) Нарочно употребляемъ менѣе опредѣленное слово: катастрофа, чтобы дать понять, что не только отдѣленіе луны, но и другая катастрофа могла дать поводъ къ измѣненію строенія земли изъ концентрически слоистаго на менѣе или болѣе неправильное. *Прим. авт.*

жетъ быть неодинаковое, если благодаря какимъ-либо причинамъ н. п. эксцентрическому распредѣленію температуры онъ въ одной области находится въ твердомъ, а въ другой еще въ жидкомъ или полужидкомъ состояніи.

Перейдемъ теперь къ термическимъ свойствамъ породъ. Можно бы подумать, что способность лучеиспусканія у породъ, залегающихъ на поверхности имѣетъ большое вліяніе на ходъ охлажденія внутри земли. Однако это не такъ. Еще Риманъ а раньше его Пуассонъ сдѣлали замѣчаніе, что коэффиціентъ лучеиспусканія у *очень большихъ тѣлъ* какъ н. п. земля оказываетъ сравнительно малое вліяніе на ходъ охлажденія. Исключеніе составляетъ только тотъ неимѣющій практическаго значенія случай, когда коэффиціентъ лучеиспусканія есть безконечно малый. Н. п. для шара той величины, что земля, получается почти такая-же самая температура для извѣстнаго момента времени, когда положимъ, что коэффиціентъ лучеиспусканія имѣетъ конечное или безконечное значеніе.

Дѣло въ томъ, что функція, выражающая температуру шара заключаетъ нѣкоторые постоянные коэффиціенты, зависящіе отъ условій передачи теплоты въ самой поверхности. Они опредѣляются изъ нѣкотораго трансцендентнаго уравненія, въ которое входитъ и коэффиціентъ лучеиспусканія, но раздѣленный на коэффиціентъ теплопроводности и умноженный на радіусъ. Если радіусъ очень большой, то многіе первые корни этого уравненія выходятъ всегда очень близкіе къ кратнымъ числа: $\underline{\pi}$, между тѣмъ когда коэфф. лучеиспусканія безконечно большой, (или радіусъ безконечно большой) то корни равны съ точностью кратнымъ: $\underline{\pi}$. Дальніе корни уже болѣе различны другъ отъ друга, но во всѣхъ, имѣющихъ практическое значеніе задачахъ, именно первые члены рядовъ, въ которыхъ появляются эти корни, играютъ преобладающую роль.

Точно также, рѣшая задачу объ охлажденіи шара съ концентрической оболочкой, можно убѣдиться, что тонкій слой

плохо проводящаго теплоту вещества имѣетъ малое вліяніе на ходъ охлажденія, разумѣется за исключеніемъ того случая, когда онъ или вовсе не проводитъ или почти не проводитъ теплоты, но такіе случаи тоже неимѣютъ практическаго значенія:

Приведемъ вкратцѣ доказательство этихъ словъ. Для однороднаго сплошного шара имѣемъ уравненіе [1]), опредѣляющее коэффиціенты погасанія:

$$\frac{\alpha}{tang\alpha} = 1 - \frac{h}{k} R \qquad \text{I}$$

гдѣ R есть радіусъ шара

h — коэффиціентъ лучеиспусканія.

k — коэффиціентъ теплопроводности.

Если же имѣемъ дѣло съ шаромъ, окруженнымъ концентрической оболочкой, то уравненіе [2]), опредѣляющее коэффиціенты погасанія будетъ:

$$Q\left[cotg\,\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{k_1}{k}\right)\right] = \frac{\alpha \sin\frac{\alpha}{n} - P\cos\frac{\alpha}{n}}{\alpha\cos\frac{\alpha}{n} + P.\sin\frac{\alpha}{n}}$$

Величина n зависитъ отъ отношенія толщины оболочки къ радіусу ядра. Когда толщина оболочки безконечно малая, то n есть безконечно большая величина. Поэтому при очень тонкой

---

[1]) Ср. н. п. Fourrier. Analytische Theorie der Wärme переводъ Weinsteina. Berlin 1884 г. Гл. V стр. 280. Это тоже самое уравненіе о которомъ выше шла рѣчь. *Прим. авт.*

[2]) М. П. Рудскій. Двѣ задачи изъ теоріи теплоты XI томъ Зап. Нов. Общ. Естеств. стр. 141. Я называю коэффиціенты, опредѣляющіеся изъ корней уравненія коэффиціентами погасанія, ибо отъ нихъ зависитъ скорость погасанія функціи, выражающей температуру. т. е., другими словами, отъ нихъ зависитъ скорость охлажденія.

оболочкѣ пока α есть небольшая величина (т. е. въ области первыхъ малыхъ корней уравненія) можно положить:

$$\sin\frac{\alpha}{n} = 0$$

$$\cos\frac{\alpha}{n} = 1$$

тогда уравненіе приводится къ виду:

$$Q\left[\cot g\,\alpha - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{k_1}{k}\right)\right] = -\frac{P}{\alpha} \qquad \text{II}$$

но

$$\frac{Q}{P} = \frac{k}{\left(h_1 - \frac{k_1}{R}\right)\rho}$$

здѣсь h_1 есть коэффиціентъ лучеиспусканія для внѣшней оболочки
— k_1 — — теплопроводности...............
— R — радіусъ всего шара.
— ρ — — ядра.

Такъ какъ ρ почти равно R, то можно написать:

$$\frac{Q}{P} = \frac{k}{h_1 R - k_1}$$

Подставляя это значеніе въ уравненіе: II найдемъ

$$\cot g\,\alpha \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{h_1}{k} R\right)$$

ими

$$\frac{\alpha}{\tan g\alpha} = \left(1 - \frac{h_1}{k} R\right)$$

т. е. для первыхъ малыхъ корней [1]) можно пользоваться тѣмъже самымъ уравненіемъ: I, относящимся къ однородному шару съ той разницею, что вмѣсто коэффиціента лучеиспусканія для ядра нужно подставить коэфф. лучеиспусканія для вещества оболочки, что впрочемъ само по себѣ очевидно. И такъ для того, чтобы въ охлажденіи отразились свойства даннаго слоя, нужно чтобы онъ имѣлъ значительную толщину. Разумѣется нужно тоже продолжительное время для того, чтобы онъ оказалъ свое вліяніе. Ходъ охлажденія такой, что одна сторона шара скорѣе охлаждается и сокращается, чѣмъ другая.

Но для того, чтобы несимметричность внутренняго строенія сильно отразилась въ ходѣ деформаціи нужно еще, чтобы первональныя температуры въ цѣломъ тѣлѣ, или покрайней мѣрѣ въ большей его части были высокія. Дѣйствительно. Когда деформація достигаетъ большихъ размѣровъ? Очевидно тогда, когда внутри шара на одной и той же сферической поверхности [имѣющей центръ въ центрѣ шара] температура измѣняется въ широкихъ предѣлахъ. Но для того, чтобы въ одной и тойже поверхности въ одномъ мѣстѣ была температура A а въ другомъ B, причемъ B больше A, непремѣнно нужно, чтобы первоначально въ цѣломъ слоѣ была температура значительно больше, чѣмъ наибольшее изъ B. Очевидно, чѣмъ больше первоначальная температура, тѣмъ больше шансовъ, чтобы въ послѣдствіи, благодаря различіямъ въ условіяхъ охлажденія, образовались крупныя разности температуры. Сопоставляя прежде сказанное видимъ, что крупныя деформаціи требуютъ вообще высокой первоначальной температуры, причемъ, если всегда существовала крупная разность между температурой центра и внѣшнихъ слоевъ, то эксцентрическое первоначальное распредѣленіе температуры можетъ произвести довольно значительную деформацію.

[1]) Припомнимъ, что во всѣхъ случаяхъ, имѣющихъ практическое значеніе, въ выраженіи температуры самую крупную роль играютъ члены, содержащіе малые коэффиціенты погасанія. *Прим. авт.*

Чтобы судить о ея величинѣ нужно избрать какое нибудь произвольное, но возможное распредѣленіе температуры. Н. п. можно сдѣлать предположеніе, что въ данный моментъ времени температура выражается функціей:

$$A + B\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

гдѣ n есть функція отъ долготы и широты. Эта функція имѣетъ то преимущество, что въ поверхности всюду даетъ одну и ту же температуру A, притомъ всюду постепенно падаетъ отъ центра къ поверхности и, если только n положительно, всегда даетъ конечную температуру для центра. Притомъ центръ имѣетъ наибольшую температуру, что конечно не составляетъ уже преимущества, ибо при неравномѣрномъ охлажденіи точка, гдѣ температура доходитъ до *максимума* съ теченіемъ времени измѣняетъ свое положеніе, впрочемъ въ большинствѣ случаевъ не настолько, чтобы это мѣшало употребленію сказанной функціи. Притомъ слѣдуетъ ввести условіе, чтобы градіентъ въ поверхностныхъ слояхъ былъ заключенъ въ извѣстныхъ предѣлахъ. Положимъ н. п. что наибольшій градіентъ доходитъ до $35^1/_3$ метровъ, наименьшій не превышаетъ 25 метровъ. Эти предѣлы достаточно широки, ибо, хотя на дѣлѣ градіентъ измѣняется въ болѣе широкихъ предѣлахъ, все таки слѣдуетъ помнить о томъ, что величина градіента зависитъ тоже отъ чисто мѣстныхъ условій.

Если рядомъ съ этимъ предположимъ, что температура центра равна 4000°С., то разность [1]) между наибольшимъ и наименьшимъ разстояніемъ внѣшней поверхности отъ центра окажется въ 1,5 километра; если-же температура центра равна 10,000°С., то тоже самая разность окажется почти въ 10 километровъ. Притомъ въ первомъ случаѣ разности между темпе-

[1]) Предполагается, что коэфф. линейнаго расширенія ε.=0,0000126 на 1°С. какъ у Фишера.

пературами въ одной и той-же концентрической сферической поверхности доходятъ до 216°С. на глубинѣ около 150 килом. во второмъ же случаѣ эти разности доходятъ до 800° слишкомъ градусовъ С. на глубинѣ около 250 килом.

Принимая меньшіе предѣлы для градіента, но желая получить тѣ-же самыя числа, нужно взять большую температуру для центра.

Нельзя придавать этимъ числамъ особеннаго значенія. Они только показываютъ, что высокія начальныя температуры и высокія температуры центральной области способствуютъ деформаціямъ, во вторыхъ, что для образованія материковъ нужно, чтобы внутри шара разности между температурами въ одной и той-же шаровой концентрической поверхности доходили до нѣсколькихъ сотъ градусовъ.

До сихъ поръ мы разбирали условія, способствующія деформаціи, теперь, насколько возможно, постараемся обсудить въ какой степени онѣ исполняются.

На счетъ продолжительности времени ничего не знаемъ, есть только догадки. Томсонъ думаетъ, что съ момента отвердѣнія [если вещества внутри земли отвердѣли] истекло не менѣе 20, не болѣе 400 милліоновъ лѣтъ. Дэна съ начала Палеозойской эпохи до нашего времени считаетъ сто милліоновъ лѣтъ, но до нея имѣемъ очень длинную архэйскую эпоху. Г. Г. Дарвинъ вычисляетъ, что съ момента отдѣленія луны отъ земли истекло никакъ не менѣе 57 милліоновъ лѣтъ, но этотъ промежутокъ времени можетъ быть въ десять и сто разъ больше. За то можно составить себѣ понятіе о годичномъ сокращеніи радіуса земли. Для этого мы должны допустить, что земля есть однородное тѣло. Такимъ образомъ результатъ не можетъ претендовать на большую точность, но даетъ вполнѣ понятіе о настоящемъ значеніи сокращенія.

Въ продолженіе времени: dt элементъ объема $dxdydz$ сокращается на:

$$\mu \frac{\partial V}{\partial t} . dx\, dy\, dz\, dt$$

гдѣ μ обозначаетъ коэффиціентъ кубическаго расширенія
— V — температуру
по внутри [1]) тѣла:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 . \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}$$

гдѣ a^2 есть термометрическій коэффиціентъ теплопроводности: $\left(\frac{k}{c}\right)$. Слѣдовательно въ теченіе времени dt элементъ объема сокращается на:

$$\mu . a^2 \left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\} dx\, dy\, dz\, dt$$

а объемъ цѣлаго тѣла на:

$$\mu\, a^2 \iiint \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] dx\, dy\, dz\, .\, dt$$

гдѣ интеграція простирается на весь объемъ тѣла.

Извѣстно, что этотъ интегралъ по всему объему [2]) сводится на интегралъ по всей поверхности:

$$\mu\, a^2 \iint \frac{\partial V}{\partial n} df . dt$$

гдѣ n обозначаетъ внѣшнюю нормаль къ поверхности тѣла.
— df — элементъ поверхности.

---

[1]) Это есть фундаментальное уравненіе теоріи теплопроводности.

[2]) См. любой учебникъ теоретической физики, главу о потенціалѣ н. п. Kirchhoff Vorlesungen Ueber Mathematische Physik. Leipzig. 1883. гл. XVI

Въ случаѣ шара:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{g}$$

гдѣ g обовначаетъ градіентъ въ поверхностномъ слоѣ. Разумѣется принимаемъ во вниманіе средній градіентъ. Тогда можно вывести g за знакъ интеграцій и расширеніе шара опредѣлится величипой

$$-\frac{\mu a^2}{g} . 4\pi R^2 . dt$$

гдѣ R есть радіусъ шара. Но, если шаръ расширяется, то его радіусъ увеличивается, Пустъ увеличенія радіуса будетъ:

$$dR$$

Тогда объемъ шара:

$$\frac{4\pi}{3} R^3$$

сдѣлается больше, именно онъ будетъ теперь:

$$\frac{4\pi}{3}(R + dR)^3 = \frac{4\pi R^3}{3} + 4\pi R^2 . dR$$ [приблизительно, такъ какъ dR въ сравненіи съ R есть очень малая величина].

И такъ мы пашли разъ, что увеличеніе объема равно:

$$-\frac{\mu a^2}{g} 4\pi R^2$$

а другой разъ, что оно равно:

$$4\pi R^2 . dR$$

слѣдовательно:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\mu a^2}{g}$$

Въ настоящее время градіентъ въ англійскихъ [1]) единицахъ т. е. футахъ и градусахъ Фаренгейта имѣетъ численную величину: 51, $a^2 = 400$ въ тѣхъ-же единицахъ и при единицѣ времени: годъ, наконецъ:

$$\mu = 3\varepsilon$$

гдѣ ε есть коэффиціентъ линейнаго разширенія.

$$\varepsilon = 0{,}000007 \text{ по Фишеру}$$

слѣдовательно

$$\mu = 0{,}000021$$

а потому сокращеніе [2]) радіуса въ теченіе года при настоящей средней величинѣ градіента составляетъ

$$0{,}000164 \text{ анг. фута}$$

Соотвѣтствующее годичное сокращеніе поверхности составляетъ:

$$82420 \text{ кв. анг.}^{3)} \text{ фут. т. е. около } \frac{1}{148} \text{ квадратной версты.}$$

Еслибы градіентъ въ поверхности былъ извѣстенъ въ функціи отъ времени, то можнобы вычислить среднее сокращеніе радіуса въ продолженіе какого угодно промежутка времени. Однако вообще для того, чтобы знать измѣненіе градіента въ поверхности, нужно знать распредѣленіе температуры внутри шара въ извѣстный моментъ. Тогда можно тоже вычислить время, истекшее со сказаннаго момента до настоящаго времени. Конечно, въ виду неоднородности земного шара это

---

[1]) Мы пользуемся англ. единицами, такъ какъ всѣ величины заимствованы изъ англійскихъ источниковъ, чтобы избѣжать перечисленія. *Прим. авт.*

[2]) Говоримъ сокращеніе, ибо приращеніе отрицательное. *Прим. авт.*

[3]) Англ. футъ равенъ русскому. *Прим. авт.*

вычисленіе все таки было бы неточное, но моглобы дать весьма важныя указанія [1]).

Во всякомъ случаѣ изъ нашего вычисленія видно, что за многіе годы до и послѣ современной эпохи сокращеніе радіуса земли идетъ весьма и весьма медленно, но при маломъ градіентѣ ежегодное сокращеніе было значительно больше. Поэтому, если предположимъ, что въ исторія земли было такое время, когда температура внѣшнихъ слоевъ была высокая, то придемъ къ заключенію, что въ тоже самое время всѣ процессы, зависящіе отъ сокращенія земли были значительно интензивнѣе чѣмъ въ настоящее время, ибо при высокой температурѣ внѣшнихъ слоевъ сначала градіентъ былъ малый.

Возвратимся опять къ гипотезѣ отдѣленія луны.

Объемъ луны въ 50 разъ меньше объема земли. Еслибы все вещество луны распредѣлить въ видѣ слоя постоянной толщины на одномъ полушаріи, то полученный такимъ образомъ слой имѣлъ бы толщину приблизительно въ 80 километровъ. Значитъ, предѣльная средняя толщина слоя, оставшагося съ одной стороны земли и устраненнаго съ другой не можетъ быть больше.

Нѣсколько выше, вычисляя различія въ сокращеніи внѣшнихъ слоевъ [тамъ, гдѣ мы пользовались задачей Томсона] мы предполагали толщину слоя почти въ двѣнадцать разъ большую. Очевидно возможная деформація будетъ меньше той, о которой говорилось выше. Однако такъ какъ охлажденіе и сокращеніе наиболѣе интензивны во внѣшнихъ слояхъ, а веще-

---

[1]) Одно уже значеніе средняго градіента въ предыдущія геологическія эпохи можетъ дать весьма важныя указанія. Но надежное опредѣленіе градіента въ какой нибудь отдаленный отъ насъ моментъ возможно только по косвеннымъ признакамъ н. п. по глубинѣ очаговъ вулканической дѣятельности и результаты его весьма сомнительны. Скорѣе всего добьемся нѣкоторыхъ указаній въ далекомъ будущемъ, когда послѣ продолжительныхъ наблюденій удастся опредѣлить измѣненіе средняго градіента съ теченіемъ времени. *Прим. авт.*

ство луны взято не изъ глубокихъ сферъ ядра, а преимущественно изъ внѣшнихъ пластовъ, то деформацiя не будетъ въ 12 разъ меньше. Напротивъ того, изъ дiаграммы Томсона [1]) графическимъ методомъ нахожу, что деформацiя будетъ всетаки составлять болѣе $^2/_3$ прежде вычисленной деформацiи. Значитъ, если коэффицiентъ расширенiя во внѣшнихъ слояхъ подъ разными широтами и долготами измѣняется въ предѣлахъ н. п. $^1/_5$ своей средней величины [средней величиной считаемъ коэфф. Фишера] то разницы въ сокращенiи радiуса могутъ доходить почти до одной анг. мили (около $1^1/_2$ версты). Разумѣется эти числа не имѣютъ никакого особеннаго значенiя тѣмъ болѣе, что, взявъ въ основанiе другiя условiя, получимъ другiе результаты.

Если снять съ одного полушарiя пластъ, толщиною въ 80 кил., то можетъ оказаться, что при новомъ состоянiи земли теплопроводность внѣшнихъ пластовъ одного полушарiя значительно различается отъ теплопроводности внѣшнихъ пластовъ другого полушарiя. Слѣдуетъ разобрать вопросъ, какое влiянiе на ходъ охлажденiя имѣетъ пластъ, толщиною въ 80 кил., покрывающiй одно только полушарiе.

Мы выше указали на критерiумъ, позволяющiй составить себѣ понятiе о его влiянiи. Въ уравненiи II для первыхъ корней, находящихся въ области π, 2π. . . . уголъ: $\frac{\alpha}{n}$ будетъ малый, ибо n есть число довольно большое вслѣдствiе того, что радiусъ ядра въ 80 разъ больше толщины слоя. Слѣдовательно первые корни уравненiя: II будутъ близки къ корнямъ уравненiя: I т. е., другими словами, большихъ различiй въ ходѣ охлажденiя одного и другого полушарiя не будетъ, развѣ только другiя условiя будутъ благопрiятствовать различiямъ.

Эти другiя условiя, собственно говоря, сводятся къ высокой температурѣ ядра.

---

[1]) Cooling of the Earth loc. cit. стр. 477.

Но при высокихъ температурахъ вещества ядра даже въ настоящее время могутъ находиться въ жидкомъ, даже, если температура превышаетъ критическую температуру [1]), въ газовомъ состояніи. Притомъ, благодаря огромному давленію, плотность газа можетъ въ тоже самое время быть равна плотности металловъ. Но въ жидкомъ или газовомъ ядрѣ передача теплоты можетъ тоже совершаться путемъ конвективныхъ [2]) токовъ.

Въ жидкомъ ядрѣ областныя значительныя различія въ ходѣ охлажденія не могутъ долго удержаться. Конвективные токи стремятся изгладить эти различія. Если-же причина различій постоянно дѣйствуетъ, то образуется постоянная система токовъ. Разумѣется токи вслѣдствіе большой вязкости вещества обладаютъ весьма малыми скоростями.

Возьмемъ н. п. во вниманіе вліяніе плохо проводящаго слоя въ нѣкоторой области земной коры. Мѣстность подъ этимъ слоемъ будетъ составлять центръ нѣкоторой системы компенсативныхъ токовъ, уносящихъ излишекъ теплоты, поэтому постоянный излишекъ температуры будетъ меньше, чѣмъ при подобныхъ условіяхъ внутри твердаго тѣла. Изъ этого въ свою очередь слѣдуетъ, что деформаціи, обусловленныя различной теплопроводностью веществъ коры будутъ значительно уменьшены. Конвенктивные токи стремятся изгладить вліяніе первоначальнаго эксцентрическаго распредѣленія теплоты.

---

[1]) Гульдбергъ вычисляетъ критическую температуру

ртути	въ	1000°C.
желѣза	—	5200°C.
мѣди	—	3900°C.
платины	—	8000°C.
золота	—	4300°C.

см. Guldberg. Zeitschr. für Phys. Chemie I томъ стр. 231. 1887 г. Слѣдуетъ однако замѣтить, что основанія вычисленія довольно шатки.

[2]) Фишеръ склоняется въ пользу гипотезы о жидкомъ ядрѣ. Онъ подозрѣваетъ нѣкоторую связь между конвективными токами и вѣковыми измѣненіями склоненій, наклоненій и т. д. магнитной стрѣлки. *Прим. авт.*

Отдѣленіе луны навѣрно совершилось еще въ то время, когда земля была почти цѣликомъ въ жидкомъ состояніи. Вслѣдствіе этого кромѣ конвективныхъ токовъ должны были проявиться токи, вызванные стремленіемъ принять фигуры равновѣсія, стремленіемъ, проникающимъ рѣшительно всѣ пласты.

Вся деформація, обусловленная приноровленіемъ къ условіямъ равновѣсія должна была совершиться въ сравнительно короткое время. Разъ земля приблизительно приняла новую форму равновѣсія и новая ось вращенія установилась, деформацію слѣдуетъ считать почти оконченной. Для слѣдующаго затѣмъ времени остаются только деформаціи вслѣдствіе измѣненія сжатія, деформаціи вслѣдствіе неодинаковаго сокращенія тѣхъ частей коры, которыя различаются въ способности измѣнять свой объемъ вслѣдствіе измѣненія температуры, наконецъ весьма незначительныя деформаціи, происходящія отъ различій въ теплопроводности веществъ коры.

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

Итакъ оказалось, что даже послѣ катастрофы обладающая несимметричнымъ строеніемъ земля должна при охлажденіи подвергаться весьма значительнымъ деформаціямъ, если температуры ея ядра были и есть высокія. Но, чѣмъ выше температура, тѣмъ болѣе вѣроятно, что ядро находится въ жидкомъ состояніи, что же касается самаго момента катастрофы, то гипотеза отдѣленія луны требуетъ, чтобы земля кромѣ тонкой коры, да пожалуй небольшого центральнаго твердаго ядра находилась въ полужидкомъ состояніи.

Тогда въ свою очередь вѣроятность крупныхъ несимметричныхъ деформацій, сопровождающихъ охлажденіе значительно уменьшается, ибо въ полужидкой массѣ земли новое приноровленіе къ условіямъ равновѣсія должно было въ высокой степени уменьшить несимметричность внутренняго строенія, созданную катастрофой.

Если новое приноровленіе къ фигурѣ равновѣсія не уничтожило совсѣмъ неровностей рельефа, созданныхъ катастрофой, то лишь благодаря тому, что вязкость веществъ во внѣшнихъ слояхъ была очень большая, что вѣроятно до катастрофы уже существовала твердая кора, которую, правда, катастрофа разбила на куски, но не уничтожила совершенно. Можно сказать, что слѣды катастрофы, какъ бы застыли на поверхности земли.

Во всякомъ случаѣ слѣды значительно уменьшились. Мы вычислили, что, взявъ вещество для составленія луны лишь съ одного полушарія, мы бы получили углубленіе, занимающее поверхность всего полушарія со средней глубиной въ 80 килом., между тѣмъ средняя глубина Океановъ не превышаетъ $3^1/_2$ километровъ.

Итакъ, если температура ядра невысокая, то *eo ipso* несимметричныя деформаціи незначительны, если же температура ядра высокая, то несимметричныя деформаціи опять незначительны, ибо послѣ катастрофы произошло приноровленіе къ условіямъ равновѣсія въ высокой степени уменьшившее несимметричность. По всей вѣроятности несимметричность осталась только во внѣшней корѣ и во внѣшнемъ рельефѣ, гдѣ застыли слѣды катастрофы.

Поэтому материки и Океаническіе бассейны современной эпохи въ общемъ вѣроятно мало различаются отъ материковъ и Океаническихъ бассейновъ того времени, когда завершилась деформація, обусловленная приноровленіемъ къ условіямъ равновѣсія послѣ катастрофы.

Совсѣмъ не то съ равномѣрнымъ радіальнымъ сокращеніемъ радіуса земли вслѣдствіе общаго охлажденія. Если температура ядра есть высокая, если со времени катастрофы прошло не сто милліоновъ лѣтъ а гораздо больше, то сокращеніе радіуса является причиной вполнѣ достаточной для того, чтобы объяснить образованіе всѣхъ горныхъ кряжей теперь существующихъ и исчезнувшихъ съ лика земли.

Оба условія: продолжительность промежутка времени и высокая темп. ядра тѣсно соединены между собою.

Коль скоро положимъ, что темп. ядра высокая и что вмѣстѣ съ тѣмъ и въ моментъ катастрофы она значительно превышала температуру внѣшнихъ слоевъ, то, выражая условіе, что теоретическій градіентъ во внѣшнихъ слояхъ долженъ быть равенъ наблюдаемому, найдемъ всегда для времени, истекшаго

съ момента катастрофы промежутокъ гораздо большій чѣмъ тотъ [1]) который былъ найденъ Томсономъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ слой безъ деформаціи окажется на несравненно большей глубинѣ, чѣмъ полагаютъ Фишеръ и Маллярдъ Ридъ.

Распредѣленіе горныхъ кряжей несимметрично, ибо несмотря на приблизительную симметричность ядра, кора благодаря катастрофѣ обладаетъ неправильнымъ несимметричнымъ строеніемъ. Притомъ въ корѣ есть слабыя мѣста. Это между прочимъ тѣ мѣста, гдѣ вслѣдствіе накопленія прибрежныхъ осадковъ геоизотермы возвышаются и породы размягчаются [2]). Въ такихъ мѣстахъ эффектъ радіальнаго сокращенія какъ-бы сосредоточивается.

Въ своемъ сочиненіи: Antlitz der Erde Зюссъ нѣсколько разъ указываетъ на то, что горные кряжи преимущественно состоятъ изъ мощныхъ прибрежныхъ осадковъ.

Дарвинъ и Фишеръ полагаютъ, что луна образовалась изъ оторвавшейся выпуклости приливной волны въ жидкомъ тѣлѣ земли. Поэтому Фишеръ полагаетъ, что Тихій Океанъ занимаетъ мѣсто ямы, образовавшейся съ той стороны земли, откуда отдѣлилась луна. Съ другой стороны Пуэнкаре показалъ, что при извѣстной скорости вращенія однородная жидкая масса распадается на двѣ части. До распаденія между двумя частями находится соединяющая ихъ шея. Если бы оказалось, что неоднородная масса тоже распадается подобнымъ образомъ, то можно бы положить, что Тихій Океанъ находится на сторонѣ противуположной той, откуда оторвалась луна, а материки полушарія суши суть слѣды разорванной соединяющей шеи.

---

[1]) При иныхъ распредѣленіяхъ температуры этотъ промежутокъ въ 1000 разъ больше. *Прим. авт.*

[2]) Извѣстно что Маллярдъ Ридъ построилъ всю свою теорію образованія горъ на этомъ явленіи. Но пожалуй лучше отнести образованіе горъ на счетъ первичной, чѣмъ вторичной причины, особенно послѣ того, какъ оказалось, что возраженія, основанныя на близости слоя безъ деформаціи отъ поверхности земли оказались ошибочными.

Нѣтъ возможности объяснить образованіе несимметричнаго рельефа земли безъ гипотезы о катастрофѣ. Безъ катастрофы мы бы имѣли только мелкія складки, провалы и трещины, вулканы и т. п. Безъ катастрофы между деформаціями обоихъ полушарій должна существовать полная аналогія. Гипотеза катастрофы вполнѣ объясняетъ образованіе материковъ и Океаническихъ бассейновъ. Интересно то, что крупныя измѣненія рельефа послѣ катастрофы, за исключеніемъ складчатыхъ горныхъ кряжей оказываются мало вѣроятны. Невольно является вопросъ, не претерпѣла ли земля нѣсколькихъ катастрофъ?

Но въ настоящее время только одна катастрофа является вполнѣ вѣроятной. Это Дарвинова гипотеза отдѣленія луны. Она не придумана нарочно, а такъ сказать, сама обнаружилась изъ цѣлаго ряда изслѣдованій Дарвина надъ послѣдствіями того факта, что въ настоящее время луна запаздываетъ въ своемъ движеніи, факта замѣченнаго Адамсомъ еще въ 1853 г. [1]). Наконецъ изслѣдованія Пуэнкаре, Ковалевской и Максвелля по теоріи фигуръ равновѣсія жидкостей въ высокой степени поддерживаютъ эту гипотезу.

Кромѣ этого возможными являются еще катастрофы спеціальнаго рода, обусловленныя неполной симметричностью строенія внѣшнихъ пластовъ земли. Эти внѣшніе пласты, внѣшній рельефъ не вполнѣ удовлетворяютъ условіямъ равновѣсія. Изслѣдованія надъ качаніями маятника и отклоненіемъ отвѣса показали, что возвышенности рельефа компенсируются меньшей плотностью коры въ тойже самой области. Это было указано уже извѣстнымъ астрономомъ Эри [2]), потомъ Праттомъ и Фэемъ [3]).

---

[1]) Ср. Thomson et Tait Treatise on Nat. Phil. II часть II изданіе 1883.

[2]) Ср. On variations of gravity.... O. Fisher. Phil. Magaz. 1886 г. 22 томъ стр. 1.

[3]) Tisserand Traité de mecan. celeste. II томъ стр. 353.

Ѳ. А. Слудскій [1]) изъ разбора наблюденій надъ качаніями маятника приходитъ къ заключенію, что вообще материкамъ и возвышенностямъ соотвѣтствуютъ недостатки плотности, а Океанамъ ея избытки.

Однако въ виду весьма неправильнаго строенія земной коры трудно предполагать, чтобы ея приноровленіе къ условіямъ равновѣсія было всегда и всюду совершенное, а потому можетъ случиться слѣдующее: вслѣдствіе неравномѣрнаго сокращенія или другой причины можетъ произойти нѣкоторое небольшое измѣненіе фигуры коры; затѣмъ измѣняется и фигура жидкаго ядра (нужно въ этомъ случаѣ допустить, что ядро есть жидкое). Эта новая фигура можетъ быть фигурой равновѣсія или нѣтъ. Если она есть фигура равновѣсія, то все обстоитъ благополучно, но если новая фигура ядра, обусловленная измѣненіемъ фигуры твердой коры, не есть фигура равновѣсія, то отступленіе отъ фигуры равновѣсія должно вообще увеличиваться. Но такой случай можетъ довести до новой катастрофы. Подъ напоромъ давленія жидкости ядра кора можетъ треснуть. Не исключена тоже возможность отдѣленія нѣкоторой части ядра отъ главной массы.

Въ настоящей работѣ мы ничего не говорили о тѣхъ деформаціяхъ, которыя могутъ происходить вслѣдствіе химическихъ и физическихъ процессовъ внутри самыхъ веществъ, изъ коихъ состоитъ земля. Извѣстно, что многія дислокаціи въ соленосныхъ пластахъ обусловлены расширеніемъ ангигрида при переходѣ въ гипсъ, — многія другія химическія измѣненія сопровождаются расширеніемъ или сокращеніемъ. Поэтому хими-

---

[1]) Матем. Сборн. томъ XVI 1892 г. Строеиіе земной коры.... стр. 233. Выше было указано, что явленіе компенсаціи не должно быть отнесено на счетъ неравномѣрностей въ охлажденіи, какъ думаетъ Фэй, оно скорѣе является результатомъ приноровленія къ условіямъ равновѣсія. Явленіе компенсаціи показываетъ, что натяженія внутри земнаго шара далеко не такъ громадны, какъ вычисляетъ Дарвинъ въ работѣ. On the stresses due to the weight of continents. Phil. Trans. 1882 г. *Прим. авт.*

ческіе и физическіе процессы могутъ дать поводъ къ образованію возвышенностей, складокъ и т. п. Но этотъ вопросъ разбирался уже не разъ. Поэтому не будемъ имъ заниматься. Скажемъ только, что безъ допущенія хоть одной катастрофы и химическіе процессы не могутъ довести до несимметричнаго рельефа. Ибо при вполнѣ симметричномъ первоначальномъ строеніи земли только одни климатическіе факторы моглибы вызвать различія въ ходѣ процессовъ. Но и эти факторы при вполнѣ симметричномъ строеніи подвержены измѣненіямъ, проходящимъ тѣ же самыя фазы въ обоихъ полушаріяхъ. Въ такомъ случаѣ и деформаціи отъ химическихъ и физическихъ процессовъ должны оказывать симметрію относительно экватора и не оказывать зависимости отъ долготы.

Нѣкоторыя изъ здѣсь помѣщенныхъ разсужденій могутъ въ послѣдствіи оказаться не вполнѣ вѣрными. Наше знаніе относительно свойствъ веществъ при температурахъ, доходящихъ до нѣсколькихъ тысячъ или десятковъ тысячъ градусовъ, при давленіяхъ въ сотни тысячъ и милліоны атмосферъ настолько ограничено, что при всей осторожности нетрудно попасть въ заблужденіе. Но заключеніе, что несимметричность рельефа земли неминуемо ведетъ къ гипотезѣ хоть одной катастрофы, по крайней мѣрѣ въ глазахъ автора настоящей работы, совершенно правильно.

М. П. Рудскій.

Прибавленіе къ I части.

Краткій очеркъ исторіи вопроса о вѣковомъ охлажденіи.

Первая строгая теорія охлажденія земли принадлежитъ, собственно говоря, Фурье и все, что было въ послѣдствіи сдѣлано сводится къ разработкѣ задачъ, изложенныхъ у Фурье. Уже въ знаменитомъ сочиненіи: *Theorie analytique de la chaleur* [1]) онъ рѣшаетъ задачу объ охлажденіи однороднаго шара и объ охлажденіи безконечнаго тѣла съ одной стороны ограниченнаго безконечной плоскостью, задачу, приложимую къ охлажденію внѣшнихъ пластовъ очень большого шара. Въ одномъ изъ мемуаровъ, помѣщенныхъ въ Annales de Chimie et de Physique именно въ XIII томѣ онъ дѣлаетъ приложеніе послѣдней задачи къ случаю земли. Въ этомъ мемуарѣ онъ доказываетъ, что въ настоящее время теплота ядра почти не оказываетъ вліянія на температуру почвы. Онъ находитъ, что, еслибъ это вліяніе совсѣмъ отсутствовало, то температура почвы понизилась бы всего на $^1/_{30}$ долю градуса Цельзія.

Соперникъ Фурье Пуассонъ оставилъ послѣ себя сочиненіе, такъ сказать, параллельное сочиненію Фурье подъ заглавіемъ: Theorie mathematique de la chaleur [2]). Въ этомъ сочи-

---

[1]) Новое изданіе. (Oeuvres de J. Fourrier) Paris 1888.

[2]) Paris 1835. Извѣстно, что гипотеза Пуассона о причинѣ внутренней теплоты земли совершенно оставлена. Она состояла въ томъ, что земля нагрѣлась проходя сквозь очень теплую область междупланетнаго пространства.

неніи разбирается тоже вопросъ охлажденія большого шара и доказывается, что тонкій поверхностный слой даже очень плохо проводящаго вещества оказываетъ весьма малое вліяніе на общій ходъ охлажденія шара. Изъ этого Пуассонъ выводитъ заключеніе, что вліяніе физическихъ свойствъ почвы на ходъ охлажденія земли весьма незначительно. Въ послѣднихъ главахъ разбирается спеціально вопросъ проникновенія солнечной теплоты въ почву и ходъ температуры почвы въ разныя времена года Пуасонъ рѣшаетъ тоже задачу объ охлажденіи шара, если условія охлажденія неодинаковы подъ всѣми широтами и долготами. Это рѣшеніе впрочемъ не въ той формѣ, въ которой оно предложено у Пуассона, а въ формѣ, которую ей придалъ Жорданъ и излагается въ первой части этой работы, но коэффиціенты, отъ которыхъ зависитъ скорость охлажденія были доселѣ неизвѣстны. Именно въ первой части этой работы въ III приложеніи доказывается теорема, помощью которой эти коэффиціенты могутъ быть опредѣлены.

Въ сочиненіи Римана [1]) «Partielle Differentialgleichungen нѣсколько странницъ посвящены вѣковому охлажденію земли, но онѣ въ сущности не содержатъ ничего новаго. Онъ между прочимъ замѣчаетъ, что нельзя точно обосновать теорію вѣкового охлажденія, пока наблюденія надъ градіентомъ обнимаютъ сравнительно небольшіе промежутки времени.

Томсонъ въ работѣ: Cooling of the Earth [2]) пользуется задачей Фурье объ охлажденіи безконечно большого однороднаго тѣла, съ одной стороны ограниченнаго безконечной плоскостью. Онъ предполагаетъ, что земля есть однородное тѣло, что температура ея въ моментъ отвердѣнія была всюду постоянна, что отвердѣніе совершилось весьма скоро и при температурѣ въ 7000° Фаренгейта. Потомъ вводится условіе, чтобы теоретичес-

---

[1]) Braunschweig 1882.

[2]) Treat. on Nat. Phil. II часть Cambridge 1883 г. Тоже De Motu caloris per terrac corpus Glasgow. 1846.

кій градіентъ былъ равенъ наблюдаемому. Изъ этого условія выходитъ, что отъ момента отвердѣнія до настоящаго времени должно было истечь около ста милліоновъ лѣтъ.

Книга Бишофа: Die Wärmelehre des Jnneren unseres Planeten [1]) посвящена вопросу распредѣленія геоизотермовъ въ зависимости отъ неровностей рельефа, отъ физическихъ свойствъ породъ и т. д.

Фэй въ своихъ статьяхъ обращаетъ вниманіе на то, что области, залегающія подъ дномъ моря должны быть болѣе охлаждены, чѣмъ области, залегающія подъ сушею. Лаппаранъ [2]) указываетъ на то, что полярныя области несомнѣнно болѣе охлаждены, чѣмъ экваторіальныя.

Другія работы, какъ Дрыгальскаго, Фишера и др. суть только спеціальныя приложенія изслѣдованій вышеуказанныхъ авторовъ. О работѣ Дрыгальскаго я имѣлъ случай говорить въ первой части этой работы (стр. 22), о работахъ Фишера въ нѣсколькихъ мѣстахъ второй части. Гэмпель [3]) только доказываетъ, что формулы Томсона точно выражаютъ температуры при взятыхъ во вниманіе условіяхъ.

Опыты Бишофа [4]) надъ базальтовыми шарами были произведены въ условіяхъ, сходныхъ съ условіями Томсона, поэтому не удивительно, что они не противорѣчатъ его выводамъ.

---

[1]) Leipzig. 1837.

[2]) Статьи Фэя и Лаппарана въ Comptes Rendus и Revue Scientifique за 1886 годъ.

[3]) Ueber den Wärmezustand der Erde Arch. Math. и Phys. 65 томъ стр. 337.

[4]) G. Bischof. Gesetz der Temperaturzunahme nach dem Erdinneren Ann. Phys. u. Chem. 35 Band. стр. 209.

О предѣлахъ атмосферы.

М. П. Рудскаго.

(Sur les limites de l'atmosphère).

M. P. Rudski.

Чаще всего въ книгахъ, посвященныхъ теоретической метеорологіи встрѣчаемъ мнѣніе, что атмосфера имѣетъ верхній предѣлъ, хотя рядомъ съ этимъ мнѣніемъ встрѣчаемъ и другое, именно, что атмосфера не имѣетъ верхняго предѣла. Положительныхъ фактическихъ данныхъ, говорящихъ въ пользу того или другого мнѣнія нѣтъ.

Изъ наблюденій надъ сѣвернымъ сіяніемъ Ліэ заключаетъ, что высота атмосферы не меньше 400 километровъ. Скіапарелли замѣчаетъ, что метеориты начинаютъ блестѣть на высотахъ больше 200 километровъ. Это указываетъ на присутствіе воздуха. Метеоритъ накаливается отъ тренія о воздухъ и начинаетъ издавать свѣтъ.

Съ другой стороны въ движеніяхъ небесныхъ тѣлъ до сихъ поръ неудалось подмѣтить вліянія сопротивленія среды. Слѣдуетъ однако замѣтить, что это не составляетъ доказательства, такъ какъ въ очень разрѣженной средѣ замѣтныя измѣненія въ движеніяхъ небесныхъ тѣлъ быть можетъ требуютъ гораздо большаго времени, чѣмъ то время, за которое имѣются точныя астрономическія наблюденія.

А. Риттеръ [1]) пытался опредѣлить высоту атмосферы на основаніи слѣдующаго принципа. Работа нужная для того, что-

---

[1]) Ritter. Anwendungen der mech. Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. Hannover 1879 г.

бы перевести единицу массы воздуха отъ предѣла атмосферы до поверхности земли эквивалентна тому количеству теплоты, которое заключается въ такой-же самой массѣ воздуха, находящейся у поверхности земли. Онъ находитъ, что атмосфера совершеннаго газа, находящагося въ адіабатномъ состояніи должна имѣть высоту $27^1/_2$ километровъ. Но, измѣняя условія, [именно устраняя гипотезу, что газъ есть совершенный] онъ получаетъ для земной атмосферы высоту слишкомъ въ десять разъ большую.

Но, кажется мнѣ, принципъ Риттера не выдерживаетъ критики. Онъ справедливъ только для атмосферы, находящейся въ адіабатномъ состояніи. Если н. п. подымать единицу массы газа все выше и выше, съ условіемъ, чтобы она находилась въ адіабатномъ состояніи, то ея температура на данной высотѣ вообще окажется неравной температурѣ окружающаго воздуха. Наша атмосфера не находится въ адіабатномъ состояніи, она получаетъ солнечную теплоту и теряетъ ее вслѣдствіе лучеиспусканія [1]. Весьма легко представить себѣ въ высокихъ слояхъ атмосферы такое равновѣсіе между утратой теплоты и нагрѣваніемъ отъ солнечныхъ лучей, что повышеніе температуры въ различныхъ уровняхъ совсѣмъ незначительно.

Изъ уравненія [2] равновѣсія атмосферы нельзя вывести никакихъ заключеній относительно ея предѣловъ точно такъ, какъ изъ выраженія потенціала притяженія внутри тѣла нельзя вывести заключеній относительно разстоянія его поверхности отъ центра.

---

[1] См. Abbe. Atmospherie Radiation of Heat. Amer. Journ. of Science 1892 г. Май. По Траберту килограммъ воздуха теряетъ ежечасно путемъ лучеиспусканія 0,032—0,036 калорій.

[2] Уравненіе равновѣсія газа со вниманіемъ на собственную аттракцію его частицъ найдено Громекою: Нѣкоторые случаи равновѣсія совершеннаго газа. Казань 1886 г. В. Томсономъ. Equilibrium of a gas under ist own Gravitation. Phil. Mag. 5 ser. 23 томъ стр. 287 и Риттеромъ. Wied. Ann. 1882 г.

Такъ н. п. Маскаръ [1]) допускаетъ, что атмосфера имѣетъ предѣлъ, а потомъ старается опредѣлить форму функціи, удовлетворяющей дифференціальному уравненію равновѣсія атмосферы. Громека [2]) дѣлаетъ предположеніе, что температура постоянна во всемъ междупланетномъ пространствѣ. Но такое предположеніе очевидно равносильно предположенію, что газъ заполняетъ [3]) все пространство. Поэтому неудивительно, что Громека пришелъ къ заключенію, что количество газа должно быть безконечно велико, иначе даже въ поверхности земли его плотность будетъ безконечно малая. Очевидно подобный результатъ показываетъ, что атмосфера неимѣетъ предѣла.

Температура воздуха на высотѣ нѣскольких сотъ километровъ надъ поверхностью земли неизвѣстна, но во всякомъ случаѣ весьма низка [4]). Съ другой стороны Ольшевскій [5]) утверждаетъ, что при — 220°С. даже при давленіи въ 4 мм. воздухъ остается жидкимъ и прозрачнымъ. Слѣдовательно, на далекомъ разстояніи отъ поверхности земли неисключена возможность присутствія жидкаго воздуха или жидкаго кислорода и азота, какъ полагаетъ Риттеръ [6]). Но еслибы даже жидкій воздухъ составлялъ нѣкоторую плёнку вокругъ земной атмос-

---

[1]) Journ. de Physique 1892 г. Майская книжка.

[2]) Loc. cit.

[3]) Это явствуетъ изъ уравненія:

$$pv = kT$$

гдѣ p давленіе газа
v объемъ »
T абсол. температура газа.

[4]) Фрэлихъ (Fröhlich Repert. für Meteor. VI томъ) опытнымъ путемъ нашелъ —127°С. и —131°С.

[5]) Handbuch der Anorganischen Chemie Dammer. Stuttgart. 1892 г.

[6]) Anwendungen etc.... стр. 9.

Извѣстно, что на основаніи наблюденій воздухоплавателя Глешера Менделѣевъ пытался опредѣлить отношеніе между измѣненіемъ температуры и давленіемъ по мѣрѣ повышенія. Онъ допускаетъ нѣкоторую неопредѣленность относительно границъ атмосферы. Ср. Воейковъ Климаты земного шара. С.-Пет. 1884 г. стр. 269.

феры, то, приходящій снизу газъ, можетъ легко разорвать подобную плёнку и уйти далеко за ея предѣлы. Я говорю о подходящемъ снизу газѣ, ибо нѣтъ сомнѣнія, что даже на самыхъ большихъ высотахъ происходятъ нѣкоторыя движенія.

Изъ кинетической теоріи газовъ можно вывести послѣдствія, бросающія нѣкоторый свѣтъ на занимающій насъ вопросъ. Согласно этой теоріи въ данномъ объемѣ газа при какой угодно температурѣ имѣются частицы, обладающія различными поступательными скоростями, начиная отъ весьма небольшихъ до самыхъ огромныхъ [у совершеннаго газа отъ 0 до ∞].

При высокой температурѣ процентъ частицъ, обладающихъ большой поступательной скоростью больше, при низкой меньше, но всегда есть нѣкоторый процентъ частицъ, обладающихъ очень большой поступательной скоростью.

Съ другой стороны извѣстно, что, еслибъ не треніе, то тѣло, обладающее у поверхности земли первоначальной скоростью въ направленіи радіуса, большей, чѣмъ $\sqrt{2ga}$ [гдѣ g есть ускореніе силою тяжести, a радіусъ земли] можетъ удалиться отъ земли на безконечное разстояніе.—Поэтому, если въ извѣстномъ объемѣ воздуха есть частицы, обладающія поступательной скоростью по направленію радіуса, превышающей какихъ нибудь 11200 метровъ въ секунду, то непремѣнно многія изъ нихъ, уйдутъ на безконечное разстояніе отъ земли.

Въ болѣе высокихъ сферахъ атмосферы нужна даже меньшая поступательная скорость для того, чтобы частица навсегда удалилась отъ земли.

Къ тому слѣдуетъ прибавить, что центробѣжная сила способствуетъ удаленію частицъ отъ земли [1]) и что на извѣстномъ разстояніи онѣ попадаютъ въ область, гдѣ притяженіе другихъ тѣлъ солнечной системы преобладаетъ надъ притяженіемъ земли.

---

[1]) Лапласъ полагалъ, что атмосфера земли оканчивается только тамъ, гдѣ центробѣжная сила уравновѣшиваетъ притяженіе. Объ этомъ будетъ рѣчь дальше. *Прим. авт.*

Такимъ образомъ между нашей атмосферой и междупланетнымъ пространствомъ долженъ происходить постоянный обмѣнъ частицъ [1]):

Междупланетное пространство все выполнено крайне разрѣженнымъ воздухомъ. Тѣла солнечной системы суть только центры загущенія атмосферы.

Но разъ происходитъ обмѣнъ газовъ между нашей атмосферой и междупланетнымъ пространствомъ, то этотъ обмѣнъ можетъ въ годичномъ балансѣ давать потерю или прибыль. Другими словами состояніе нашей атмосферы по всей вѣроятности не есть стаціонарное. Давленіе, плотность у поверхности земли, даже составъ атмосферы подвержены вѣковымъ измѣненіямъ. Быть можетъ, что атмосфера потому отсутствуетъ на лунѣ, что она уже лишилась своего воздуха главнымъ образомъ въ пользу земли, какъ ближайшаго, да притомъ сравнительно съ луной, гораздо большаго тѣла.

Коль скоро нѣтъ внѣшней свободной поверхности, то нѣтъ условія, чтобы линіи токовъ лежали въ этой свободной поверхности. Такимъ образомъ дѣлаются возможными многіе виды движеній, которые не согласуются съ вышеупомянутымъ условіемъ.

---

[1]) Этотъ обмѣнъ весьма медленный. Процентъ частицъ, способныхъ улетѣть на безконечное разстояніе выражается стомилліонными долями. Такъ н. п. въ кислородѣ при 0° и 760 mm. давленія частицъ, обладающихъ скоростью по направленію радіуса земли [да притомъ отъ земли наружу] большей, чѣмъ 804 метра въ секунду всего 219 на 10000 [немногимъ больше, какъ одна на 500]. Между тѣмъ улетѣть могутъ только тѣ, у которыхъ, направленная наружу радіяльная скорость больше, чѣмъ 11200 метровъ въ секунду. Я потому не привожу точныхъ чиселъ, указывающихъ интересующій насъ процентъ частицъ, что таблицы Крампова интеграла, встрѣчающагося при вычисленіи этого процента даже не содержатъ соотвѣтственныхъ аргументовъ. Этотъ процентъ вычисляется изъ формулы.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\int_{11,200}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{\alpha^2}}\,d\omega,$$

гдѣ α при 0° и 760 миллиметрахъ давленія равно 397.

Если воздушный Океанъ состоитъ изъ опредѣленпаго конечнаго количества газа, то само собою очевидно, что онъ долженъ двигаться вмѣстѣ съ землею такъ, какъ движутся водяные Океаны т. е., упустивъ изъ виду разныя теченія, какъ часть твердаго тѣла.

Не то въ случаѣ, когда атмосфера безпредѣльная. Воздухъ, чѣмъ дальше отъ поверхности земли, тѣмъ больше отстаетъ отъ ея движенія.

Разсмотримъ сначала вращательное движеніе земли и воздуха. Тогда вопросъ сводится къ задачѣ о вращательномъ движеніи шара въ безконечной жидкости.

Притомъ можно сдѣлать слѣдующія предположенія:

1) Что движеніе стаціонарно. Это неточно, но близко къ истинѣ, такъ какъ вѣковыя измѣненія состоянія атмосферы весьма медленны.

2) Что существуетъ только вращательное движеніе.

3) Что у самой поверхности шара воздухъ вполнѣ увлекается его движеніемъ. Хотя бы коэффиціентъ тренія воздуха о поверхность земли былъ самый незначительный, то послѣ продолжительнаго вращенія слой воздуха непосредственно прикасающійся къ поверхности шара, долженъ пріобрѣсть ея скорость.

Уравненія движенія въ сферическихъ координатахъ суть слѣдующія: [1])

---

[1]) Ср. Whitehead. Second appr. to viscous fluid motion Quart. Journ. XXIII. 1889 г. стр. 145. Эти уравненія вѣрны, хотя вообще работа Уайтгэда довольно слаба. Первая часть въ томъ-же самомъ томѣ Quart. Journ. содержитъ рѣшеніе интересующей насъ задачи для несжимаемой жидкости. Однако рѣшеніе невѣрно. Вопервыхъ Уайтгэдъ говоритъ, что рѣшеніе вѣрно только въ такомъ случаѣ, когда пренебрегаемъ квадратами скоростей. Между тѣмъ когда $u = v = o$, это есть строгое рѣшеніе. Во вторыхъ онъ приходитъ къ результату (loc. cit. стр. 91), что при условіи, чтобы въ поверхности шара жидкость прилипала къ шару, скорости u и v не могутъ быть равны нулю. Это тоже ложно. Уайтгэдъ ссылается на Стокеса [Mathem. and Phys. papers Cambr. 1880 Vol. I стр. 103] но Стокесъ имѣлъ въ виду другой видъ движенія. Вѣрное рѣшеніе находится у Д. Эдуардса: D. Edwardes Steady motion of a viscous fluid in which.... Quart. Journ. 1892 года стр. 75.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-2(v\zeta-w\eta)=-\frac{\partial P}{\partial r}-\frac{2\mu}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}+\frac{\zeta\cot\theta}{r}-\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\phi}\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\mu}{3\rho}\cdot\frac{\partial\delta}{\partial r}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}-2(w\xi-u\zeta)=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}-\frac{2\mu}{\rho}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\phi}-\frac{\partial\zeta}{\partial r}-\frac{\zeta}{r}\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\mu}{3\rho}\frac{\partial\delta}{r\partial\theta}\\
&\frac{\partial w}{\partial t}-2(u\eta-v\xi)=-\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial P}{\partial\phi}-\frac{2\mu}{\rho}\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{\eta}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right)+\\
&\qquad\qquad+\frac{\mu}{3\rho}\cdot\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\delta}{\partial\phi}
\end{aligned}\right\}\ \text{IV}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}+v\frac{\partial\rho}{r\partial\theta}+\frac{w}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\phi}+\rho\delta=0\ \ldots\ldots \quad \text{V}$$

$$\delta=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\operatorname{cotg}\theta.\frac{v}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\phi} \qquad \text{VI}$$

$$\left.\begin{aligned}
2\xi&=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{w\operatorname{cotg}\theta}{r}-\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\phi}\\
2\eta&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\phi}-\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}\\
2\zeta&=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}
\end{aligned}\right\}\ \text{VII}$$

Здѣсь r обозначаетъ растояніе отъ центра шара.

θ .... угловое разстояніе отъ сѣверной (положительной) части полярной оси.

ϕ .... географическую долготу.

$u=\dfrac{dr}{dt}$...... скорость по направленіи радіуса.

$$v = r.\frac{d\theta}{dt}$$ .... увеличивающагося угла θ

$$w = r \sin\theta.\frac{d\phi}{dt}$$ .... угла ϕ

ξ, η, ζ суть слагающія вихревого движенія вокругъ осей параллельныхъ тремъ главнымъ направленіямъ.

ρ обозначаетъ плотность жидкости.

μ коэффиціентъ [1]) внутренняго тренія.

$$P = \frac{1}{2}\left(v^2 + u^2 + w^2\right) + \int\frac{dp}{\rho} - V$$

гдѣ p обозначаетъ давленіе

V .... потенціалъ внѣшнихъ силъ (въ данномъ случаѣ притяженія).

Изъ самаго характера разсматриваемаго движенія слѣдуетъ, что всѣ входящія сюда функціи независятъ отъ угла ϕ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ вводимъ вышеуказанныя предположенія, что движеніе стаціонарно и что:

$$u = v = 0$$

Тогда уравненіе непрерывности оказывается удовлетворено тождественнымъ образомъ. Потомъ: (ур. VI)

$$\delta = 0$$

т. е. нѣтъ расширенія вдоль струекъ, что само собою очевидно, такъ какъ жидкость течетъ по кругамъ, имѣющимъ центръ па полярной оси. Дальше:

---

[1]) Уравненія, которыми пользуемся суть общепринятыя уравненія Стокса. Онѣ до нѣкоторой степени только приблизительныя. Ср. Hicks. Recent progress in Hydrodynamics. Report. Brit. Ass. for. 1881 г. стр. 80.

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= 0\\ 2\xi &= \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} + w\,\frac{cotg\,\theta}{r}\\ 2\eta &= -\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\end{aligned}\right\}\ \text{VII bis}$$

$$\left.\begin{aligned}2w\eta &= -\frac{\partial P}{\partial r}\\ 2w\xi &= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\eta}{\partial r} + \frac{\eta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial\theta} &= 0\end{aligned}\right\}\ \text{IV bis}$$

Послѣднее уравненіе, послѣ подставленія значеній для ξ и η изъ уравненій: VII bis принимаетъ видъ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(wr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(w\,sin\,\theta)\right] = 0$$

Это послѣднее уравненіе приводится сейчасъ къ уравненію Лапласа.

Общій его интегралъ есть слѣдующій:

$$w = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}}{2^n.1.2\ldots n.}\frac{d^{n+1}(q^2-1)^n}{dq^{n+1}}\cdot\left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right]$$

Здѣсь $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

A_n и B_n суть постоянные коэффиціенты.

$q = cos\,\theta$.

Введемъ теперь условіе: 3.,, чтобы скорость жидкости въ поверхности шара равнялась скорости точекъ самой поверхности.

Послѣдняя скорость будетъ:

$$\omega\,.\,a\,.\,sin\,\theta$$

гдѣ ω обозначаетъ угловую скорость вращенія земли
a — средній радіусъ.

Тогда оказывается, что всѣ постоянныя A_n и B_n должны быть равны нулю, кромѣ A_1 и B_1 и условное уравненіе сводится къ слѣдующему:

$$\omega a = \left[A_1 a + \frac{B_1}{a^2}\right] \qquad \text{VIII}$$

Если положить, что $B_1 = 0$, тогда вся жидкость вращается съ землею какъ твердое тѣло. Если оставить A_1 и B_1 то, хотя жидкость отстаетъ отъ движенія земли, всетаки въ выраженіи скорости жидкости будетъ членъ, увеличивающійся вмѣстѣ съ разстояніемъ отъ центра. И въ томъ и другомъ случаѣ скорость жидкости на безконечномъ разстояніи безконечно большая. Очевидно, земля, увлекая воздухъ въ своемъ движеніи, не можетъ возбудить безконечныхъ скоростей на безконечномъ разстояніи. Слѣдовательно единственное возможное рѣшеніе есть то, въ которомъ

$$A_1 = 0$$
$$B_1 = \omega a^3$$

А потому:

$$w = \frac{\omega \, . \, a^3}{r^2} . \sin\theta \qquad \text{IX}$$

Изъ этого рѣшенія вытекаютъ нѣкоторыя интересныя слѣдствія. Если возьмемъ то рѣшеніе, въ которомъ $B_1 = 0$, $A_1 > 0$ т. е. если предположимъ, что воздухъ вращается съ землею, какъ твердое тѣло, то относительно земли атмосфера будетъ въ состояніи совершеннаго покоя. Тогда очевидно (ур. VIII).

$$A_1 = \omega, \;\; w = r\omega \sin\theta$$

Изъ уравн. VII bis получаемъ:

$$\xi = \omega \cos\theta$$
$$\eta = -\omega \sin\theta$$

Слѣдовательно:

$$2w\eta = -2\omega^2 r \sin^2\theta$$
$$2w\xi = 2\omega^2 r \cos\theta \sin\theta$$

Тогда изъ IV bis:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 2\omega^2 r \sin^2\theta = \frac{\partial}{\partial r}(\omega^2 r^2 \sin^2\theta)$$
$$\frac{\partial P}{\partial r} = 2\omega^2 r^2 \cos\theta \sin\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}(\omega^2 r^2 \sin^2\theta)$$

Слѣдовательно, вспомнивъ значеніе P.

$$\omega^2 r^2 \sin^2\theta = \int\frac{dp}{\rho} - V + \frac{w^2}{2}$$

но $w = \omega r \sin\theta$, слѣдовательно:

$$V + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin\theta = \int\frac{dp}{\rho}$$
$$\frac{\partial V}{\partial r} + \omega^2 r^2 \sin^2\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad \text{X}$$
$$\frac{\partial V}{\partial\theta} + \omega^2 r^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta}$$

Такъ какъ V выражаетъ потенціалъ притяженія [1]), то мы получили извѣстное уравненіе для равновѣсія газа, окружающаго шаръ причемъ:

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

есть потенціалъ мнимой центробѣжной силы.

---

[1]) Строго говоря, подъ V слѣдуетъ подразумѣвать нетолько потенціалъ притяженія земли, но и притяженія однихъ частицъ газа на другія.

Возьмемъ теперь наше болѣе соотвѣтствующее дѣйствительности рѣшеніе:

$$w = \frac{\omega . a^3}{r^2} \sin \theta$$

Поступая совершенно такъ, какъ въ прежнемъ случаѣ, получимъ уравненія:

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{a^6 . \omega^2}{r^5} \sin^2 \theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

XI

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{a^6 . \omega^2}{r^4} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

Изъ которыхъ сейчасъ видно, что на дѣлѣ нѣтъ никакого потенціала центробѣжной силы.

Но въ болѣе удаленныхъ слояхъ атмосферы слагающія центробѣжной силы несравненно меньше. Въ первомъ случаѣ онѣ возрастаютъ по мѣрѣ удаленія отъ земли, здѣсь-же онѣ уменьшаются.

Нетрудно убѣдиться, что величина: $\frac{\partial p}{\partial r}$ постоянно отрицательная. Для того, чтобы она могла измѣнить знакъ, нужно чтобы:

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{a^6 \omega^2}{r^5} \sin^2 \theta = 0$$

Возьмемъ во вниманіе только притяженіе земли, тогда

$$\frac{\partial V}{\partial r} = - \frac{g . a^2}{r^2}$$

но, какъ извѣстно, $g = 289 . \omega^2 a$ (приблизительно), слѣдовательно послѣднее уравненіе можно написать подъ видомъ.

$$\frac{a^3}{r^3} \sin^2\theta = 289.$$

Очевидно, корень его даже на экваторѣ меньше, чѣмъ a, а потому внѣ шара: $\frac{\partial p}{\partial r}$ постоянно отрицательно. Поверхность Лапласа [1]) не существуетъ, приращеніе давленія газа всюду направлено къ землѣ. Оно измѣняетъ направленіе только тамъ, гдѣ притяженіе другихъ небесныхъ тѣлъ преобладаетъ надъ притяженіемъ земли.

Разсматривая вторую изъ формулъ XI [1]) замѣчаемъ, что зависящая отъ географической широты слагающая центробѣжной силы слабѣетъ по мѣрѣ удаленія отъ земли.

При помощи формулы IX нетрудно вычислитъ отставаніе воздуха противъ движенія земли. Такъ н. п. надъ экваторомъ на высотѣ $6\frac{1}{2}$ килом. воздухъ отстаетъ приблизительно на одинъ метръ въ секунду.

До сихъ поръ мы брали во вниманіе только вращательное движеніе земли. Теперь слѣдуетъ взять во вниманіе поступательное движеніе. Собственно говоря, слѣдовалобы взять во вниманіе поступательное движеніе вмѣстѣ съ вращательнымъ, но къ сожалѣнію даже рѣшеніе задачи о движеніи вязкой жидкости, въ которой находится эллипсоидъ или шаръ, обладающій поступательнымъ движеніемъ, дается только тогда [3]),

---

[1]) Гдѣ центробѣжная сила уравновѣшиваетъ притяженіе.

[2]) Формулы наши не совсѣмъ точны для поверхности земли, такъ какъ поверхность шара не есть эквипотенціальная поверхность. Поэтому, желая получить болѣе точныя формулы, слѣдуетъ вмѣсто шара взять эллипсоидъ, а потомъ ввести условіе, чтобы поверхность эллипсоида была эквипотенціальная поверхность. Задача о вращеніи эллипсоида въ жидкости находится у Эдвардса. D. Edwardes. Steady motion of a viscous fluid in which an ellipsoid is constrained to rotate about a principal axis. Quart. Journ. 1892 г. стр. 70.

[3]) См. Oberbeck. Ueber stat. Flüssigkeitsbewegungen. Crelle LXXXI 1876 г. стр. 62.

когда пренебрегаемъ квадратами скоростей, а потому результаты получаются неточные.

При поступательномъ движеніи шара давленіе должно быть нѣсколько больше впереди, чѣмъ позади его [4]).

Поэтому вслѣдствіе поступательнаго движенія земли на той сторонѣ ея, которая въ данный моментъ находится впереди (по отношенію къ движенію по орбитѣ) долженъ оказаться нѣкоторый небольшой излишекъ давленія, на противуположной нѣкоторое уменьшеніе давленія.

Такимъ образомъ является вопросъ, не находится ли это явленіе въ связи съ двойнымъ суточнымъ колебаніемъ барометра.

Очевидно только что указанная механическая причина измѣненій давленія имѣетъ своимъ періодомъ сутки точно такъ, какъ термическая причина т. е. нагрѣваніе солнцемъ. Фазы обѣихъ различны, ибо механическая причина должна вызывать свой максимумъ давленія въ 6 часовъ утра, а минимумъ въ 6 часовъ вечера, (приблизительно) термическая должна вызывать минимумъ около 2 час. пополудни, а максимумъ недолго до восхода солнца. Смотря по ходу слагающихъ колебаній, результирующее колебаніе можетъ имѣть одинъ или больше максимумовъ и минимумовъ въ продолженіи сутокъ [1]).

Поэтому прежде всего посмотримъ въ какихъ предѣлахъ заключаются колебанія барометра, обусловленныя движеніемъ

---

[4]) Ср. Lamb. Motion of fluids. стр. 225. У Обербека наоборотъ, должно быть вслѣдствіе какой-то ошибки въ знакѣ. Впрочемъ къ выраженію давленія у Обербека [стр. 74 loc. cit.] слѣдуетъ прибавить постоянную.

[2]) Н. п. функція:

$$A\sin^2\theta + B\sin(\alpha + \theta)$$

смотря по значеніямъ коэффиціентовъ A, B и аргумента α можетъ имѣть 3 максимума и 3 минимума, 2 максимума и 2 минимума, или даже (когда $\alpha = o$) одинъ максимумъ и одинъ минимумъ. Между тѣмъ періодъ каждой изъ слагающихъ и результирующей функціи: 2π.

земли. Обербекъ предполагаетъ, что шаръ движется прямолинейно, но такъ какъ діаметръ орбиты въ 23000 разъ больше діаметра земли, то заключенія, слѣдующія изъ задачи Обербека, приложимы къ землѣ.

Согласно Обербеку на экваторѣ:

$$p = Const + \frac{3}{2}\mu . \frac{V}{a} \cos\varphi$$

гдѣ φ обозначаетъ угловое разстояніе отъ прямой, проведенной сквозь центръ земли и ту точку экватора, которая въ данный моментъ находится впереди земли.

V обозначаетъ поступательную скорость земли по орбитѣ

a радіусъ земли

$$\mu = 0{,}134 \rho$$ [1]).

μ выражено въ сантим. и секундахъ.

Если теперь сдѣлаемъ вычисленіе такъ, чтобы получить сразу давленіе въ миллиметрахъ ртути [2]), то найдемъ, что колебанія барометра, вызываемыя этой механической причиной выражаются дробью, которой числитель есть единица, а знаменатель число, состоящее изъ 14 знаковъ. Замѣтимъ, что въ задачѣ Обербека разсматривается жидкость несжимаемая, которой плотность постоянна, а потому вышеуказанная амплитуда колебаній барометра, обусловленныхъ поступательнымъ движеніемъ земли, составляетъ для нашей атмосферы верхній предѣлъ.

Въ разсматриваемыхъ выше задачахъ мы упустили изъ виду притяженіе другихъ тѣлъ солнечной системы. Но извѣст-

---

[1]) Helmholtz Ueber Atm. Bew. Sitzb. Akad. Wiss. Berlin. 1888 г. стр. 649.

[2]) Въ такомъ случаѣ плотность: $\rho = \frac{760}{ga}$

гдѣ $g = 9{,}81$ метрамъ въ секунду
$a = 6370000$ метрамъ.

но, что это притяженіе оказываетъ малое вліяніе на наиболѣе интересующіе насъ нижніе слои атмосферы, точно также отставаніе воздуха въ этихъ слояхъ незначительно

Впрочемъ мы можемъ съ нѣкоторой увѣренностью разсуждать только о нижнихъ слояхъ атмосферы.

Хотя наши рѣшенія были вполнѣ строги, но мы не имѣемъ увѣренности, что это движеніе устойчиво. Еслибы оно оказалось неустойчивымъ, тогда наши результаты относительно отставанія воздуха и т. д. будутъ *качественно*, но не *количественно* справедливы. Насколько кажется, отставаніе въ такомъ случаѣ будетъ еще больше.

Мы принуждены пока оставить этотъ вопросъ въ сторонѣ, такъ какъ устойчивость движенія есть вопросъ только недавно поставленный на очереди и далеко еще не разработанный полностью.

М. П. Рудскій.



Антитермы изопіестическихъ и изометрическихъ процессовъ совершенныхъ газовъ.

Н. Умовъ.

(Antithermen der isopiestischen und isometrischen Processe vollkommener Gase).

N. Umow.

---

1. Пусть v, p, t означаютъ объемъ, давленіе и абсолютную температуру единицы массы совершеннаго газа, c_p и c_v удѣльныя теплоемкости при постоянномъ давленіи и постоянномъ объемѣ, выраженныя въ терміяхъ.

Вообще принимается, что количество тепла

$$c_p dt \text{ и } c_v dt \qquad \text{(I)}$$

приводятся газу только въ двухъ вполнѣ опредѣленныхъ процессахъ — первое въ процессѣ изопіестическомъ, второе — въ процессѣ изометрическомъ.

Здѣсь будетъ показано, что существуютъ еще другіе процессы, въ которыхъ подводимыя газу количества теплоты, представляются тѣми-же выраженіями (I).

Въ діаграммѣ (p, v) эти процессы изобразятся кривыми линіями, которыя я назову *антитермами*; изопіестическіе и изометрическіе процессы въ той-же діаграммѣ представляются, какъ извѣстно, взаимно-перпендикулярными прямыми.

Различіе между обоего рода процессами состоитъ въ томъ, что разумѣя подъ выраженіями (1) абсолютныя величины количествъ тепла, эти послѣднія

приводятся:

изопіестически }
изометрически } при возрастающей температурѣ,

антитермически – при убывающей температурѣ;

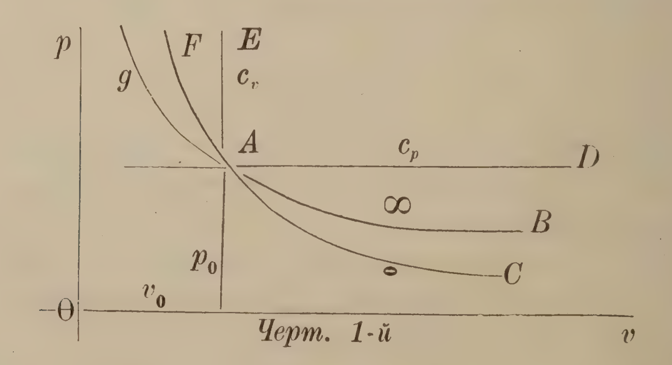
отводятся:

изопіестически }
изометрически } при убывающей температурѣ;

антитермически—при возрастающей температурѣ.

Вообще—каждому обращаемому процессу соотвѣтствуетъ *антитермическій.*

Мы приходимъ всего проще къ доказательству существованія подобныхъ процессовъ слѣдующимъ разсужденіемъ.



Черт. 1-й

На діаграммѣ (p, v) черт. 1, проведемъ черезъ точку A (p_0, v_0) изотерму GAB, изэнтропу FAC, изопіесту AD и изометру AE.

Пусть δQ означаетъ въ терміяхъ количество тепла, которое сообщается газу въ нѣкоторомъ обращаемомъ процессѣ при измѣненіи его температуры на δt. Отношеніе

$$Z=\frac{\delta Q}{\delta t}$$

представитъ удѣльную теплоту газа въ данномъ процессѣ и для даннаго состоянія. Будемъ считать подводимое тепло положительнымъ, и уводимое—отрицательнымъ.

Въ части плоскости $(p\ \ v)$, лежащей между изентропой FC и безконечностью, теплота приводится тѣлу въ каждомъ процессѣ, который, исходя изъ состоянія A, продолжается въ ∞ при постоянномъ расширеніи или при постоянномъ сокращеніи объема тѣла. Въ этомъ смыслѣ, въ указанной части плоскости, δQ—положительно.

Для этихъ же процессовъ δt будетъ положительно въ области $FADAB$ и отрицательно въ области BAC. Въ первой, или *внѣшней* области, величины z возрастаютъ отъ нуля на изентропѣ AF черезъ значенія c_v, c_p, до $+\infty$ на изотермѣ AB. Во второй, внутренней области, величина z отрицательна и имѣетъ всѣ значенія отъ $-\infty$ вблизи изотермы AB до нуля на изентропѣ AC. По этому каждому значенію $+z$ во внѣшней области, соотвѣствуетъ значеніе $-z$ во внутренней. Такъ какъ значенія dt въ обоихъ областяхъ имѣютъ также противуположные знаки, то подведенное количество тепла для *термы* во внѣшней области будетъ имѣть ту же величину какъ и на *антитермѣ* для внутренней.

2. Найдемъ теперь уравненіе антитермы изопiесты. Мы имѣемъ:

$$\delta Q=c_v dt+pdv \tag{1}$$

Для искомой антитермы:

$$\delta Q = -c_p dt$$

и, кромѣ того,

$$dt = \frac{1}{R}(pdv + vdp),\ \frac{c_p - c_v}{R} = 1.$$

Полагая еще

$$\frac{2c_p}{R} = \alpha \tag{2}$$

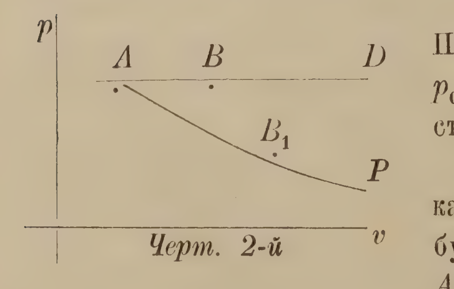
получаемъ

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{\alpha p}{(\alpha - 1)v} \tag{3}$$

откуда, интегрируя, находимъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\alpha} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha-1} &= 1 \\ \frac{v}{v_0} \quad \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha-1} &= 1 \\ \frac{p}{p_0} \quad \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

гдѣ v_0, p_0, t_0 соотвѣтствуютъ нѣкоторой точкѣ антитермы.



Черт. 2-й

Проведемъ черезъ точку A (v_0, p_0, t_0) антитермы AP—изопіесту AD (*черт. 2-й*).

Разность температуръ въ точкахъ B и A изопіесты пусть будетъ $t'_0 - t_0$; на антитермѣ AP существуетъ такая точка B_1, что разность температуръ состояній A и B_1, т. е. $t_0 - t$,

равна разности температуръ въ B и A, или

$$t'_0 - t_0 = t_0 - t, \text{ откуда } t = 2t_0 - t'_0. \qquad (4)$$

Я назову точки B и B_1 *соотвѣтственными* и изъ нихъ B—*основною точкою*; точку A я назову *начальною* точкою. Пути AB и AB_1 будутъ *соотвѣтственными*.

И такъ:

1) *Температура начальной точки есть средняя ариѳметическая температуръ соотвѣтственныхъ точекъ.*

2) *Количества тепла, подведенныя на соотвѣтственныхъ путяхъ, другъ другу равны.*

Мы имѣемъ по закону Шарля и Бойля

$$\frac{t}{t_0} = 2 - \frac{t'_0}{t_0} = 2 - \frac{v'_0}{v_0} \ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

слѣдовательно по (I) и (5) положеніе соотвѣтственной точки представится по положенію основной—уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0\left(2 - \frac{v'_0}{v_0}\right)^{\alpha} \\ v &= v_0 \frac{1}{\left(2 - \frac{v'_0}{v_0}\right)^{\alpha-1}} \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

Отсюда вытекаетъ, что основной точкѣ $v'_0 = 2v_0$ соотвѣтствуетъ на антитермѣ—точка безконечно удаленная.

Представивъ себѣ цѣлую систему изопіестъ и на нихъ начальныя и основныя точки, уравненія (II) приводятъ насъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) *если начальныя и основныя точки лежатъ на прямыхъ* ($v_0 = const$, $v'_0 = const.$) *перпендикулярныхъ оси абсциссъ,*

соотвѣтственныя точки лежатъ на такомъ же перпендикулярѣ. ($v = const.$)

2) *Прямыя, соединяющія начальныя точки съ соотвѣтственными, пересѣкаются въ одной точкѣ оси абсциссъ* (ибо $\frac{p}{p_0}$ будетъ тоже *const.*).

Эти свойства даютъ намъ возможность по одной антитермѣ изопіесты начертить остальныя.

Одной основной точкѣ, взятой на какой нибудь изопіестѣ, мы можемъ подъискать рядъ соотвѣтственныхъ точекъ на антитермахъ, пересѣкающихъ данную изопіесту. Эти соотвѣтственныя точки образуютъ кривую, простирающуюся въ безконечность: я назову ее — *соотвѣтственной кривой.* Мы получаемъ дифференціяльное уравненіе этой кривой, дифференцируя соотношенія (II) по v_0, такъ какъ p_0, v'_0, t'_0 остаются неизмѣнными, а мѣняется положеніе начальной точки на данной изопіестѣ. Съ помощью ур. (I) мы исключимъ v_0 изъ отношенія $\frac{\partial p}{\partial v}$ и получимъ:

$$\frac{2\,\partial p}{\alpha\, p^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} = \frac{t'_0}{p_0^{\frac{1}{\alpha}}}\,\frac{\partial t}{t^2}\,.$$

Такъ какъ основная точка (p_0, v'_0, t'_0) лежитъ тоже на искомой кривой, то интеграціей получаемъ ея уравненіе въ слѣдующихъ видахъ:

$$2\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{t'_0}{t} = 1$$

или (III)

$$2\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{v'_0\, p_0}{v\, p} = 1$$

Эта кривая приближается ассимптотически къ антитермѣ, проходящей черезъ точку p_0, $\frac{v'_0}{2}$.

Означимъ черезъ t_0 температуру точки пересѣченія изопіесты и антитермы; черезъ μ_0 означимъ энтропію въ той же точкѣ. Проведемъ еще изентропу μ_1, сѣкущую первыя двѣ кривыя; пусть t_1 есть температура въ точкѣ пересѣченія изентропы съ изопіестой и t_2 въ точкѣ пересѣченія изентропы съ антитермой.

Мы имѣемъ для изопіесты

$$td\mu = c_p dt,$$

для антитермы

$$td\mu = - c_p dt.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\mu_1 - \mu_0 = c_p log \frac{t_1}{t_0}$$

$$\mu_1 - \mu_0 = - c_p log \frac{t_2}{t_0}.$$

Вычитая, получаемъ:

$$log \frac{t_1 t_2}{t_0^2} = 0$$

или

$$t_0 = \sqrt{t_1 t_2}$$

т. е. *температура въ точкѣ пересѣченія изопіесты и антитермы есть средняя геометрическая температуръ въ точкахъ пересѣченія этихъ кривыхъ съ произвольной изентропой.*

3. Мы можемъ теперь установить уравненія антитермъ для изометрическихъ процессовъ. Пріемомъ, сходнымъ съ вышеизложеннымъ, получимъ искомое уравненіе въ слѣдующихъ видахъ:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha-2} = 1$$

$$\frac{v}{v_0}\cdot\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha-2} = 1 \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{p}{p_0}\ \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\alpha-1} = 1$$

Соотношеніе между соотвѣтственной точкой и основной (v_0, p'_0) дается выраженіями:

$$p = p_0\left(2 - \frac{p'_0}{p_0}\right)^{\alpha-1}$$

$$v = v_0\frac{1}{\left(2 - \frac{p'_0}{p_0}\right)^{\alpha-2}} \qquad \text{(V)}$$

Уравненіе соотвѣтственной кривой:

$$2\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}} - \frac{p'_0 v_0}{pv} = 1$$

или (VI)

$$2\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}} - \frac{t'_0}{t_0} = 1.$$

Замѣтимъ, что

$$\alpha - 2 = \frac{2c_v}{R}.$$

4. Для воздуха $\alpha = 6{,}8807$; потому черезъ точку $p_0 = 1$, $v_0 = 1$, проходятъ слѣдующія кривыя:

изотерма............ $\log p = -\log v$
антитерма изопіесты . $\log p = -1{,}17 \log v$
антитерма изометры .. $\log p = -1{,}205 \log v$
изентропа .... $\log p = -1{,}41 \log v$.

5. Установимъ теперь общее уравненіе антитермы. Будемъ снабжать штрихами величины, относящіяся къ термѣ. Координаты пересѣченіи термы и ея антитермы суть p_0, v_0, t_0.

Мы имѣемъ для термы:

$$\delta Q' = c_v dt' + p'dv';$$

для соотвѣтственнаго элемента антитермы:

$$\delta Q = c_v dt + pdv.$$

По опредѣленію:

$$\delta Q' = \delta Q \;;\; dt' = -dt$$

и

$$dt = \frac{pdv + vdp}{R},$$

слѣдовательно:

$$\left(\frac{2c_v}{R} + 1\right) pdv + \frac{2c_v}{R} vdp = p'dv' \tag{1}$$

Соотношенія между p' и v' дается уравненіемъ термы.

Для соотвѣтственныхъ элементовъ

$$t = 2t_0 - t'$$

или, по закону Шарля и Бойля:

$$p = \frac{1}{v}\left[2t_0 R - p'v'\right]. \tag{2}$$

Это соотношеніе даетъ намъ возможность исключить изъ конечнаго результата перемѣнную v', такъ какъ произведеніе $p'v'$ есть функція одного v', по уравненію термы.

Исключая dp и p изъ (1) съ помощью (2), мы находимъ послѣ нѣкоторыхъ преобразованій дифференціяльное уравненіе антитермы:

$$[2t_0R - p'v']\frac{1}{v}\frac{dv}{dv'} = \frac{2c_v}{R}\frac{d(p'v')}{dv'} + p'$$

и интегрируя:

$$log\left\{ v.\left(2t_0R - p'v'\right)^{\frac{2C_v}{R}}\right\} - \int\frac{p'dv'}{2t_0R - p'v'} = const. \qquad (VII)$$

Входящій сюда интегралъ мы находимъ пользуясь уравненіемъ термы; затѣмъ, при помощи этого же уравненія и соотношенія (2), исключаемъ изъ (VII) величины p' и v' и получаемъ уравненіе антитермы.

Выраженіе (VII) можно представить еще въ видѣ:

$$log\left\{v^{\alpha-1}\,p^{\alpha-2}\right\} - \int\frac{p'dv'}{2p_0v_0 - p'v'} = const. \qquad (VIII)$$

Одесса
Ноябрь 1892 г.

Къ физикѣ системы, имѣющей перемѣнное движеніе.

Н. Любимова.

Различіе двухъ состояній, — покоя и движенія, ничѣмъ не обозначается въ тѣлѣ, если движеніе свершается равномѣрно и прямолинейно. Матерія сама по себѣ индифферентна къ покою и движенію. Матеріальная точка не носитъ въ себѣ причины измѣненія своего состоянія. Требуется дѣйствіе извнѣ, чтобы измѣненіе это послѣдовало и матеріальная точка отклонилась отъ прямолинейности пути или получила приращеніе скорости (положительное или отрицательное).

Абсолютнаго покоя мы не знаемъ въ природѣ. Всѣ матеріальныя точки природы находятся въ движеніи и всѣ физическія явленія суть измѣненія этихъ движеній. И притомъ именно *измѣненія*, такъ какъ движеніе само по себѣ физическаго признака не имѣетъ.

Сказанное объ одной матеріальной точкѣ примѣнимо къ каждой совокупности ихъ, которую можно разсматривать, какъ отдѣльное цѣлое, составляющее механическую систему. Общее всѣмъ этимъ точкамъ прямолинейное и равномѣрное движеніе ничѣмъ физическимъ себя не обнаруживаетъ. Тѣ же движенія въ системѣ, которыя происходятъ отъ взаимодѣйствія матеріальны хъточекъ, ее составляющихъ, происходятъ такъ, какъ если-

бы система была въ покоѣ. Безъ внѣшнихъ указаній, геометрически свидѣтельствующихъ о перемѣщеніи, разумное существо, заключенное въ системѣ, общее движеніе которой прямолинейно и равномѣрно, — какимъ-бы проницательнымъ умомъ ни обладало — не могло бы открыть признака этого общаго движенія системы, увлекающаго и его и все его окружающее въ системѣ. Такой законъ движенія, указанный Галилеемъ и со времени Ньютона именуемый вторымъ закономъ движенія, подтверждается наблюденіями въ кораблѣ, вагонѣ и иныхъ системахъ.

Не то бываетъ, если общее движеніе системы перемѣнное. Такое движеніе обнаруживаетъ себя физически. Въ такомъ случаѣ нельзя уже сказать, что взаимодѣйствія матеріальныхъ точекъ, составляющихъ систему, происходятъ такъ, какъ если бы система была въ покоѣ. Происходятъ явленія, заслуживающія особаго изученія въ отдѣльныхъ случаяхъ. Остановимся на явленіяхъ въ системѣ, подверженной дѣйствію тяжести. Разберемъ два случая. Во первыхъ, когда тяжелая система движется равномѣрно и прямолинейно, и во вторыхъ, когда такая система падаетъ или когда подымается вслѣдствіе верженія, находится слѣдовательно въ состояніи перемѣннаго движенія, происходящаго отъ дѣйствія тяжести.

Представимъ себѣ воздушный шаръ, подымающійся вертикально кверху или спускающійся книзу равномѣрнымъ движеніемъ. Явленія на немъ будутъ происходить такъ, какъ на движущемся кораблѣ или вообще въ системѣ, подчиненной второму закону движенія. Выроненный изъ рукъ сосудъ упадетъ на дно лодки, вода изъ опрокинутаго сосуда выльется, какъ это бываетъ при поверхности земли. Но представимъ себѣ иной случай. Пусть нѣкоторая система съ заключенными въ ней тѣлами свободно — и слѣдовательно ускорительно падаетъ внизъ или брошена вверхъ и подымается замедлительнымъ движеніемъ. Въ этомъ случаѣ явленія будутъ иными. Въ литературѣ всѣмъ извѣстенъ фантастическій разсказъ Жюля Верна о ядрѣ съ

наблюдателями, брошенномъ будто бы съ земли на луну. Но изъ сотни тысячъ читателей никто кромѣ неизвѣстнаго автора небольшой замѣтки въ Современной Лѣтописи «Московскихъ Вѣдомостей» стараго времени и затѣмъ меня—въ моемъ курсѣ Физики—не обратилъ вниманія на то, что интересное описаніе все основано на физической ошибкѣ. Жюль Вернъ описываетъ явленія въ ядрѣ во все время пути до нейтральной точки (гдѣ притяженіе земли сдѣлалось равнымъ притяженію луны) такъ, какъ явленія эти происходили бы въ ядрѣ, подымающемся подобно воздушному шару равномѣрно вверхъ. Какъ на поразительную особенность нейтральной точки указываетъ онъ на явленіе, удивившее наблюдателей: что всѣ тѣла внутри ядра потеряли свой вѣсъ и всякій предметъ, не падая, оставался въ воздухѣ тамъ, гдѣ былъ помѣщенъ. Въ моемъ курсѣ физики, въ числѣ предложенныхъ задачъ поставлено: «показать, что такое явленіе (потеря вѣса) должно было бы происходить не только въ этой нейтральной точкѣ, но и на всемъ протяженіи пути и что движеніе брошеннаго ядра нельзя сравнивать съ движеніемъ, напримѣръ, воздушнаго шара, поднимающагося вверхъ: каждая часть ядра летитъ не потому, что увлекается другими, а по силѣ верженія, съ такою же скоростію, какъ всѣ другія и не имѣетъ причины отъ нихъ отставать» *). Два, помѣщенныя рядомъ, тѣла не разстанутся между собою ни при паденіи, ни при верженіи и будутъ двигаться вмѣстѣ (сопротивленія воздуха не разсматриваемъ), не оказывая, очевидно, никакого дѣйствія одно на другое. Почему будутъ они давить во время движенія одно на другое, если помѣстить ихъ первоначально одно надъ другимъ, хотя бы въ прикосновеніи? Нижнее не препятствуетъ верхнему двигаться съ тою же скоростію, какъ движется само.

Для экспериментальнаго изученія явленій давленія въ свободно падающей системѣ, зимою прошлаго 1892 года мною

*) «Физика» проф. Любимова, изд. 1376 года, стр. 41 «репетиторіума».

былъ произведенъ рядъ опытовъ помощію приборовъ, за исполненіе которыхъ въ мастерской Ремесленнаго училища Цесаревича Николая въ Петербургѣ я долженъ принести благодарность учебному начальству училища *).

Опытъ I. Имѣетъ цѣлью обнаружить измѣненіе взаимодѣйствія тяжелыхъ тѣлъ, образующихъ изъ себя падающую систему. Паденіе производится на снарядѣ, представляющемъ собою родъ Атвудовой машины, аршинъ въ пять высоты (фиг. 1). Чтобы падающій снарядъ не ударялся въ землю, увлекаемая снарядомъ перекинутая чрезъ блокъ нить, послѣ нѣкоторой высоты паденія, начинаетъ увлекать за собою тяжелую цѣпь, замедляющую дальнѣйшее паденіе снаряда.

Падающій снарядъ состоитъ изъ металлическаго диска (фиг. 2) Q, на которомъ лежитъ металлическій цилиндръ P. Цилиндръ свободно ходитъ на аркообразномъ стержнѣ SS, къ которому прикрѣпляется нить переброшенная черезъ блокъ D. Цилиндръ отдѣленъ отъ диска спиралеобразною пружиною и прижимаетъ ее своимъ вѣсомъ. Когда снарядъ падаетъ, получая ускорительное движеніе, цилиндръ перестаетъ оказывать давленіе на дискъ. Пружина же сохраняетъ свое дѣйствіе. Разстояніе между дискомъ и цилиндромъ увеличивается: относительно диска цилиндръ подымается. Обнаружить это можно различными пріемами. На фигурѣ изображены два пріема: помощію пробочекъ и графическій.

Помѣстимъ надъ цилиндромъ пробочки t, t, съ легкимъ треніемъ могущія ходить по вѣтвямъ стержня S и S. Когда во время паденія цилиндръ P удалится отъ диска Q, онъ передвинетъ кверху пробочки t и t, которыя и окажутся при концѣ опыта въ положеніи t_1 и t_1.

Удаленіе цилиндра отъ диска во время паденія можно обнаружить также графическимъ пріемомъ. На верху арки стерж-

*) Чувствую себя особенно признательнымъ за помощь, оказанную мнѣ въ производствѣ опытовъ преподавателемъ физики въ училищѣ А. Н. Яковлевскимъ.

ня (фиг. 2) помѣщается дощечка T, которая во время паденія, при прохожденіи снаряда чрезъ кольцо C (фиг. 1), снимается этимъ кольцомъ. На дощечкѣ укрѣплена вертикальная пластинка M, покрытая копотью. Цилиндръ P имѣетъ пишущій стержень Z. Когда во время паденія цилиндръ удаляется отъ диска, стержень Z пишетъ на пластинкѣ черту вверхъ отъ своего первоначальнаго положенія. Въ моментъ, когда дощечка снимается, стержень идетъ книзу по той же приблизительно чертѣ. Въ концѣ опыта черта эта, насколько она находится выше первоначальнаго положенія пишущаго острія, свидѣтельствуетъ объ удаленіи цилиндра отъ диска.

Фиг. 6 изображаетъ пишущій приборъ въ нѣсколько иной формѣ. Пишущій стержень имѣетъ форму согнутаго рычажка, придерживаемаго легкою пружиною въ прикосновеніи съ цилиндромъ P, лежащемъ на дискѣ Q (въ изображаемомъ на фигурѣ снарядѣ стержень, проходящій чрезъ цилиндръ, не аркообразный, а прямой и пружина, находящаяся между цилиндромъ и дискомъ, настолько прижата вѣсомъ цилиндра, что дискъ находится съ нимъ въ прикосновеніи). Во время паденія, когда цилиндръ удаляется отъ диска, пишущее остріе чертитъ кривую линію (фиг. 7). Когда же чрезъ кольцо C (фиг. 1) дощечка снимается, остріе чертитъ внизъ вертикальную прямую линію. Кривая остается свидѣтельствомъ повышенія цилиндра надъ дискомъ во время паденія.

Когда я, во время пребыванія въ Одессѣ, въ маѣ текущаго 1893 года, сообщалъ въ мѣстномъ физико-математическомъ обществѣ о моихъ опытахъ, талантливый механикъ Новороссійскаго Университета І. А. Тимченко предложилъ и осуществилъ весьма остроумный способъ показать цѣлой аудиторіи, во время самаго паденія моего снаряда, удаленіе цилиндра отъ диска. Пріемъ изображенъ на фиг. 13 и 14. Снарядъ падаетъ на двухъ нитяхъ, перекинутыхъ черезъ двойной блокъ, укрѣпленный на верху вертикально поставленной доски (фиг. 11 и

12), доходившей до хоръ въ актовомъ залѣ Новороссійскаго Университета. Цилиндръ P соединяется помощію колѣнчатаго рычага RN и показателемъ Z изъ легкаго картона. Когда цилиндръ покоится на дискѣ, показатель Z, имѣющій форму стрѣлки, стоитъ вертикально. Когда цилиндръ удаляется отъ диска, плечо N поворачиваетъ валъ, несущій показатель Z и показатель этотъ принимаетъ горизонтальное положеніе, какъ на фиг. 14. Это случается во время самаго паденія и вся аудиторія видитъ, какъ во время паденія стрѣлка Z изъ вертикальной становится горизонтальной (фиг. 11).

Опытъ II. Если утрачивается давленіе верхняго тѣла на нижнее при паденіи, то не должно ли утрачиваться и гидростатическое давленіе верхнихъ слоевъ жидкой массы на нижнія? Отвѣтъ на этотъ вопросъ даетъ слѣдующій опытъ. Двухколѣнная трубка укрѣплена на доскѣ, вмѣстѣ съ которой можетъ падать. Доска держится на одной или двухъ нитяхъ, смотря по тому происходитъ-ли паденіе на аппаратѣ, изображенномъ на фиг. 1, или на двойномъ блокѣ фиг. 11. Двухколенная трубка (фиг. 3) заключаетъ въ себѣ, въ одномъ, закрытомъ колѣнѣ a, воздухъ, въ другомъ, — открытомъ и обращенномъ загнутымъ концемъ въ сосудъ b, — колонну ртути. Подъ давленіемъ колонны ртути воздухъ находится въ колѣнѣ a въ сжатомъ состояніи. Во время паденія всего снаряда, сжимающее воздухъ давленіе ртути прекращается, упругость же воздуха вслѣдствіе паденія измѣненія не претерпѣваетъ. Часть ртути выливается изъ открытаго колѣна въ сосудъ b. Фиг. 10 и 10* изображаютъ тотъ же снарядъ въ нѣсколько измѣненномъ видѣ. Снаряду фиг. 3 можно дать такое расположеніе, что сосудъ b будетъ снятъ во время паденія при прохожденіи чрезъ кольцо.

Опытъ III. Опытъ этотъ относится къ давленію жидкости на погруженное въ ней тѣло, по Архимедову закону. Законъ Архимеда утрачиваетъ свое значеніе при паденіи системы. Представимъ себѣ, что въ сосудъ съ водою A (фиг. 4)

погружена пробка P. Пружина F удерживаетъ ее въ водѣ вопреки давленію жидкости снизу вверхъ, повинуясь которому пробка всплыла бы на верхъ. Во время паденія сосуда съ пробкою, этого давленія снизу вверхъ нѣтъ и пробка опускается внизъ, какъ показано на фиг. 5.

Обнаружить движеніе пробки внизъ можно графически помощію прибора, изображеннаго на фиг. 8 и 9. Въ снарядѣ, изображенномъ на этихъ фигурахъ, пробка удерживается въ водѣ помощію улиткообразной пружинки, помѣщенной не подъ пробкой (какъ на схематическомъ изображеніи фиг. 4 и 5), а надъ нею.

Въ снарядѣ, изображенномъ на фиг. 15 и 16, движеніе пробки обнаруживается помощію указателя г. Тимченки. Пружина F помѣщена подъ пробкою.

На фиг. 17, 18 и 19 изображенъ снарядъ, сдѣланный г. Тимченко для оправданія начала, къ которому относится мой второй опытъ; прекращеніе гидростатическаго давленія слоевъ жидкости, верхнихъ на нижнія, во время ихъ паденія. Воздухъ въ каучуковомъ шарѣ K сжатъ давленіемъ воды сосуда A, когда сосудъ этотъ находится въ покоѣ. Сжатый воздухъ чрезъ стеклянную трубку S дѣйствуетъ на каучуковую обвязку Q (фиг. 19), къ которой прилегаетъ рычажекъ L, удерживающій показатель Z (фиг 17) въ вертикальномъ положеніи. Когда сосудъ падаетъ, давленіе жидкости на шаръ K утрачивается, обвязка Q менѣе нажимаетъ на рычажекъ и показатель повертывается горизонтально, какъ на фиг. 18.

Я имѣю въ виду продолжить опыты въ примѣненіи и къ нѣкоторымъ другимъ явленіямъ, измѣняющимся при перемѣнномъ движеніи системы, сравнительно съ тѣмъ какъ они происходятъ, когда система находится въ покоѣ или въ движеніи постоянномъ. Прибавлю, что явленія того же порядка могутъ быть наблюдаемы, въ извѣстной степени, не только при свободномъ паденіи системы, но и въ системѣ катящейся внизъ по наклонной

плоскости или качающейся. Опыты съ катящеюся по наклонной плоскости или качающеюся системою могутъ быть произведены тѣмъ съ большимъ удобствомъ, что наблюдатель самъ можетъ помѣститься въ скатывающейся или качающейся системѣ (катиться съ горы, качаться на качеляхъ) и слѣдить за явленіями. Нѣтъ особаго затрудненія устроить и свободно падающую систему съ помѣщеннымъ въ ней наблюдателемъ, озаботившись, чтобы падающая система (напримѣръ корзина на перекинутой чрезъ блокъ веревкѣ) достигала земли безъ толчка, съ утраченною уже скоростію.

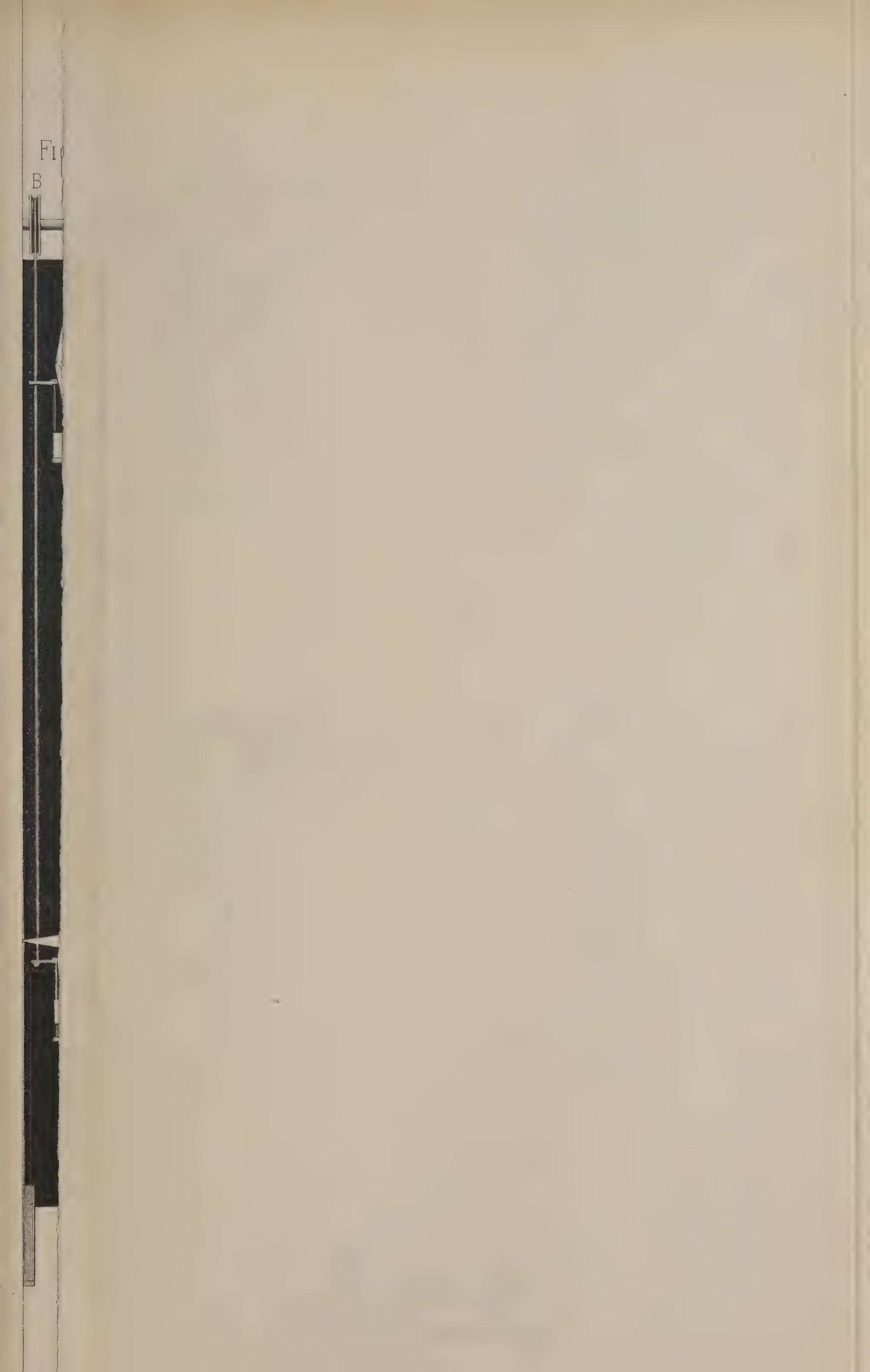
Область явленій, указываемая моими опытами, имѣетъ интересъ не только чисто физическій, но и физіологическій. Такъ какъ происходящія отъ тяжести давленія въ твердыхъ и жидкихъ частяхъ организма должны измѣняться, когда организмъ этотъ падаетъ, катится или качается, сравнительно съ тѣмъ, когда онъ находится въ покоѣ или движется равномѣрно, то физіологическія условія его должны вслѣдствіе того также претерпѣвать измѣненія. Въ этомъ происхожденіе ощущеній, испытываемыхъ человѣкомъ, когда онъ падаетъ съ высоты, катится ускоренно съ горы, качается на качеляхъ. Объясненіе физіологическихъ условій этого рода движеній организма заключается въ началахъ, для оправданія которыхъ произведены наши опыты.

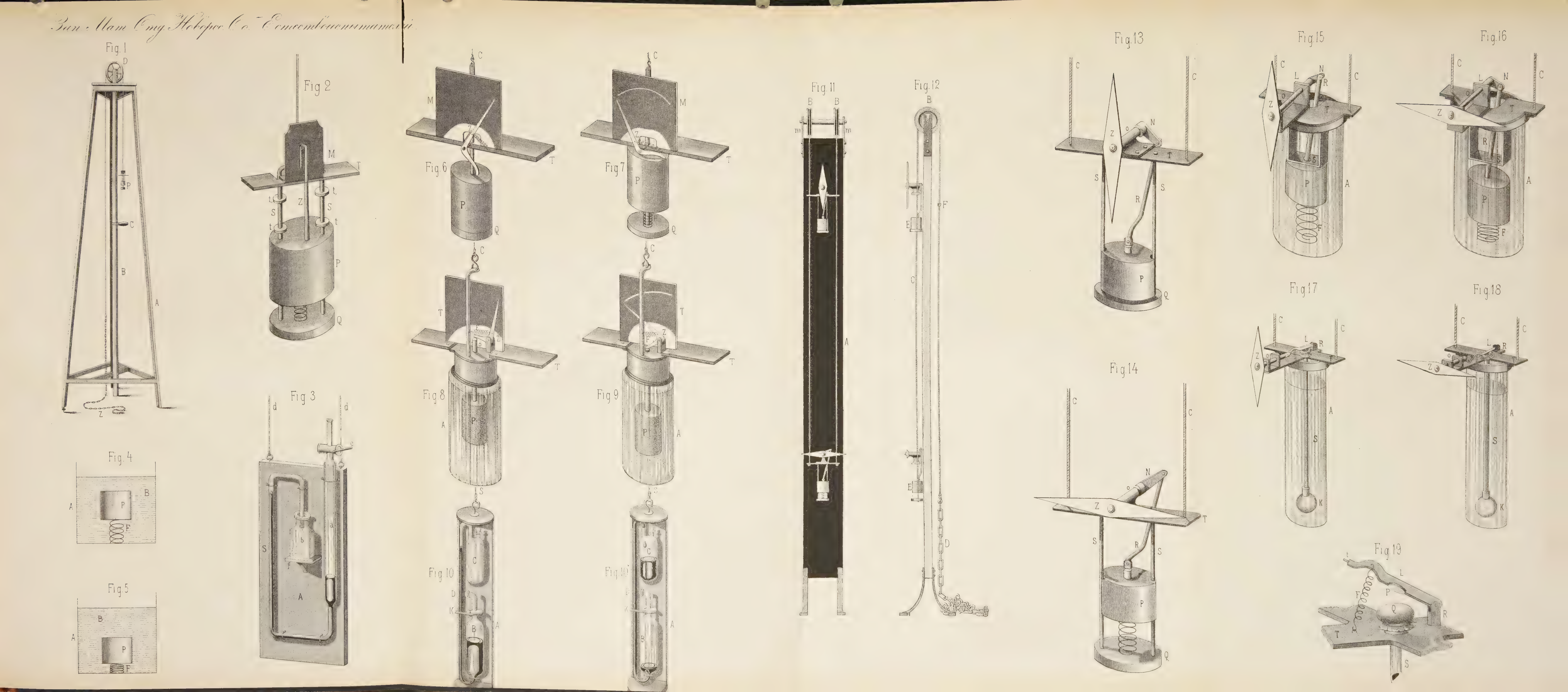
Физика перемѣннаго движенія системы имѣетъ, быть можетъ, и еще болѣе широкій интересъ. Геометрическое перемѣщеніе тѣла, имѣющаго постоянное движеніе ничѣмъ, какъ сказано, физически въ немъ не обнаруживается. Но если движеніе перемѣнное, то оно всегда обусловливается причинами (силами), имѣющими физическое дѣйствіе. Возможно, что дѣйствіе это всегда сложнѣе, чѣмъ одно сообщеніе ускоренія. Извѣстно, что въ то время, какъ разнообразныя физическія явленія – тепло, свѣтъ, магнетизмъ, электричество — взаимно преобразуются и переходятъ одно въ другое, тяжесть стоитъ изолированно.

Фарадей искалъ связи между паденіемъ тѣла и индуктивнымъ возбужденіемъ электрическихъ токовъ, но такой связи не обнаружилъ. Опыты дали отрицательный результатъ. Если, однако, тяготѣніе, какъ надо думать, имѣетъ физическую причину, а не есть простое свойство, не требующее механическаго объясненія, то трудно отказаться отъ мысли, что причина эта можетъ обнаружиться и не однимъ ускореніемъ. Потому, изученіе явленій, сопровождающихъ ускореніе падающаго тѣла, можетъ оказаться небезплоднымъ и по отношенію къ вопросу, занимавшему умъ великаго англійскаго физика.

Если пріобрѣтаемое падающимъ тѣломъ ускореніе есть слѣдствіе дѣйствія невѣсомой среды, среди которой помѣщены вѣсомыя частицы, то дѣйствіе это должно сопровождаться противодѣйствіемъ, испытываемымъ средою и можетъ быть обнаруживается въ ней какими-либо явленіями, способными подлежать наблюденію.

Физическое изученіе явленій паденія, а также явленій, на сколько они доступны наблюденію, взаимнаго притяженія массъ на землѣ по закону всеобщаго тяготѣнія, связано съ величайшимъ вопросомъ философіи природы: о дѣйствіяхъ на разстояніи.


B


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19

Опытъ изслѣдованія главнѣйшихъ явленій, наблюдаемыхъ у рѣкъ.

М. П. Рудскаго.

Essai sur les principaux phenomènes, observès chez les rivières.

par M. P. Rudski.

ВСТУПЛЕНІЕ.

Работы надъ регуляціей рѣкъ начались въ Италіи еще въ средніе вѣка, поэтому неудивительно, что въ эпоху возрожденія италіянцы обратили вниманіе на теорію движенія проточной воды. Уже знаменитый Ліонардо-да-Винчи дѣлалъ измѣренія скорости теченія и занимался нѣкоторыми вопросами гидродинамики. Гидродинамикой занимался тоже Галлилей, хотя самъ ничего спеціальнаго по этому вопросу не написалъ. Его ученикъ монахъ Кастелли [1]) уже зналъ, что, при установившемся движеніи воды въ каналахъ или трубахъ, среднія скорости обратно пропорціональны площадямъ поперечныхъ сѣченій. Но и онъ и другой ученикъ Галлилея Торичелли имѣли ложныя понятія о распредѣленіи скоростей. Они полагали, что скорости вблизи дна больше, чѣмъ у поверхности. — Что касается самаго закона распредѣленія скоростей, то каждый изъ нихъ предлагалъ другой законъ. Быть можетъ, что Кастелли и

---

[1]) Rühlmann. Hydromechanik. Hannover 1879 §§ 121, 133. Свѣдѣнія о томъ, что сдѣлано физиками и гидротехниками для теоріи рѣкъ, заимствованы по большей части изъ Рюльмана.

Торичелли работали въ направленіи, указанномъ Галлилеемъ, но, раздѣлялъ-ли онъ ихъ взглядъ на распредѣленіе скоростей, неизвѣстно.

Первая болѣе полная теорія рѣкъ принадлежитъ Гуліельмини [Guglielmini De natura de fiumi 1697]. Относительно распредѣленія скоростей онъ придерживался ложнаго взгляда своихъ предшественниковъ, но впрочемъ, насколько можно судить по выноскамъ у Досса [1]) и другихъ, онъ имѣлъ довольно правильныя понятія о многихъ явленіяхъ жизни рѣкъ. Гуліельмини занимался прочнымъ состояніемъ рѣкъ, наводненіями, отношеніями притоковъ къ главной рѣкѣ и т. д. Такимъ образомъ, Гуліельмини понималъ теорію рѣкъ довольно широко. Въ свое время труды Гуміельмини пользовались громадной извѣстностью.

Большой шагъ впередъ сдѣлала теорія рѣкъ, благодаря извѣстному физику Маріотту. Онъ первый замѣтилъ, что скорости не увеличиваются отъ поверхности ко дну, а напротивъ того у дна меньше, чѣмъ вблизи поверхности.—Кажется впрочемъ, что Пито (Pitot) почти одновременно сдѣлалъ подобный выводъ изъ своихъ наблюденій, произведенныхъ помощью изобрѣтеннаго имъ прибора, позволяющаго измѣрять скорость теченія на какой угодно глубинѣ независимо отъ скорости въ другихъ глубинахъ.

Въ XVIII столѣтіи измѣреніемъ скоростей, производствомъ разныхъ опытовъ и выводомъ эмпирическихъ законовъ изъ наблюденій и опытовъ занимаются италіянцы: Зендрини (Zendrini), Лекки (Lecchi), Микелотти (Michelotti) отецъ и сынъ, Лорнья (Lorgna) и др., голландецъ Брюнингсъ (Brünings) и другіе. Шези (Chézy) во Франціи въ 1775 году предлагаетъ первую для практическихъ цѣлей годную формулу для равномѣрнаго движенія въ каналахъ. Вскорѣ затѣмъ Дюбюа (Dubuat) издаетъ

---

[1]) Dausse Etudes d'hydraulique pratique. Mem. Sav. Etr. 20 томъ стр. 340.

свои знаменитыя «Основы» (Principes 1779 г.). Къ концу XVIII и началу XIX столѣтій относятся работы Бернарда, Фабра и Лекрэ [1]), специально посвященныя рѣкамъ.

Въ нашемъ столѣтіи число работъ, посвященныхъ теоріи движенія проточной воды, чрезвычайно увеличивается; особенно много сдѣлано по этому вопросу французами, причемъ усилія многихъ направлены на выведеніе эмпирическихъ формулъ. Обходя молчаніемъ множество работъ, скажемъ только, что, благодаря теоретическимъ работамъ Навье, Пуассона и Стокса, опытамъ Пуазейля и Дарси, было обнаружено существенное различіе между движеніемъ въ волосныхъ и въ большихъ трубахъ и каналахъ. Затѣмъ укажемъ еще на труды Понселе (Poncelet 1828 г.), Белянже (Bélanger 1828), Коріолиса (Coriolis 1836) и Вотье (Vauthier) надъ теоріей установившагося, неравномѣрнаго движенія проточной воды, потомъ на крайне важные опыты Дарси, продолженные послѣ его смерти Базэномъ, (1855 — 1860), относящіеся къ равномѣрному движенію, къ распредѣленію скоростей въ открытыхъ каналахъ и къ распространенію волнъ, на извѣстную работу Сюрелля (1840 г.) объ Альпійскихъ потокахъ, важную для морфологіи рѣчныхъ долинъ вообще и долинъ потоковъ спеціально, наконецъ на грандіозное изслѣдованіе нижняго теченія Миссисипи и ея притоковъ Гумфрейсомъ и Абботомъ. Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что результаты этого изслѣдованія были переоцѣнены. Многіе думали, что найдена новая, настоящая теорія рѣкъ. Между тѣмъ найдены были эмпирическія, впрочемъ нѣсколько натянутыя формулы, вкратцѣ резюмирующія наблюденія Гумфрейса и Аббота. Тѣмъ не менѣе нѣтъ сомнѣнія, что наше фактическое знаніе значи-

---

[1]) Сочиненія Бернарда и Фабра (Observations sur les rivières et les torrents. Paris 1797) были для меня недоступны. Насколько можно судить изъ словъ Досса (Dausse см. выше), только книга Фабра заслуживаетъ на нѣкоторое вниманіе. Книга Лекрэ (Le Creulx. Recherches sur la formation des rivières. Paris 1804) была для меня доступна, она представляетъ только историческій интересъ.

тельно увеличилось послѣ обнародованія труда только—что упомянутыхъ американскихъ моряковъ.

Въ началѣ семидесятыхъ годовъ Буссинекъ (Boussinesq 1872 г.) сдѣлалъ попытку создать цѣльную математическую теорію движенія проточной воды [Essai sur la theorie des eaux courantes]. Его огромный трудъ отличается высокими достоинствами и затрогиваетъ различные вопросы; тѣмъ не менѣе и послѣ него теорія движенія проточной воды далека еще отъ той степени развитія, которой достигли иныя физическія теоріи, н. п. теорія свѣта или звука.

Уже послѣ труда Буссинека появились нѣкоторыя работы В. Томсона [о волнахъ въ проточной водѣ], о которыхъ будетъ рѣчь дальше.

Кромѣ спеціальныхъ работъ по динамикѣ рѣкъ, гидротехники дали цѣлый рядъ монографій, между которыми наибольшей извѣстностью пользуется «La Seine» Бельграна (Belgrand), выяснившая, между прочимъ, связь между распредѣленіемъ проточныхъ водъ и формой долинъ съ одной и водопроницаемостью породъ съ другой стороны.

Физики и гидротехники, о которыхъ мы до сихъ поръ говорили, по большей части занимались движеніемъ воды, но мало интересовались отношеніемъ рѣкъ къ окружающимъ породамъ, размытію и т. д.; съ другой стороны геологи и географы сначала занимались результатами дѣятельности рѣкъ, именно вопросомъ образованія долинъ и только въ послѣднее время, по поводу вопроса образованію долинъ и размытія, стали заниматься теоріей рѣкъ.

Работы Риттера [1]) и Пэшеля [2]) о рѣкахъ хотя касаются многихъ вопросовъ, но поверхностно. Риттеръ говоритъ между прочимъ о томъ, что рѣки образуются изъ системъ озеръ, что можно раздѣлить всякое теченіе на верхнее (горное) среднее

---

[1]) C Ritter. Einleitung zur vergleichenden Geographie. Berlin 1852.

[2]) Peschel. Neue Probleme. Leipzig 1870 г. Гл. 10, 11, 12.

и нижнее, что направленіе теченія опредѣляется трещинами, что рѣка, образующаяся изъ соединенія двухъ рѣкъ, должна имѣть направленіе, среднее между направленіями образующихъ рѣкъ [параллелограммъ силъ] и т. д. Пэшель имѣетъ довольно ясное понятіе объ образованіи извилинъ, заимствованное, кажется, у Бэра; онъ высказываетъ нѣкоторыя довольно мѣткія замѣчанія объ отношеніи рѣкъ къ окружающимъ горнымъ системамъ, онъ говоритъ н. п., что рѣки удаляются отъ высокихъ горъ [1]), параллельныхъ ихъ теченію и т. д.

Большой интересъ возбудила работа Бэра (1860 г.) [2]) о вліяніи вращенія земли на перемѣщеніе русла рѣкъ: она вызвала рядъ статей, посвященныхъ этому вопросу (Цепрпица, Дункера и другихъ). Къ сожалѣнію, механизмъ явленія былъ плохо понятъ какъ Бэромъ, такъ и многими другими, работавшими послѣ него.

Въ нашемъ столѣтіи геологи стали много заниматься вопросомъ образованія долинъ путемъ размытія. По мѣрѣ того, какъ накоплялись факты и наблюденія, становилось все болѣе и болѣе яснымъ, что рѣчныя долины суть всюду и всегда произведенія дѣятельности самихъ рѣкъ [3]). Поэтому неудивительно, что геологи стали обращать больше вниманія на самыя рѣки. Починъ въ этомъ отношеніи сдѣлали англичане и американцы: Гринвудъ [4]) Жильбертъ (Geology of Henry Mountains) и Поуэль (Exploration of the Colorado river). Извѣстная книга Рихтгофена (Führer für Forschungsreisende), на которую будемъ очень часто ссылаться, содержитъ нетолько очень много цѣнныхъ наблюденій, но вмѣстѣ съ тѣмъ замѣчательные

[1]) Объ этомъ будетъ рѣчь въ текстѣ.

[2]) C. E. v. Baer. Ueber ein allgemeines Gesetz in der Gestaltung der Flussläufe. Bull Acad. S.-Pet. 1860 г.

[3]) Это мнѣніе было ясно высказано Гуттономъ еще въ прошломъ столѣтіи. Ср. Playfair. Illustrations of the Huttonian theory of the Earth фр. пер. Basset подъ загл. Explications de Playfair sur la theorie de la terre par Hutton. Paris 1815 г. стр. 272.

[4]) Ср. Oldham. On the law etc.. Quart. Journ. Geol. Soc. London. 1888 г. стр. 734.

общіе выводы, особенно по вопросу вліянія тектоники на характеръ теченія и на размытіе. Только тамъ, гдѣ авторъ вдается въ физическія теоріи, случаются промахи. О менѣе важныхъ работахъ, спеціально по теоріи рѣкъ, н. п. Филипсона, Пенка и др., будетъ рѣчь въ текстѣ.

Мы по необходимости должны ограничиться этими общими замѣчаніями, такъ какъ въ самомъ текстѣ намъ постоянно приходится указывать на ходъ развитія того или другого вопроса, а притомъ многія изъ исторически важныхъ сочиненій остались для автора недоступными.

Настоящая работа прежде всего имѣетъ цѣлью сопоставить извѣстное. Инымъ вопросамъ пришлось удѣлить много мѣста, но это объясняется тѣмъ, что въ трудахъ геологовъ и географовъ, гдѣ затрогиваются вопросы, имѣющіе связь съ физическими теоріями, встрѣчаются воззрѣнія, несогласныя съ принципами физики или-же отрицающія давно доказанныя, вполнѣ установленныя, истины.

Въ этой работѣ не затрогиваются вопросы о процессахъ, происходящихъ въ устьяхъ рѣкъ, не разсматривается ни вліяніе измѣненій климата, ни вліяніе геологическихъ переворотовъ, ни даже годичныя измѣненія состоянія рѣкъ. Первый изъ этихъ вопросовъ составляетъ самъ по себѣ отдѣльную тему, такъ какъ находится въ связи съ совершенно отдѣльнымъ вопросомъ морскихъ теченій, приливовъ и отливовъ и т. д. Второй и третій выходятъ за предѣлы программы этой работы, гдѣ имѣется въ виду больше всего сама рѣка и ея дѣятельность. Что касается послѣдняго вопроса, то онъ, собственно говоря, долженъ бы войти въ программу такой, какъ настоящая работы, но онъ требуетъ цѣлаго ряда предварительныхъ изслѣдованій по теоріи перемѣннаго состоянія рѣкъ, а потому мы были принуждены пока исключить его изъ спеціальнаго разсмотрѣнія, ограничиваясь только нѣкоторыми отдѣльными замѣчаніями, размѣщенными по разнымъ главамъ сообразно съ надобностью.

ГЛАВА I.

Движеніе жидкостей.

Движеніе всѣхъ жидкостей, сжимаемыхъ и несжимаемыхъ, представляетъ нѣкоторую замѣчательную особенность. При малыхъ относительныхъ скоростяхъ элементы жидкости движутся плавно, сопротивленіе уменьшается по мѣрѣ возвышенія температуры; [коэффиціентъ внутренняго тренія уменьшается по мѣрѣ возвышенія температуры], но, коль скоро относительныя скорости превзойдутъ извѣстные предѣлы, движеніе дѣлается безпорядочнымъ, сопротивленіе значительно увеличивается, причемъ почти не зависитъ отъ температуры.

Это явленіе давно извѣстно физикамъ и гидротехникамъ. Уже Навье имъ занимался. Понсэле называлъ безпорядочное движеніе «вихревымъ», [tourbillonnaire]. Гумфрейсъ и Абботъ называютъ его «пульсирующимъ». При вихревомъ, пульсирующемъ движеніи истинныя скорости теченія во всякомъ мѣстѣ постоянно и весьма скоро мѣняются въ ту и другую сторону нѣкоторой мѣстной средней скорости [1]). Такимъ образомъ, жидкость дѣйствительно какъ-бы пульсируетъ. Самопишущіе приборы для измѣренія скорости теченія хорошо показываютъ эти пульсаціи.

Названіе «вихревое движеніе» произошло отъ того, что дѣйствительно можно себѣ представить, что въ безпорядочно

---

[1]) Въ дальнѣйшемъ изложеніи подъ скоростями будемъ всегда понимать мѣстныя среднія скорости.

текущей жидкости постоянно возникаютъ и исчезаютъ мелкіе вихри. При прохожденіи каждаго вихря, направленіе и скорость движенія въ разсматриваемомъ мѣстѣ постоянно мѣняются. Слѣдуетъ помнить, что эти вихри не имѣютъ ничего общаго съ элементарными вихрями гидродинамики.

Нѣкоторые искали причину [1]) безпорядочнаго движенія въ шероховатости стѣнокъ каналовъ, рѣкъ, трубъ и т. д. Но опыты Рейнольдса [2]) показали, что, хотя сопротивленіе при безпорядочномъ движеніи увеличивается вмѣстѣ съ шероховатостью стѣнокъ, но, для перехода отъ плавнаго движенія къ безпорядочному и обратно, шероховатость стѣнъ имѣетъ второстепенное значеніе, и что есть нѣкоторыя предѣльныя относительныя скорости, при которыхъ этотъ переходъ непремѣнно совершается. Въ изслѣдованіи Рейнольдса, имѣющемъ преимущественно опытный характеръ, указаны предѣльныя среднія [3]) скорости теченія, при которыхъ совершается переходъ отъ плавнаго движенія къ безпорядочному но, очевидно, такимъ образомъ косвенно выражается зависимость отъ относительныхъ скоростей.—Дѣйствительно, положимъ, что относительныхъ скоростей нѣтъ.— Тогда жидкость движется какъ твердое тѣло и, несмотря на самую большую скорость, безпорядочное движеніе не можетъ имѣть мѣста.

Рейнольдсъ полагаетъ, что переходъ отъ плавнаго движенія къ безпорядочному совершается потому, что при извѣстныхъ скоростяхъ плавное движеніе дѣлается непрочнымъ, неустойчивымъ. Значитъ, устраняя всякія возмущенія, дѣлая стѣны абсолютно гладкими, можно было бы не допустить до перехода въ безпорядочное движеніе. Однако, причина явленія скрываетъ-

---

[1]) Ср. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. Mem. Sav. Etr. 23 томъ 51 стр.

[2]) Osborne Reynolds. On the law of resistance to the flow of water in parallel channels. Phil. Trans CLXXIV; II часть.

[3]) Т. е. среднія скорости всей воды, протекающей по трубамъ, съ которыми производились опыты.

ся глубже. Лордъ Кельвинъ (В. Томсонъ) и Бассе [1]) показали, что плавное движеніе устойчиво при какихъ угодно скоростяхъ, коль скоро допустимъ, что жидкости движутся по законамъ гидродинамики вязкихъ жидкостей. Слѣдовательно, явленіе выходитъ за предѣлы этихъ законовъ. Уже въ другомъ мѣстѣ я указалъ на то [2]), что при извѣстныхъ относительныхъ скоростяхъ жидкость постоянно разрывается. Съ ней происходитъ нѣчто подобное, какъ съ твердыми тѣлами, когда они ломаются отъ слишкомъ быстрой деформаціи, съ той разницею, что въ жидкости за разрывомъ сейчасъ слѣдуетъ соединеніе. Разрывъ происходитъ отъ того, что жидкость не успѣваетъ приноровить свое внутреннее строеніе къ слишкомъ быстрой деформаціи.

Если стать на эту точку зрѣнія, то станетъ вполнѣ яснымъ, почему шероховатость стѣнъ играетъ второстепенную роль при переходѣ къ безпорядочному движенію. Возмущенія хотя способствуютъ безпорядочному движенію, но не составляютъ его причины. Причина кроется въ физическихъ свойствахъ жидкостей, благодаря которымъ онѣ способны деформироваться вполнѣ непрерывно только до тѣхъ поръ, пока скорость, съ которой совершается деформація, не выходитъ за извѣстные предѣлы. Кажется, что высказанная мною мысль не вполнѣ нова для нѣкоторыхъ гидравликовъ. По крайней мѣрѣ убѣжденіе, что безпорядочное движеніе не подходитъ подъ законы обыкновенной гидродинамики, ясно видно у Буссинека [3]).

Предѣльныя среднія скорости теченія, при которыхъ совершается переходъ къ безпорядочному движенію, уменьшаются

---

[1]) Lord Kelvin. «On stability etc» и «Broad River etc» Phil. Magaz. 5 сер. 24 томъ. Basset. Stability of viscous liquids. Proc. Roy. Soc. LII стр. 273, ср. lord Rayleigh. «On the question etc». Phil. Magaz. 5 сер. 34 томъ.

[2]) M. P. Rudski. Note on the flow of water etc.... Phil. Magaz. 1893 г. 35 томъ 216 тетрадь (Майская).

[3]) Ср. Boussinesq loc. cit. стр. 6. Евневичъ Курсъ гидравлики. С.-Пет. 1891 г. стр. 91.

по мѣрѣ увеличенія размѣровъ сѣченія русла или трубы. Въ сущности плавное движеніе воды возможно только въ волосныхъ трубкахъ. Вслѣдствіе этого его законы приложимы только къ движеніямъ почвенной воды [1]).

Такъ какъ скорости увеличиваются вмѣстѣ съ уклономъ; то въ одной и той же трубкѣ при маломъ уклонѣ вода течетъ плавно, при большемъ безпорядочно. На основаніи добытыхъ опытнымъ путемъ формулъ Рейнольдса нетрудно убѣдиться, что еслибы при маломъ уклонѣ вода текла безпорядочно, то ея поступательныя скорости были бы меньше, а сопротивленіе больше, чѣмъ при томъ плавномъ движеніи, которое фактически происходитъ. Наоборотъ, оказывается, что еслибы, при большемъ уклонѣ, теченіе совершалось по законамъ плавнаго движенія, то поступательныя скорости были бы больше, а сопротивленіе меньше, чѣмъ при томъ безпорядочномъ движеніи, которое на самомъ дѣлѣ совершается. Такъ н. п., при помощи формулъ Рейнольдса нетрудно вычислить, что въ прямой трубѣ изъ жженной глины, съ круглымъ сѣченіемъ діаметра въ одинъ метръ при уклонѣ въ 0,0001, истинная средняя поступательная скорость воды равна всего 0,27 метрамъ въ секунду. При указанныхъ условіяхъ теченіе всегда безпорядочно, такъ какъ при данномъ діаметрѣ и уклонѣ скорости далеко больше предѣльныхъ скоростей, при которыхъ плавное движеніе еще возможно. Но если бы плавное движеніе было возможно, то при тѣхъ же самыхъ условіяхъ средняя скорость теченія равнялась бы 17 метрамъ въ секунду. Эти результаты получены въ предположеніи, что температура воды [2]) близка къ нулю, но, допуская, что температура равна примѣрно 15°С., мы бы получили среднюю скорость, почти вдвое большую.

---

[1]) Подробности этого вопроса читатель можетъ найти у Евневича loc. cit.

[2]) При безпорядочномъ движеніи поступательная скорость почти что не зависятъ отъ температуры.

Это обстоятельство имѣетъ громадное значеніе въ экономіи природы. Еслибы рѣки текли по законамъ плавнаго движенія, то и онѣ и весь «ликъ земли» имѣлибы другой видъ.

Благодаря безпорядочному движенію скорость рѣчного теченія не зависитъ отъ колебаній температуры; съ другой стороны оно поддерживаетъ одну и ту же температуру отъ дна до поверхности, ибо вода рѣки постоянно перемѣшивается. Частицы, бывшія на поверхности, устремляются ко дну и наоборотъ. Вслѣдствіе этого даже у самыхъ большихъ рѣкъ во всѣ времена года температура воды на разныхъ глубинахъ одна и таже [1]).

Постоянное перемѣшиваніе воды при безпорядочномъ движеніи имѣетъ громадное значеніе для перенесенія твердыхъ веществъ. Оно способствуетъ диффузіи химическихъ растворовъ. Механически взвѣшенный матеріалъ тоже быстро передается изъ периферическихъ струй воды къ центральнымъ. Такимъ образомъ вся масса воды насыщается мутью и разности въ насыщеніи периферическихъ и центральныхъ струекъ значительно уменьшаются. При совершенно плавномъ движеніи передача твердыхъ частей отъ стѣнъ къ центральной части теченія была-бы въ сущности невозможна. Наконецъ при безпорядочномъ движеніи подхватыванію твердыхъ частицъ со дна и береговъ [2]) способствуютъ мелькіе вихри, которыми оно сопровождается.

---

[1]) Ср. Жукъ. Темпер. воды въ Днѣпрѣ у Кіева въ 1890 г. Зап. Кіевск. Общ. Естеств. XII томъ, 2 вып. стр 325. Такъ н. п. зимою «пока рѣка покрыта льдомъ, температура всей массы воды колеблется между +0°,2 и 0°.4С. и не повышается пока ледъ не тронулся; наоборотъ независимо отъ обилія льда, движущагося по рѣкѣ, онъ не остановится и не покроетъ рѣки сплошной корой, пока температура всей массы воды не понизится до +0°,2 или +0°,3С.» loc. cit.

Въ Англіи за послѣдніе годы былъ сдѣланъ цѣлый рядъ наблюденій надъ темпер. рѣкъ, но наблюденія всюду производились на одной глубинѣ. Смотри Rep. on the seasonal variations of temp. Rep. Br. Ass. 1891 г. стр. 454.

[2]) Ср. Osborne Reynolds On certain laws of the river regime Rep. Br. Ass. за 1887 г. стр. 556.

Движенія атмосферы тоже совершаются по законамъ безпорядочнаго движенія, а потому скорости вѣтровъ никогда не достигаютъ тѣхъ предѣловъ, какіе [1]) возможны при плавномъ движеніи. Къ сожалѣнію, почти во всѣхъ трудахъ, посвященныхъ теоретической метеорологіи, за исключеніемъ трудовъ Марки [2]), предполагается, что сопротивленіе движенію воздуха пропорціонально первой степени отъ скорости. Этотъ законъ сопротивленія приложимъ къ плавному движенію, но не къ безпорядочному.

Чтобы дать понятіе о предѣльныхъ скоростяхъ, при которыхъ плавное движеніе воды еще возможно, скажемъ, что у трубъ Рейнольдса средняя критическая скорость, при которой плавное движеніе непремѣнно переходило въ вихревое, опредѣлялась формулой:

$$V = \frac{P}{BD}.$$

Въ этой формулѣ при единицахъ: метръ, секунда и градусы Цельзія [3]).

$B = 43,79$

$D =$ діаметру трубы

$$P = \frac{1}{1 + 0,0236T + 0,0022T^2}$$

$T =$ температурѣ въ градусахъ Цельзія.

$V =$ средней скорости.

Наоборотъ, безпорядочное движеніе непремѣнно переходило въ плавное при критической скорости въ шесть слишкомъ разъ меньшей, чѣмъ вышеуказанная.

---

[1]) Ср. мои статьи. О законѣ сопротивленія при воздушныхъ движеніяхъ. Метеор. Вѣстникъ 1893 года № 4. Bemerkung zu Dr. Köppen's Aufsatz etc. Annalen der Hydrographie. 1893 г. № 3.

[2]) Marchi. Saggio d'applicazione dei principii dell'idraulica etc... Ann. Uff. Centr. Meteor, Geodin. Parte I vol. VIII. 1886 года.

[3]) O. Reynolds. loc. cit.

Въ морскихъ теченіяхъ вода движется тоже безпорядочно, за исключеніемъ нѣкоторыхъ чрезвычайно медленныхъ подонныхъ теченій. Между тѣмъ вся теорія Цэпприца [1]) основана на уравненіяхъ плавнаго движенія. Поэтому въ этой теоріи вѣрна только основная мысль о вліяніи вѣтровъ, но всѣ численные результаты неточны. Кромѣ того замѣчу мимоходомъ, что разсматриваемый у Цэпприца случай двухъ параллельныхъ теченій, направленныхъ въ прямо противуположныя стороны и соприкасающихся между собою такъ, что въ нѣкоторой плоскости скорость движенія равна нулю, невозможенъ.

Этотъ видъ движенія неустойчивъ [2]), а потому при *малѣйшемъ* возмущеніи вода обоихъ теченій смѣшивается и послѣ самаго непродолжительнаго времени это движеніе совершенно разрушается. Неустойчивость движенія имѣетъ мѣсто и тогда, когда плоскость, раздѣляющая теченія вертикальна и тогда, когда она горизонтальна, но въ послѣднемъ случаѣ, если жидкость нижняго теченія плотнѣе, то вмѣсто смѣшенія жидкостей, неустойчивость даетъ поводъ къ образованію волнъ на границѣ между теченіями. Этимъ то объясняется образованіе волнъ на поверхности воды подъ вліяніемъ вѣтра [3]).

---

[1]) Изъ Krümmel'я Handbuch der Ozeanographie. II томъ стр. 351 вижу, что уже Г. Герцъ обратилъ было вниманіе на это обстоятельство.

[2]) Ср. Rayleigh. On the stability of certain fluid motions Proc. Math. Soc. XI томъ.

[3]) Ср. Helmholtz. Energie der Wogen und des Windes Sitzb. Akad. Wiss. Berlin 1890 г. стр. 853. Ср. тоже опыты Рейнольдса въ нѣсколько разъ приводимой работѣ въ Phil. Trans.

ГЛАВА II.

Распредѣленіе скоростей при равномѣрномъ установившемся движеніи.

Теорія движенія жидкостей представляетъ громаднѣйшія затрудненія. Уже Галлилей [1]) говорилъ, что гораздо легче разгадать законы движенія небесныхъ тѣлъ, столь отъ насъ удаленныхъ, чѣмъ законы движенія воды, протекающей въ нѣсколькихъ шагахъ отъ наблюдателя. Тоже самое говоритъ Герштнеръ [2]), знаменитый авторъ теоріи волнъ. Сэнъ-Венанъ называлъ гидродинамику «приводящей въ отчаяніе загадкой» [3]). Даже въ теоріи плавнаго движенія въ волосныхъ трубкахъ съ точностью рѣшены только нѣкоторыя болѣе простыя задачи. Къ этимъ «рѣшеннымъ» задачамъ принадлежитъ задача о равномѣрномъ установившемся [4]) движеніи воды въ прямой волосной трубкѣ, хотя впрочемъ полныя рѣшенія [5]), т. е. дающія ско-

---

[1]) Rühlmann. Hydromechanik. Hannover. 1879 г. стр. 338.

[2]) Gerstner Theorie der Wellen. переводъ Saint-Venant'a Ann. Ponts et Chaussées 1887 г. I полуг. стр. 36.

[3]) Boussinesq. loc. cit. стр. 36.

[4]) Движеніе называется равномѣрнымъ, когда скорости одинаковы во всѣхъ поперечныхъ сѣченіяхъ, установившимся, когда скорости не мѣняются съ теченіемъ времени.

[5]) Ср. н. п. Greenhill. On the flow of a viscous fluid in a pipe or channel. Proc. Lond. Math. Soc. XIII томъ.

Graetz. Ueber die Bewegung der Flüssigkeit in Röhren. Zeitschr. für Math. und Phys. 1880.

рости отдѣльныхъ струй, извѣстны только для нѣкоторыхъ формъ сѣченія трубки. За то положительно извѣстно, что между средней скоростью, уклономъ и такъ называемымъ гидравлическимъ радіусомъ существуетъ слѣдующая связь:

$$L^2 \sin i = cV \tag{1}$$

где V есть средняя поступательная скорость теченія
» i » уклонъ
» L » гидравлическій радіусъ т. е. отношеніе площади живого сѣченія къ смачиваемому периметру.
» c » нѣкоторая постоянная, зависящая отъ коэффиціента вязкости и отъ формы сѣченія.

Такъ какъ уклонъ i есть величина обыкновенно очень малая, то вмѣсто $\sin i$ пишутъ просто i.

Но формула: (1) годится только для волосныхъ трубокъ и каналовъ. Для сходнаго случая, когда въ большихъ трубахъ и каналахъ при безпорядочномъ движеніи мѣстныя среднія скорости равномѣрны и установившіяся, собственно говоря, нѣтъ вполнѣ надежной теоретической формулы [1]). Теоретическія формулы н. п. формулы Буссинека выведены при нѣкоторыхъ вѣроятныхъ, но недоказанныхъ предположеніяхъ. Однако въ виду того, что законы движенія проточной воды представляютъ громаднѣйшій практическій интересъ, существуетъ цѣлый рядъ эмпирическихъ формулъ, добытыхъ путемъ опытовъ и наблюденій. Приведемъ нѣкоторыя изъ этихъ формулъ, удержавъ прежнія знакоположенія и обозначивъ кромѣ того черезъ a, b, c . . . постоянныя, зависящія отъ формы сѣченія, его размѣровъ, отъ физическихъ свойствъ стѣнъ и опредѣляемыя каждый разъ изъ наблюденій.

---

[1]) Формулы Буссинека подходятъ подъ первый типъ (см. ниже). Другіе теоретики отдаютъ предпочтеніе формуламъ второго типа.

Большинство этихъ формулъ могутъ быть подведены подъ три типа: Первый типъ:

$$Li = bV^2 \tag{2}$$

какъ формулы Тадини, ($b = 0{,}0004$), Гангульс и Куттера [1]) и др.: Второй типъ:

$$Li = aV + bV^2 \tag{3}$$

какъ старыя формулы Прони, Эйтельвейна и др. [2]).

Третій типъ:

$$Li = b.V^n \tag{4}$$

гдѣ n есть число, близкое къ 2. Таковы н. п. формулы Шези, С. Венана и Рейнольдса.

Формулы Гумфрейса и Аббота, Гауклера, Борнемана, Гагена, Гардера и др. болѣе сложны и различаются и отъ вышеприведенныхъ и одна отъ другой. Очевидно, что ни одна изъ этихъ формулъ не имѣетъ общаго теоретическаго значенія [3]). Онѣ показываютъ, что связь между L, V, i по всей вѣроятности довольно сложная и во всякомъ случаѣ иная, чѣмъ выражаемая ур. (1), свойственнымъ плавному движенію.

Для того-же самаго равномѣрнаго, установившагося движенія въ безконечно широкомъ каналѣ теорія даетъ для распредѣленія скоростей въ зависимости отъ глубины законъ обыкновенной параболы. Другими словами, если станемъ разсматривать глубины какъ абсциссы, то скорости окажутся пропорціональны ординатамъ нѣкоторой обыкновенной параболы. Въ виду того, что ширина большихъ рѣкъ очень часто въ нѣсколько десятковъ разъ больше глубины, можно ожидать, что по крайней мырѣ въ серединѣ теченія большихъ рѣкъ, въ тѣхъ мѣ-

---

[1]) Kutter. Die Bewegung des Wassers. Berlin 1885 г. стр. 4.

[2]) Meissner. Hydraulik Jena 1878 г. I томъ § 132, 133.

[3]) Ср. Rühlmann. Hydromechanik, Hannover. 1879 г. стр. 408.

стахъ, гдѣ движеніе приблизительно равномѣрно и установившееся, истинное распредѣленіе мѣстныхъ скоростей должно подходить подъ теоретическій законъ. Опыты Гумфрейса и Аббота [1]) на Миссисипи и ея притокахъ, Гарляхера [2]) на Дунаѣ и Эльбѣ, Рингеля на Эльбѣ [3]), Наццани на Тибрѣ [4]), Вагнера [5]) на Рейнѣ и Везерѣ, точно также опыты другихъ гидрологовъ подтверждаютъ результатъ теоріи, но далеко не удовлетворительно. Иной разъ можно очень легко подвести наблюдаемыя скорости подъ другую кривую. Нѣкоторые гидрологи дѣйствительно предлагаютъ другія кривыя н. п. кубическую параболу и т. д. но совершенно напрасно. Дѣло въ томъ, что чаще всего скорости верхнихъ слоевъ довольно хорошо выражаются одной параболой, а скорости подонныхъ другой, обладающей большей кривизной. Другими словами, вблизи дна скорости меньше сравнительно съ тѣми, которыя можно было бы ожидать судя по распредѣленію скоростей въ верхнихъ слояхъ. Вагнеръ [6]) справедливо замѣчаетъ, что это результатъ большей затраты энергіи въ подонныхъ слояхъ. Дѣло въ томъ, что законъ обыкновенной параболы во всякомъ случаѣ приложимъ только къ равномѣрно нагруженной механически взвѣшеннымъ матеріяломъ водѣ. Между тѣмъ подонные слои всегда больше нагружены, чѣмъ верхніе, а потому здѣсь затрата энергіи на перенесеніе твердаго матеріяла больше.

Наконецъ слѣдуетъ помнить, что законъ обыкновенной параболы основанъ на предположеніяхъ вѣроятныхъ, но недо-

---

[1]) Meissner loc. cit. стр. 211.

[2]) Harlacher. Die Messungen an der Elbe und Donau. Leipzig. 1887..

[3]) Ringel. Mittheilungen ueber die an der Elbe ausgeführten Messungen. Civilingenieur. 1888 г. стр. 505.

[4]) Knoke. Beiträge zur Hydraulik in Italien, Zeitschr. deut. Ingenieure. 1883 г. стр. 809.

[5]) Wagner. Hydraulische Untersuchungen. Braunschweig 1881 г.

[6]) Wagner loc. cit. стр. 39.

казанныхъ [1]), что даже съ точки зрѣнія теоріи Буссинека онъ справедливъ только для безконечно широкаго канала. Такъ н. п. для каналовъ съ полукруглымъ сѣченіемъ Буссинекъ находитъ законъ кубичной параболы.

Упомянутыя выше гидрологическія наблюденія кромѣ того показываютъ, что распредѣленіе скоростей вообще крайне измѣнчиво въ зависимости отъ разныхъ факторовъ. Между этими факторами весьма важную роль играетъ вѣтеръ. Такъ н. п. у Миссисипи [2]) динамическая ось т. е. струя, обладающая наибольшей скоростью [3]) при тихой погодѣ находится на глубинѣ, равной 0,317 общей глубины, при вѣтрѣ, дующемъ вверхъ по теченію со скоростью 12 метровъ въ секунду динамическая ось оказалась на глубинѣ 0,56 общей глубины, значитъ, вѣтеръ задерживалъ верхніе слои, наконецъ при вѣтрѣ такой-же силы, дующемъ внизъ по теченію, динамическая ось оказалась на глубинѣ 0,08, значитъ, вѣтеръ способствовалъ движенію верхнихъ слоевъ. Вліяніе вѣтра болѣе замѣтно у большихъ рѣкъ, чѣмъ у малыхъ.

Среднее положеніе динамической оси различно у разныхъ рѣкъ и въ разныхъ участкахъ той-же самой рѣки. Положеніе ея несомнѣнно другое во время половодья, какъ во время межени. Вагнеръ находилъ динамическую ось въ разныхъ случаяхъ на разныхъ глубинахъ, начиная съ 0 до 0,28 общей глубины. У Тибра Наццани [4]) нашелъ динамиче-

---

[7]) Какъ мало можно полагаться на математическую теорію движенія проточной воды видно изъ слѣдующаго обстоятельства. Законъ распредѣленія скоростей въ круглыхъ трубахъ и открытыхъ круглыхъ каналахъ по математической теоріи одинъ и тотъ-же, между тѣмъ какъ это противорѣчитъ опытамъ. Въ трубахъ убываніе скорости отъ оси сѣченія къ периферіи оказывается значительно болѣе медленнымъ, чѣмъ въ открытыхъ каналахъ. Ср. Bazin. Recherches experimentales sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts. Mem. Sav. Etr. XIX томъ стр. 27.

[1]) Meissner loc. cit.

[2]) Динамическая ось соотвѣтствуетъ вершинѣ кривой скоростей.

[3]) loc. cit.

[4]) Knoke loc. cit.

скую ось на разстояніи отъ поверхности нѣсколько меньшемъ, чѣмъ одна треть глубины. Гарляхеръ [1]) и Рингель [2]) нашли у Эльбы наибольшую скорость у самой поверхности. Къ сожалѣнію сравнительныхъ измѣреній, произведенныхъ на одной и той же рѣкѣ, въ томъ же мѣстѣ, но въ различныя времена года при различномъ состояніи рѣки имѣется черезчуръ мало. На основаніи опытовъ Дарси и своихъ собственныхъ, произведенныхъ въ искусственныхъ каналахъ, Базэнъ [3]) пришелъ къ заключенію, что сопротивленіе *спокойнаго* воздуха въ сравненіи съ сопротивленіемъ стѣнъ русла совсѣмъ незначительно, такъ что, если бы положеніе динамической оси зависѣло единственно отъ сопротивленія воздуха, то она всегда находилась-бы вблизи поверхности.

Вмѣстѣ съ тѣмъ Базэнъ убѣдился [4]), что динамическая ось находится тѣмъ дальше отъ поверхности, чѣмъ отношеніе глубины къ ширинѣ больше и чѣмъ скорость движенія меньше. Въ связи съ послѣднимъ обстоятельствомъ находится и тотъ подмѣченный Базэномъ [5]) фактъ, что въ каналахъ одной и той-же величины, съ однимъ и тѣмъ-же уклономъ динамическая ось находится тѣмъ глубже, чѣмъ стѣны болѣе шероховаты.

Базэнъ думаетъ, что причину этого явленія слѣдуетъ искать въ особенно сильной безпорядочности движенія верхнихъ слоевъ воды. «Когда вода течетъ въ трубѣ» говоритъ онъ [6]) «то сопротивленіе стѣнъ вызываетъ нѣкоторую солидарность между разными частями теченія и мѣшаетъ сильнымъ вихревымъ движеніямъ, замѣчаемымъ у поверхности. При теченіи въ открытомъ каналѣ, благодаря отсутствію сопротивленія во верхней поверхности, благодаря несимметричности распредѣленія

---

[1]) loc. cit.
[2]) loc. cit.
[3]) loc. cit. стр. 162.
[4]) loc. cit. стр. 238.
[5]) loc. cit. стр. 223.
[6]) loc. cit. стр. 180.

скоростей [1]), въ верхнихъ слояхъ получаются особенно благопріятныя условія для безпорядочныхъ вихревыхъ движеній, вслѣдствіе чего (поступательная) скорость здѣсь уменьшается».

Въ предшествующей главѣ мы указывали на то, что движеніе проточной воды безпорядочно во всей ея массѣ. Отмѣтимъ теперь, что во верхнихъ слояхъ при мало-мальски быстромъ движеніи эта безпорядочность видна на глазъ, какъ это можно видѣть, слѣдя н. п. за колебаніями плавающихъ сигнальныхъ знаковъ и другихъ предметовъ.

Безпорядочность движенія зависитъ нетолько отъ отсутствія сдерживающаго сопротивленія, но также отъ быстроты теченія, доходящей у горныхъ потоковъ до того, что вся масса воды клокочетъ. Слѣдовательно у быстрой рѣки движеніе всюду весьма безпорядочно и нѣтъ особенно большого различія между поверхностными слоями и, скажемъ, подонными Поэтому положеніе струи, обладающей наибольшей скоростью, регулируется вліяніемъ сопротивленія стѣнъ. Она находится въ наиболѣе удаленномъ отъ нихъ мѣстѣ, т. е. поближе къ поверхности въ центрѣ поперечнаго сѣченія русла. Между тѣмъ при медленномъ теченіи движеніе въ остальныхъ частяхъ канала нестоль безпорядочно какъ вблизи поверхности; а потому безпорядочность движенія верхнихъ слоевъ обнаруживается какъ имѣющій большое значеніе факторъ и, уменьшая скорость верхнихъ слоевъ, понижаетъ положеніе динамической оси.

Чѣмъ глубина при той-же самой ширинѣ больше, тѣмъ ниже опускается динамическая ось. Въ иныхъ случаяхъ наибольшая скорость находится на глубинѣ равной $^2/_5$ общей глубины. Мнѣ кажется, что это явленіе обусловливается большей устойчивостью теченія, характеризуемаго глубокимъ положеніемъ динамической оси. Вообще для движеній жидкостей вопросъ

---

[1]) Подразумѣвается симметрія между верхней и нижней частью теченія.

[2]) Мы говоримъ для простоты о прямомъ каналѣ.

устойчивости, какъ это замѣчаетъ Буссинекъ [1]), имѣетъ большое значеніе. Однако здѣсь мы довольствуемся тѣмъ, что констатируемъ фактъ, не вдаваясь въ детальное обсужденіе этого вопроса, такъ какъ это могло бы насъ завлечь слишкомъ далеко.

Мы выше упомянули о томъ, что у Миссисипи динамическая ось находится глубоко. Это хорошо согласуется съ результатами опытовъ Базэна. Миссисипи рѣка глубокая [говоримъ о ея нижнемъ теченіи] до 120 футовъ и болѣе, и сравнительно узкая, при томъ ея теченіе довольно медленно: 1,25—1,50 метровъ въ секунду.

Изъ сказаннаго видно, что нѣтъ и рѣчи о какомъ нибудь постоянномъ простомъ законѣ распредѣленія скоростей въ вертикальномъ направленіи. Если къ тому прибавимъ вліяніе неправильностей въ формѣ дна, кривизны русла и т. д. то увидимъ, что распредѣленіе скоростей всегда крайне разнообразно. Жаль только, что вліяніе различныхъ факторовъ на распредѣленіе скоростей мало извѣстно. Гидротехники чаще всего стремятся именно къ выводу эмпирической средней формулы, а потому нетолько не стараются обнаружить разныя уклоненія отъ средняго типа, но скорѣе отодвигаютъ ихъ на задній планъ. Тоже самое разнообразіе существуетъ и въ другихъ отношеніяхъ. Такъ н. п. отношеніе наибольшей скорости къ средней измѣняется въ предѣлахъ отъ 2 для каналовъ, которыхъ стѣны сильно шероховаты, до 1,18 для гладкихъ стѣнъ [2]). Скорости у дна и боковыхъ стѣнъ русла различны. Наибольшія бываютъ у дна на стрежени т. е. подъ динамической осью, наименьшія, иногда нуль, а вслучаѣ образованія водоворотовъ даже отрицательныя, бываютъ у береговъ вблизи поверхности.

---

[1]) loc. cit. стр. 120.

[2]) Bazin. loc. cit. стр. 151. Это зависитъ нетолько отъ шероховатости, но тоже отъ самаго матеріала, изъ котораго состоятъ стѣны. Вода не скользитъ по поверхности тѣхъ тѣлъ, которыя смачиваются водою. Ср. Helmholtz u. Piotrowski. Reibung der Flüssigkeiten. Helmholtz Wiss. Abh. I томъ Leipzig 1882 г. стр. 218.

Разумѣется, когда динамическая ось рѣки подходитъ къ одному изъ береговъ, то скорости у этого берега значительны, за то у противуположнаго тѣмъ меньше. Никакихъ постоянныхъ отношеній конечно нѣтъ. Можно сказать только то, что при равенствѣ прочихъ условій абсолютныя разности между наибольшей и наименьшей скоростью теченія тѣмъ больше, чѣмъ рѣка больше.

Иные полагаютъ, что скорость у дна равна двумъ пятымъ средней скорости. Во всякомъ случаѣ это правило имѣетъ тоже только чисто относительное значеніе. Извѣстно только, что, чѣмъ рѣка быстрѣе, тѣмъ «ceteris paribus» подонныя скорости больше.

Наконецъ, чтобы дать понятіе о томъ, какъ различны бываютъ причины, вліяющія на измѣненіе скорости, приведемъ слѣдующій примѣръ. Въ одномъ старомъ каналѣ, котораго стѣны были облицеваны камнемъ, Базэнъ велѣлъ соскоблить тонкій слой мха, покрывавшаго, впрочемъ далеко не всюду, поверхность камней. Оказалось, что вода сейчасъ стала стекать гораздо [почти въ полтора раза] быстрѣе.

Довольно распространено мнѣніе, что теоретическое распредѣленіе скоростей въ паралельныхъ внѣшней поверхности плоскостяхъ тоже подчиняется закону обыкновенной параболы. Даже въ теоріи этотъ законъ справедливъ только для прямого канала безконечной глубины, конечной ширины, огражденнаго вертикальными стѣнками. Онъ вовсе не приложимъ къ рѣкамъ, у которыхъ ширина всегда въ нѣсколько разъ больше глубины. Какъ и слѣдуетъ ожидать, наблюдаемое у рѣкъ распредѣленіе скоростей во внѣшней и въ параллельныхъ внѣшней плоскостяхъ представляетъ только далекое сходство съ параболическимъ распредѣленіемъ. Обыкновенно это распредѣленіе представляетъ много мѣстныхъ аномалій, находящихся въ зависимости отъ мѣстныхъ неправильностей въ формѣ дна и береговъ.

Такимъ образомъ мы видимъ, что даже теорія равномѣрнаго установившагося движенія проточной воды вообще неудовлетворительна. Теорія неравномѣрнаго движенія находится въ нелучшемъ, а теорія перемѣннаго движенія пожалуй въ еще худшемъ состояніи.

ГЛАВА III.

Потоки и рѣки.

Дѣленіе теченія на верхнее быстрое, горное, нижнее медленное, равнинное и среднее переходное, хотя имѣетъ за собою авторитетъ Риттера, удобно только въ чисто морфологическомъ отношеніи. Если станемъ н. п. съ понятіемъ верхняго теченія связывать понятіе большой скорости, то найдемъ столько исключеній, что само опредѣленіе окажется негоднымъ.

Въ виду того, что скорость есть самый важный признакъ въ характерѣ рѣки, наиболѣе важными слѣдуетъ считать дѣленія, основанныя на этомъ признакѣ.

Газе [1]) предлагаетъ дѣлить теченія на горныя. и равнинныя, понимая подъ первыми быстрыя, подъ другими медленныя теченія. Но вмѣсто дѣленія Газе гораздо удобнѣе ввести динамическое дѣленіе С. Венана на потоки (torrents) и рѣки (rivières). Опыты, наблюденія и теорія [2]) согласны въ томъ, что существуетъ коренное различіе въ родѣ движенія проточной воды, смотря потому будетъ-ли:

---

[1]) Haase Flüsse und Flusslaüfe Peterm. Mith. 1891 г. стр. 49.

[2]) W. Thomson. On the solitary Waves in flowing water Phil. Magaz. 5 сер. 22 и 23 томъ.

Boussinesq. loc. cit. § XVI и др.

$$V^2 < agL \quad (1)$$

или:

$$V^2 > agL$$

причемъ, какъ прежде V обозначаетъ среднюю скорость,
» » » L » гидравлическій радіусъ:
» » » g » ускореніе силою тяжести (9,8 метр. въ сек.).
» » » a » нѣкоторый множитель, нѣсколько большій чѣмъ единица и зависящій отъ формы сѣченія и отъ свойствъ породъ, изъ которыхъ состоятъ стѣны русла [1]).

Тѣ теченія, для которыхъ имѣетъ мѣсто первое неравенство относятся къ типу рѣкъ, тѣ, для которыхъ имѣетъ мѣсто второе неравенство, принадлежатъ къ типу потоковъ.

Указанное динамическое различіе находится въ тѣсной связи съ законами распространенія волнъ, $\sqrt{gL}$ есть та скорость, съ которой длинныя волны распространяются въ водѣ, глубина которой равна L. Вслѣдствіе этого всякія возмущенія у рѣкъ сообщаются въ тоже время и вверхъ и внизъ по теченію, у потоковъ только внизъ [2]), вслѣдствіе чего явленія, производимыя реакціей морскихъ приливовъ и отливовъ на теченіе рѣкъ, какъ н. п. маскарэ, поророка и т. д. возможны только у рѣкъ, но отнюдь не у потоковъ.

При проходѣ черезъ преграды и при низверженіи скорость потока весьма быстро мѣняется и вообще явленія, происходящія въ верхнемъ теченіи не зависятъ отъ того, что происходитъ на нижнемъ. Не то въ рѣкахъ. Передъ преградами ихъ скорость медленно и постепенно убываетъ, а глубина уве-

---

[1]) Буссинекъ полагаетъ, что при уклонѣ большемъ чѣмъ 0,0039 теченіе имѣетъ почти всегда харакеръ потока, при меньшемъ чѣмъ 0,0036 теченіе имѣетъ непремѣнно характеръ рѣки. Опыты Базэна (loc. cit. стр. 34) доказываютъ что, смотря по формѣ и величинѣ сѣченія, эти предѣлы значительно шире т. е. напримѣръ при весьма широкомъ сѣченіи теченіе можетъ имѣть характеръ рѣки при большемъ, чѣмъ 0,0039 уклонѣ.

[2]) Это провѣрено непосредственными опытами Базэна (loc. cit. стр. 34).

личивается, передъ водопадами и стремнинами скорость постепенно увеличивается, а глубина убываетъ. Уклонъ поверхности у рѣкъ всегда измѣняется постепенно, убывая передъ преградою, увеличиваясь передъ водопадомъ или стремниною. Съ другой стороны надъ буграми и вообще надъ возвышенностями дна поверхность воды въ рѣкѣ нѣсколько понижается, надъ ямами нѣсколько возвышается, у потоковъ наоборотъ.

Движеніе проточной воды въ потокахъ представляетъ нѣкоторое сходство съ движеніемъ твердыхъ тѣлъ. Вода стремится по своему пути независимо отъ того, что происходитъ впереди. Поэтому повороты теченія остаются рѣзкими, кромѣ того на поворотахъ, вода, ударяясь въ преграду, заставляющую ее измѣнить направленіе, долбитъ въ ней яму. Подобныя ямы образуются на днѣ передъ выходами твердыхъ породъ, пересѣкающими теченіе особенно, если пласты наклонены противъ теченія [1]). Во всѣхъ такихъ особенныхъ мѣстахъ образуются вихри, водовороты, движеніе весьма бурно. Вслѣдствіе этого русло потоковъ неправильно, очертанія его рѣзки, нѣтъ мягкихъ округленныхъ контуровъ.

Напротивъ того, въ рѣкахъ движеніе въ любомъ поперечномъ сѣченіи регулируется движеніемъ въ слѣдующихъ внизъ по теченію сѣченіяхъ, всякое отклоненіе или измѣненіе теченія впереди отражается на всемъ позади находящемся участкѣ. Оттого-то контуры теченія рѣкъ, особенно тихихъ болѣе округлены. На днѣ рѣкъ тоже образуются ямы особенно тамъ, гдѣ вода приходитъ во вращательное движеніе, есть тоже разныя неправильности въ конфигураціи дна, но онѣ не доходятъ до тѣхъ размѣровъ, что у потоковъ.

Когда потокъ вслѣдствіе уменьшенія уклона переходитъ въ состояніе рѣки, то переходъ всегда сопровождается бурнымъ движеніемъ и образованіемъ водоворотовъ. Кромѣ того вслѣдствіе самаго измѣненія уклона вода потока ударяется о

[1]) Richthofen. Führer etc... стр. 169.

дно. Вслѣдствіе этого особенно глубокія и большія ямы находятся у мѣстъ перехода. Очень часто измѣненія уклона столь часты и рѣзки, что на коротенькомъ промежуткѣ, гдѣ уклонъ меньше, потокъ не успѣваетъ перейти въ болѣе правильное рѣчное движеніе. Тогда потокъ состоитъ изъ участковъ со стремительнымъ теченіемъ, прерываемыхъ коротенькими участками, гдѣ вода кружится надъ ямой и переливается черезъ край ея, чтобы погнаться по новому участку стремительнаго движенія.

Весьма характеристической чертой у горныхъ потоковъ является внезапность ихъ разливовъ. Эта внезапность есть съ одной стороны результатъ главнаго свойства потоковъ, большого уклона, съ другой результатъ внѣшнихъ условій, именно того, что ихъ бассейны не велики, а ливни въ горахъ болѣе обильны, чѣмъ на равнинахъ. Поэтому потокъ иногда въ продолженіе нѣсколькихъ недѣль не получаетъ ни капли дождевой воды, за то сильный ливень, выпавшій въ его бассейнѣ, сразу доставляетъ огромное количество воды. На крутыхъ скатахъ только малая часть этой воды проникаетъ въ почву, остальная поспѣшно устремляется въ потокъ.

Долину горнаго потока можно всегда раздѣлить на двѣ части, на бассейнъ питанія (bassin de réception), находящійся въ горахъ, въ которомъ мелкіе ручьи соединяются въ болѣе крупный потокъ, и на конусъ отложенія (cône de déjection), находящійся уже въ долинѣ той рѣки, въ которую впадаетъ потокъ. Третья часть, каналъ истеченія (canal d'écoulement)[1]) обыкновенно ущелье, соединяющее бассейнъ питанія съ областью отложенія, не столь существенна. Она очень часто низводится до совсѣмъ ничтожныхъ размѣровъ.

Воронкообразная форма, свойственная бассейну питанія горныхъ потоковъ, не совсѣмъ еще выяснена. Нѣкоторые авторы н. п. Лаппаранъ [2]) полагаютъ, что образованію этой специальной формы

---

[1]) Какъ извѣстно, эта классификація установлена Сюреллемъ.
[2]) Lapparent, Traité de Geologie Paris 1883 стр. 186.

способствовали какія-то другія силы кромѣ размытія проточной водою. Но, если вспомнимъ, что такъ называемыя кальдеры (calderas) т. е. бассейны питанія потоковъ, стекающихъ по склонамъ вулканическихъ конусовъ, имѣютъ тоже воронкообразную форму, то прійдемъ къ заключенію, что въ образованіи воронокъ можно допустить только три фактора: концентрацію ручьевъ въ одно мѣсто вслѣдствіе натуральнаго распредѣленія склоновъ, осыпи и содѣйствіе подземнаго размытія. На это послѣднее обстоятельство указываетъ Рихтгофенъ [1]).

ГЛАВА IV.

Энергія рѣкъ.

Всякая капля рѣчной воды обладаетъ нѣкоторой потенціальной энергіей, равной произведенію ея вѣса на высоту центра тяжести надъ уровнемъ моря и кинетической энергіей, равной произведенію ея массы на половину квадрата скорости. Энергія рѣки состоитъ нетолько изъ энергіи всей ея воды, но также изъ потенціальной и кинетической энергіи всѣхъ движущихся твердыхъ частицъ. Поэтому, если будемъ разсматривать двѣ совершенно одинаковыя рѣки съ русломъ одной формы и тѣхъ же самыхъ размѣровъ, съ равными и одинаковыми поперечными сѣченіями, съ одинаковыми уклонами, но предположимъ, что въ одной изъ нихъ течетъ чистая вода, въ другой вода, несущая гальку, песокъ и т. д.; то въ виду того, что вѣсъ этихъ тѣлъ [приблизительно въ $2-2^1/_2$ раза] больше, чѣмъ вѣсъ воды, потенціальная энергія второй рѣки будетъ несомнѣнно больше.

---

[1]) Führer etc. стр. 60.

Съ другой стороны кинетическая энергія второй рѣки будетъ меньше. Дѣйствительно, песокъ, галька могутъ катиться подъ вліяніемъ одной лишь силы тяжести только по склонамъ, далеко превышающимъ уклоны рѣчнаго дна, а потому ихъ кинетическая энергія почти всецѣло заимствуется у воды. Между тѣмъ треніе гальки, песку и вообще твердыхъ частицъ между собою и о дно русла поглощаетъ гораздо большія количества энергіи, чѣмъ треніе воды. Кромѣ того, такъ какъ кинетическая энергія равна произведенію половины квадрата скорости на массу, а масса рѣки, несущей гальку, несомнѣнно больше, то скорости теченія несомнѣнно меньше, чѣмъ у рѣки, несущей чистую воду. Во второй главѣ мы указывали на нѣкоторые факты, вполнѣ подтверждающіе сказанное и свидѣтельствующіе о томъ, что наиболѣе нагруженныя твердыми веществами струи воды движутся особенно медленно, причемъ эта медленность не можетъ быть объяснена однимъ треніемъ о дно.

Но, если въ свою очередь предложимъ вопросъ, которая изъ двухъ рѣкъ больше размываетъ, то окажется, что, не смотря на меньшую скорость, на меньшую кинетическую энергію, больше размываетъ рѣка, несущая гальку и песокъ, особенно если русло проложено въ твердыхъ породахъ. Даже весьма быстрая, но чистая или содержащая только тонкую мутъ вода производитъ незначительное дѣйствіе на твердыя породы. Галька, а еще больше песокъ чрезвычайно усиливаютъ размытіе, царапая и истирая самые твердые камни. Песокъ состоитъ изъ угловатыхъ зеренъ кварца, онъ тверже всѣхъ остальныхъ породъ, встрѣчающихся какъ составная часть стѣнъ дна. Известковыя породы особенно плохо противустоятъ дѣйствію песка.

Протекая отъ верховьевъ къ устью, рѣчная вода растрачиваетъ свою потенціальную энергію. Обыкновенно за исключеніемъ небольшихъ участковъ вблизи источниковъ, скорость теченія нетолько не увеличивается, но даже замедляется. Слѣдовательно на пути къ морю совершается растрата не только

потенціальной, но даже отчасти кинетической энергіи, имѣвшейся на верхнемъ теченіи главной рѣки и ея притоковъ. Нѣкоторая доля энергіи, присущей рѣкѣ, передается морю вмѣстѣ съ рѣчной водою. Значительная доля энергія растрачивается на треніе, сопровождающее поступательное и вихревое движеніе воды. Затѣмъ много энергіи затрачивается на размытіе, т. е. на отдѣленіе твердыхъ частицъ отъ дна, — наконецъ на размельченіе ихъ.

На отдѣленіе отъ дна нужна всегда работа т. е. затрата энергіи тѣмъ большая, чѣмъ сильнѣе прикрѣплена ко дну данная твердая частица. Затѣмъ нужна затрата энергіи для того, чтобы сообщить твердымъ частицамъ тѣ скорости, которыми онѣ обладаютъ и на преодолѣніе всѣхъ тѣхъ треній, которыми сопровождается ихъ движеніе въ водѣ или по дну. Вычислить эту работу для каждой отдѣльной частицы совершенно невозможно, ибо она зависитъ отъ всѣхъ тѣхъ толчковъ и ускореній, которымъ твердая частица подвергалась въ теченіе извѣстнаго времени.

Рихтгофенъ [1]) ошибается, говоря, что затрата энергіи на перенесеніе частицы въ теченіе времени t равна произведенію вѣса частицы въ водѣ на ту высоту, съ которой она упала-бы въ спокойной водѣ въ теченіе того-же времени t.

Еслибы это разсужденіе было справедливо, то точно также на перенесеніе извѣстнаго тѣла въ пустотѣ въ горизонтальномъ направленіи или на поддержаніе его въ одномъ и томъ-же уровнѣ въ теченіе времени t нужна была бы работа, равная произведенію его вѣса въ пустотѣ на ту высоту, съ которой она падаетъ въ теченіе времени t. Это противорѣчитъ основнымъ принципамъ механики. На поддержаніе тѣла въ одномъ и томъ-же уровнѣ не *нужна никакая работа*, но такъ

---

[1]) Richthofen. Führer стр. 149. Онъ очевидно говоритъ о перенесеніи въ горизонтальномъ направленіи. Слѣдуетъ замѣтить, что падающая въ водѣ частица даже передаетъ водѣ часть своей энергіи, такъ что отъ паденія твердыхъ частицъ кинетическая энергія воды увеличивается.

какъ тѣло падаетъ подъ вліяніемъ силы тяжести, то нужно подложить подъ него твердую неподвижную подставку или сообщать ему толчки, постоянно приводящіе его въ прежній уровень. Послѣдній случай и есть тотъ, который дѣйствительно происходитъ при перенесеніи твердыхъ тѣлъ водою, но затрачиваемая при этомъ работа вполнѣ зависитъ отъ самыхъ толчковъ.

Если вычисленіе энергіи, расходуемой на перенесеніе извѣстной частицы невозможно, то спрашивается, нельзя ли на основаніи нѣкоторыхъ болѣе или менѣе вѣроятныхъ предположеній вычислить нѣкоторую *среднюю* затрату энергіи при передвиженіи извѣстнаго количества извѣстныхъ твердыхъ тѣлъ. Къ сожалѣнію, наше теоретическое знаніе относительно движенія твердыхъ тѣлъ въ водѣ столь ограничено, что нельзя ожидать никакихъ надежныхъ результатовъ отъ подобныхъ вычисленій. Надежно толко то, что непосредственно основано на опытѣ и наблюденіи.

Такъ н. п. по даннымъ, даваемымъ наблюденіями, весьма нетрудно вычислить общую затрату энергіи, происходящую за извѣстное время въ извѣстной части теченія. Положимъ, что намъ извѣстны расходъ [1]). скорость и т. д. въ двухъ поперечныхъ сѣченіяхъ. № 1 и № 2, находящихся на разстояніи единицы длины другъ отъ друга.

Если обозначимъ черезъ g ускореніе силою тяжести
Q расходъ
ρ плотность
V среднюю скорость
h высоту центра тяжести сѣченія
надъ уровнемъ моря, то количество кинетической энергіи, вно-

[1]) Расходомъ рѣки называется объемъ воды, протекающей въ продолженіе единицы времени сквозь данное сѣченіе. Когда рѣка по пути не теряетъ и не получаетъ воды, то расходъ есть величина постоянная вдоль теченія.

симой въ разсматриваемое пространство въ теченіе единицы времени сквозь сѣченіе № 1 будетъ:

$$Q_1 \rho_1 \frac{V_1^2}{2}$$

а потенціальной:

$$Q_1 g \,.\, \rho_1 h_2$$

Въ тоже самое время сквозь сѣченіе № 2 уносится съ водою

$$Q_2 \rho_2 \cdot \frac{V_2^2}{2}$$

единицъ кинетической энергіи и:

$$Q_2 g \,.\, \rho_2 h_2$$

потенціальной. И такъ, въ продолженіе единицы времени въ разсматриваемой части теченія расходуется количество энергіи:

$$E = Q_1 \rho_1 \left[\frac{V_1^2}{2} + g h_1\right] - Q_2 \rho_2 \left[\frac{V_2^2}{2} + g h_2\right] \dots \quad (1)$$

Количество E всегда положительно, но какая его доля теряется на треніе, какая на преодолѣніе сопротивленій при отдѣленіи частицъ отъ стѣнъ русла, какая доля идетъ на перенесеніе твердыхъ частицъ, не знаемъ.

Когда средняя скорость, расходъ и насыщеніе воды химически и механически взвѣшеннымъ матеріяломъ постоянны вдоль русла; то выраженіе: (1) сводится къ простому виду:

$$E = g Q \,.\, \rho (h_1 - h_2).$$

Но такъ какъ сѣченія находятся на разстояніи, равномъ единицѣ, то:

$$h_1 - h_2 = sin i,$$ гдѣ i есть уклонъ.

Слѣдовательно:

$$E = g \,.\, Q \,.\, \rho \,.\, sin i \qquad (1)\ \text{bis.}$$

Примѣнимъ эту простую формулу къ слѣдующему примѣру: Уклонъ [1]) Волги въ среднемъ: 0,00004. Расходъ у Александровскаго моста [2]) близъ Сызрани въ среднемъ 9889 куб. метровъ въ сек., $\rho=1$, $g=9{,}8$ метра въ секунду. На основаніи этого:

$$E=3{,}88 \text{ килограммометрамъ}$$

т. е. въ пространствѣ, заключенномъ между двумя поперечными сѣченіями, находящимися на разстояніи одного метра въ продолженіе единицы времени затрачивается работа равная той, которая нужна для поднятія у поверхности землй въ пустотѣ 3,88 килограмма на высоту одного метра. Слѣдуетъ помнить, что несомнѣнно только малая доля этой энергіи идетъ на настоящую механическую работу.

Теперь слѣдуетъ сказать нѣсколько словъ о томъ, какъ энергія воды передается твердымъ тѣламъ. Къ сожалѣнію мы и здѣсь должны удовлетвориться нѣкоторыми общими свѣдѣніями, такъ какъ знаніе наше о всѣхъ этихъ процессахъ весьма и весьма ограничено.

Для совершенія работы, нужной для отдѣленія твердой частицы отъ стѣнъ русла и для перенесенія ея, вода затрачиваетъ часть своего запаса энергіи. Она производитъ давленіе на всякое тѣло, котораго скорость не равна и неодинаково направлена, какъ средняя скорость окружающаго теченія. Такимъ образомъ, поскольку не мѣшаетъ треніе о дно, твердымъ тѣламъ, движущимся медленнѣе чѣмъ теченіе, сообщается ускореніе. Покоющіяся тѣла сдвигаются съ мѣста коль скоро давленіе воды преодолѣетъ сопротивленіе, происходящее отъ прикрѣпленія частицы ко дну.

Ньютонъ [3]) полагалъ, что сопротивленіе воды движенію тѣлъ пропорціонально квадрату скорости. На основаніи теоре-

---

[6]) Мушкетовъ. Физич. Геол. II томъ стр. 251.

[7]) Воейковъ. Климаты земного шара стр. 518.

[1]) Rühlmann Hydromechanik. Hannover 1880 г. стр. 732.

мы Торичелли, пренебрегая реакціей воды на заднюю сторону плоскости, Эйлеръ показалъ [1]), что, если плоскость движется въ водѣ, то сопротивленіе движенію пропорціонально квадрату скорости и поверхности плоскости. Въ виду важности вопроса сопротивленія воды для теоріи движенія и постройки кораблей, соотвѣтственые опыты производились много разъ. Какъ и слѣдовало ожидать, опыты показали, что явленія, сопровождающія движеніе твердыхъ тѣлъ въ водѣ сложны, что сопротивленіе движенію тѣла есть результатъ *нѣсколькихъ одновременно дѣйствующихъ причинъ*, что законъ Эйлера далеко не точенъ. До сихъ поръ никому не удалось создать удовлетворительную теорію. Стокесъ [2]) полагаетъ, что при малыхъ скоростяхъ сопротивленіе пропорціонально первой степени, при большихъ квадрату отъ скорости.

Вопросъ о связи между *скоростью* и *давленіемъ* или, какъ говорятъ, силою удара [3]) (Stosskraft) о тѣло, покоющееся въ водѣ, или движущееся съ меньшей скоростью, чѣмъ окружающая вода, есть въ сущности тотъ-же, что вопросъ о сопротивленіи воды движенію тѣла. Дѣло не въ томъ, что движется и что покоится, а въ относительной скорости воды и тѣла. По этому обыкновенно полагаютъ, что это давленіе тоже пропорціонально квадрату скорости воды, если тѣло покоится, квадрату относительной скорости, если тѣло движется. Но этотъ законъ, точно также какъ обратный законъ сопротивленія завѣдомо [4]) неточенъ. И такъ, наше теоретическое знаніе въ сущности сводится къ тому, что давленіе тѣмъ больше, чѣмъ относительныя скорости больше, что оно зависитъ отъ поверхности и формы тѣла, что тяжелое тѣло труднѣе сдвинуть, чѣмъ болѣе легкое того-же самаго объема, что легче сдвинуть пло-

---

[1]) Fink. Untersuchungen etc. Civilingénieur 1892 г. вып. 7 стр. 540.

[2]) Rühlmann loc. cit. стр. 621.

[3]) Thomson et Tait. Treat. on Nat. Phil. Cambr. 1883 г. I ч. стр. 367.

[4]) Phillipson [Beitrag zur Erosionstheorie. Peterm. Mitth. 1886 г. стр. 68]. полагаетъ, что сила удара пропорціональна квадрату скорости.

[5]) Rühlmann. loc. cit. стр. 595.

ское тѣло, стоящее поперекъ теченія, чѣмъ вдоль его и т. д. Положительныя количественныя свѣдѣнія добыты путемъ опытовъ и наблюденій.

Опытъ показалъ [1]), что при подонной скорости въ 0,15 метровъ въ секунду по дну переносится грубая муть, состоящая изъ частицъ, которыхъ діаметръ въ среднемъ равенъ: 0,0004 метрамъ;

при	скорости	въ	0,20	м.	въ	сек.	тонкій песокъ	діам. въ	0,0007
»	»	»	0,30	»	»	»	грубый »	» »	0,0017
»	»	»	0,70	»	»	»	мелкая галька »	»	0,0092
»	»	»	1,20	»	»	»	галька величиною въ яйцо		
»	»	»	1,50	»	»	»	плоская галька [2]).		

Подонныя скорости весьма различны, онѣ найбольше на стрежени, гдѣ очень часто равны одной трети, половинѣ и большей доли средней скорости и уменьшаются въ обѣ стороны отъ стрежени, доходя до минимума у того берега, который находится подальше отъ стрежени. Смотря по формѣ русла при той-же самой средней скорости подонныя скорости бываютъ различны, такъ что по средней скорости нельзя судить о томъ, какой матеріялъ передвигается по дну.

---

[1]) Lapparent. Traité de Geologie. Paris 1883 г. стр. 22.

[2]) Рядомъ съ этимъ приводимъ слѣдующія данныя, заимствованныя у Коллиньона (Collignon Cours de Mécan. Paris 1880 г. II part. стр. 301).

Размытіе начинается въ размокшей почвѣ	при подон. скорости	0,076	метр. въ сек.	
» » » глинѣ	» » »	0,152	» »	»
» » » пескѣ	» » »	0,305	» »	»
» » » мелкой галькѣ	» » »	0,609	» »	»
» » » крупной (pierres cassées)	»	1,220	» »	»
» въ конгломератахъ и мягкихъ сланцахъ	»	1,520	» »	»
» » слоистыхъ породахъ	»	1,830	» »	»
» » твердыхъ скалахъ	»	3,030	» »	»

Изъ сравненія обоихъ таблицъ видно, что при произведеніи опытовъ не пытались отличить скорости достаточной для сдвиженія съ мѣста т. е. для размытія отъ скорости достаточной для перенесенія. Коллиньонъ приводитъ данныя по Прони.

Только въ водопадахъ, стремнинахъ, у весьма бурныхъ горныхъ потоковъ галька и вообще крупный матеріялъ совершенно подхватываются. Обыкновенно посреди теченія несется только муть и мелкій песокъ — подхваченные и передаваемые мелкими вихрями.

Дѣйствіе твердыхъ частицъ, несомыхъ рѣкою, зависитъ отъ ихъ твердости, массы, формы и отъ скорости, которой онѣ обладаютъ въ моментъ удара. Рихтгофенъ [1]) справедливо замѣчаетъ, что корразія т. е. размытіе помощью твердыхъ частицъ, потому болѣе сильно дѣйствуетъ, чѣмъ эрозія (размытіе чистой водою), что толчекъ, сообщаемый твердымъ тѣломъ, сообщается сразу всей массой этого тѣла, и энергія удара не теряется на треніе, сопровождающее передвиженія и скольженія частицъ другъ по другу, какъ это бываетъ съ жидкостью.

Размытію способствуетъ размоченіе породъ водою и химическія реакціи, благодаря которымъ поверхностные слои въ твердыхъ породахъ распадаются на мелкія части. Кромѣ того вода растворяетъ многія вещества и уноситъ ихъ съ собою. Это есть *химическое* размытіе, совершающееся на счетъ *химической* энергіи воды. Роль движенія здѣсь состоитъ только въ томъ, чтобы приносить ненасыщенную и уносить насыщенную растворомъ воду.

Вода рѣкъ содержитъ въ растворѣ углекислую известь, хлористый натрій, сѣрнокислую известь, угле и сѣрнокислую магнезію, кремнеземъ и т. д. [2]).

Ключевая вода богата растворимыми твердыми веществами; за то вода, происходящая отъ обильныхъ дождей, отъ таянія снѣга, не процѣженная сквозь почву, содержитъ весьма мало химически растворенныхъ веществъ. Поэтому во время весеннихъ водополей процентное содержаніе растворовъ, остав-

---

[1]) loc. cit. стр. 135.

[2]) J. Roth. Allgemeine und chemische Geologie I томъ. Berlin 1879 г. стр. 460.

ляющихъ воду прозрачной, меньше, чѣмъ въ меженное время. Такъ н. п. Тэмза на 10,000 частей воды (по вѣсу) несетъ весною у Кингстона, повыше Лондона, 2,379 твердыхъ химически растворенныхъ веществъ, а зимою 3,158. При замерзаніи химическія примѣси выдѣляются, за то въ остальной водѣ получается болѣе концентрированный растворъ. Вслѣдствіе этого, а тоже вслѣдствіе того, что зимою рѣки питаются преимущественно изъ ключей, максимумъ процентнаго содержанія солей обыкновенно соотвѣтствуетъ зимнему времени [1]).

Углекислой известью особенно богаты рѣки, протекающія сквозь мѣстности, покрытыя обильной растительностью и имѣющія известковую подпочву. Дождевая вода пропитывается углекислотою въ верхнихъ слояхъ почвы и проникнувъ въ подпочву растворяетъ много извести. Въ известковыхъ горахъ н. п. въ Карстѣ преобладаетъ химическое размываніе. Слѣдуя сначала по маленькимъ трещинамъ, вода размываетъ ихъ въ большіе подземные каналы. Въ подобныхъ странахъ цѣлыя рѣки пропадаютъ т. е. наземное теченіе смѣняется подземнымъ.

До недавняго времени полагали, что перенесеніе химическихъ растворовъ, оставляющихъ воду прозрачной, и перенесеніе механически взвѣшенной мути—вещи различныя. Между тѣмъ уже опыты Сиделля [2]) показали, что въ морской водѣ осажденіе мути идетъ по крайней мѣрѣ въ пятнадцатъ разъ скорѣе чѣмъ въ рѣчной. Затѣмъ болѣе обстоятельные опыты Брюера [3]) показали, что въ химически чистой водѣ тончайшая муть остается еще взвѣшенной по прошествіи шести лѣтъ. Изъ этого Брюеръ заключаетъ, что тутъ къ механическому явленію присоединяется химическое, что образуются какіе-то растворы кремнеземныхъ соединеній. Наконецъ изслѣдованія Бэруса показали, что

---

[1]) J. Roth. loc. cit. стр 454.

[2]) См. Dana Manual of Geology 3 изд. стр. 677.

[3]) Brewer. On the suspension and sedimentation of clays Amer. Journ. of Sc. 3 сер 29 томъ стр. 1.

скорость осѣданія мути въ химически чистой водѣ вообще значительно меньше теоретической скорости, вычисленной при предположеніи, что имѣемъ дѣло съ чисто механическимъ паденіемъ мелкихъ тѣлъ въ водѣ. Повышеніе температуры, примѣсь солей, кислотъ ускоряютъ осѣданіе [1]). Однимъ словомъ, муть проявляетъ свойства *химическаго* раствора. Всякая частичка мути растворяется съ поверхности, разбухаетъ, окружается какъ-бы атмосферой болѣе легкаго полурастворенннаго вещества. Такимъ образомъ ея плотность, а вслѣдъ за тѣмъ и скорость паденія уменьшаются. За то когда прибавимъ какую нибудь щелочь, кислоту, или вообще какое-нибудь легко растворимое въ водѣ вещество, то трудно растворимыя вещества, изъ которыхъ состоитъ муть, сейчасъ выдѣляются, скопляются и быстро осѣдаютъ.

Само собою понятно, что эта химическая растворимость мути въ высшей степени способствуетъ ея перенесенію проточной водою [2]). Зъ другой стороны очевидно, что осѣданіе мути при впаденіи рѣки въ море происходитъ нетолько отъ замедленія теченія, но въ гораздо большей степени отъ химическаго выдѣленія при смѣшеніи съ морской водою, содержащей соли, гораздо болѣе удоборастворимыя, чѣмъ разныя кремнеземныя соединенія, изъ которыхъ преимущественно состоитъ муть.

По тѣмъ-же самымъ причинамъ рѣки, отличающіяся большимъ содержаніемъ чисто химическихъ растворовъ, должны быть менѣе способны къ перенесенію мути, чѣмъ рѣки, находящіяся впрочемъ въ тѣмъ-же самыхъ условіяхъ, но менѣе сильно насыщенныя химическими растворами.

---

[1]) Barus. Subsidence etc. Bull. U. S. Geol. Surv. № 36 стр. 24.

[2]) Болѣе крупные продукты размытія истираются о дно и одни о другихъ, размельчаются и превращаются въ муть. Уже чисто механическое перенесеніе мути гораздо легче, чѣмъ перенесеніе болѣе крупныхъ веществъ. Къ тому присоединяется содѣйствіе химическихъ процессовъ. Такимъ образомъ даже при маломъ уклонѣ и скорости, обыкновенно господствующихъ на нижнемъ теченіи рѣкъ, возможно перенесеніе огромныхъ количествъ размельченныхъ твердыхъ веществъ.

ГЛАВА V.

Размытіе и отложеніе.

Всякая рѣка можетъ переносить только извѣстное количество твердыхъ веществъ, количество вообще тѣмъ большее, чѣмъ рѣка больше и чѣмъ скорость теченія больше. Поэтому, гдѣ съ одной стороны теченіе быстро, а съ другой готовый рыхлый матеріалъ находится въ изобиліи, тамъ проточной водою переносятся огромныя количества гальки, песку и мути.

Такъ н. п. въ сухомъ климатѣ Колорадскаго плоскогорья [1]) во время бездождія на склонахъ накопляется множество рыхлыхъ веществъ, происшедшихъ отъ вывѣтриванія. Мелкіе степные притоки Колорадо, обыкновенно остающіеся сухими, послѣ всякаго ливня превращаются въ бурные потоки. Эти потоки захватываютъ нагроможденный вывѣтриваніемъ матеріямъ въ такомъ изобиліи, что въ сущности по руслу несется не вода, а грязь. Даже по объему процентное отношеніе твердаго матеріала къ водѣ равно 3:1.

Способность переносить твердыя вещества увеличивается съ увеличеніемъ скорости (ср. прежнюю главу). Чѣмъ скорость больше, тѣмъ больше то количество твердыхъ веществъ, которое рѣка можетъ передвигать и предѣльная величина зеренъ, еще передвигаемыхъ водою, больше. Скорость не имѣетъ зна-

---

[1]) Dutton Tertiary history of the Grand Canon district II Mon. U. S. Geol. Surv. стр. 237.

ченія только для перенесенія химически растворенныхъ веществъ и тончайшей мути, которая есть отчасти тоже химическій растворъ.

Проточная вода одновременно несетъ частицы разной величины. Составъ того матеріяла, который въ данный моментъ въ извѣстномъ мѣстѣ переносится водою, зависитъ отъ того, какія вещества размывались на верхнемъ теченіи, потомъ отъ скоростей, господствующихъ сейчасъ повыше разсматриваемаго мѣста, наконецъ отъ длины пути, проходимаго несомыми частицами.

Вліяніе скоростей сказывается въ томъ, что при уменьшеніи скорости выдѣляются и отлагаются болѣе крупныя зерна, а при увеличеніи напротивъ того подбираются. Вліяніе длины пути сказывается въ томъ, что несомыя частицы по пути истираются однѣ о другія и о дно, а потому постоянно размельчаются.

У многихъ рѣкъ, особенно у тѣхъ, которыя вытекаютъ изъ горъ, скорость теченія уменьшается по направленію отъ источниковъ къ устью. Это даетъ поводъ къ выдѣленію болѣе крупныхъ частицъ. А такъ какъ рядомъ съ этимъ происходитъ размельченіе, то обыкновенно на горномъ теченіи рѣкою передвигается болѣе крупный матеріялъ съ малой примѣсью мелкаго, (ибо крупныя зерна еще не размельчены) но, чѣмъ дальше внизъ по теченію, тѣмъ вещества становятся мельче. Тотъ самый порядокъ наблюдается въ отложеніи наносовъ.

Далеко не всѣ увлекаемыя водою частицы несутся до самаго моря. Многія изъ нихъ опять падаютъ на дно, другія, двигавшіяся по дну, останавливаются. Такъ н. п., двигавшійся по дну камешекъ, наталкивается на другой, сообщаетъ ему скорость, а самъ останавливается или замедляетъ свое движеніе. Одна и та-же частица попадаетъ въ разныя струи, движущіяся съ различными скоростями. Благодаря вихревому безпорядочному движенію воды, твердыя вещества перемѣщаются въ

различныхъ направленіяхъ. Частицы увлекаются, опускаются на дно, опять подбираются и такъ дальше. Слѣдовательно можно сказать, что въ каждомъ мѣстѣ русла рядомъ происходитъ и размытіе и отложеніе. Но отношеніе этихъ двухъ различныхъ сторонъ дѣятельности рѣки различно смотря по условіямъ. Рѣка можетъ отлагать больше или меньше, чѣмъ размываетъ. Если она больше размываетъ, чѣмъ отлагаетъ, то насыщеніе твердыми веществами увеличивается, но только до нѣкотораго предѣла. При данномъ уклонѣ, формѣ русла и расходѣ [1]) рѣка можетъ переносить только извѣстное количество твердыхъ веществъ и сейчасъ выдѣляетъ всякій излишекъ.

Можно разсматривать состояніе рѣки или по отношенію къ ней самой, или по отношенію къ руслу. Въ первомъ случаѣ можно различать состояніе ненасыщенное, насыщенное и пересыщенное. Пересыщенное состояніе непрочно и неестественно. Рѣка не станетъ переносить больше твердыхъ веществъ, чѣмъ это возможно. Коль скоро, благодаря внѣшнимъ причинамъ, [н. п. обвалу большой массы веществъ со стѣнъ долины] дѣйствительное насыщеніе сдѣлается больше возможнаго при данныхъ условіяхъ полнаго насыщенія, сейчасъ весь излишекъ выдѣляется такъ, что рѣка остается въ насыщенномъ состояніи.

Во второмъ случаѣ можно различать состояніе, въ которомъ размытіе преобладаетъ надъ отложеніемъ, т. е. объемъ захватываемыхъ рѣкою веществъ больше объема отлагаемыхъ, во вторыхъ состояніе равновѣсія между размытіемъ и отложеніемъ, наконецъ состояніе, характеризуемое преобладаніемъ отложенія.

Состоянія первой категоріи соотвѣтствуютъ состояніямъ второй категоріи не вполнѣ. Такъ н. п. Поуэлль и Дуттонъ

---

[1]) Перенесеніе твердыхъ веществъ зависитъ отъ скоростей, но такъ какъ насыщеніе въ свою очередь вліяетъ на скорость, [вслѣдствіе затраты энергіи на перенесеніе твердыхъ частицъ скорость уменьшается] то лучше разсматривать уклонъ, форму, размѣры русла и расходъ какъ независимыя перемѣнныя, а скорости и насыщеніе какъ зависимыя.

ошибаются [1]) говоря, что насыщенная рѣка не можетъ углублять своего русла. Дѣйствительно, представимъ себѣ, что рѣка, находящаяся въ равномѣрномъ и установившемся состояніи (ср. гл. II), въ извѣстномъ участкѣ вполнѣ насыщена извѣстными твердыми веществами. Нѣсколько дальше внизъ по теченію эти вещества вслѣдствіе истиранія сдѣлаются мельче, но рѣка можетъ переносить большее количество [и по вѣсу и по объему] мелкихъ частицъ, чѣмъ крупныхъ, а потому, если рѣка должна остаться насыщенной, то нужно къ ея грузу прибавить нѣкоторое новое количество твердыхъ веществъ. Само собою очевидно, что при такихъ условіяхъ русло должно углубляться или разширяться, или и то и другое вмѣстѣ. Конечно, насыщенная рѣка углубляетъ свое русло въ далеко меньшей степени, чѣмъ ненасыщенная, ибо размельченіе твердыхъ частицъ идетъ медленно и замѣна несомыхъ рѣкою частицъ вновь подбираемыми совершается по частямъ и постепенно.

Способность переносить твердыя вещества не должна быть разсматриваема какъ функція отъ средней скорости. Такъ п. п. при той-же самой средней скорости и расходѣ мелководная и широкая рѣка обладаетъ большими подонными скоростями, чѣмъ глубокая и узкая, а потому можетъ катить больше гальки (или болѣе крупную) по дну.

Смотря по величинѣ и по распредѣленію скоростей извѣстная рѣка можетъ, положимъ, передвигать извѣстной величины гальку въ совершенно опредѣленномъ количествѣ, но кромѣ этой самой крупной гальки рѣка можетъ передвигать нѣкоторое количество менѣе крупной, потомъ еще нѣкоторое количество песку, затѣмъ еще извѣстное количество мути. Рѣка не несущая самой крупной гальки, но обладающая достаточной для этого скоростью, можетъ за то нести больше песку, при-

---

[1]) См. Dutton loc. cit. стр. 76.

чемъ этотъ излишекъ будетъ опредѣленный [1]). Дѣйствительный составъ и качества переносимаго матеріяла опредѣляются, конечно, нетолько способностью, но и возможностью т. е. всѣми тѣми условіями и отношеніями, въ которыхъ находится данная рѣка.

Филипсонъ говоритъ [2]), что на счетъ размытія существуетъ такая путаница, что одинъ авторъ объясняетъ сильное размытіе обиліемъ несомой гальки, а другой той-же причиной объясняетъ ничтожность размытія. Очевидно авторы, о которыхъ говоритъ Филипсонъ, не задавали себѣ вопроса о томъ, въ какомъ состояніи находились разсматриваемыя ими рѣки, ибо дѣло не въ томъ, сколько рѣка несетъ гальки или даже сколько размываетъ, а въ томъ, больше-ли размываетъ и уноситъ, чѣмъ отлагаетъ и приноситъ, или наоборотъ. Преобладаніе размытія надъ отложеніемъ и обратно возможно при всякихъ скоростяхъ [3]), но первое всегда сопровождается углубленіемъ и расширеніемъ долины, второе возвышеніемъ русла и дна долины.

Обиліе гальки и песку (ср. прежнюю главу) способствуетъ размытію русла, но только до нѣкоторыхъ предѣловъ. Само собою очевидно, что, когда движущаяся галька и песокъ образуютъ нѣсколько слоевъ, то всѣ слои, кромѣ самаго нижняго,

---

[1]) Мы здѣсь указываемъ на то, что обыкновенно перенесеніе одного матеріала до нѣкоторой степени исключаетъ присутствіе другаго. Само собою очевидно, что если вслѣдствіе отсутствія гальки, рѣка несетъ только песокъ, хотя могла-бы нести и гальку, то для перенесенія песку имѣется больше энергіи, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда рѣка уже несетъ гальку. Замѣтимъ однако, что у рвущихъ горныхъ потоковъ примѣсь мелкихъ твердыхъ частицъ иногда столь значительна, что плотность жидкости замѣтно увеличивается. Это въ свою очередь способствуетъ перенесенію камней. Подобные случаи бываютъ при внезапномъ размытіи запрудъ, образованныхъ обвалами. Ср. Lapparent. loc. cit. стр. 188.

[2]) Phillipson. Ein Beitrag zur Erosionstheorie. Peterm. Mitth. 1886 г. стр. 70.

[3]) Н. п. потокъ, выходящій на равнину отлагаетъ гальку при тойже скорости, при которой иная рѣка находится въ преимущественно размывающемъ состояніи.

никакого непосредственнаго отношенія къ размытію дна имѣть не могутъ.

Размытіе хотя не прекращается но дѣлается совершенно ничтожнымъ съ того момента, когда скорости воды у дна окажутся меньше тѣхъ скоростей, которыя нужны для того, чтобы отрывать и уносить частицы породъ, составляющихъ дно и берега. Положимъ н. п. что рѣка протекаетъ среди песку съ зернами средней величины a. Размытіе сдѣлается ничтожнымъ съ того момента, когда подонныя скорости окажутся меньше тѣхъ скоростей, при которыхъ возможно передвиженіе песчинокъ величины a. Начиная съ этого момента размытіе ограничивается только тѣми попадающимися то здѣсь то тамъ маленькими зернами, которыя всегда примѣшаны къ болѣе крупнымъ,—кромѣ того химическое размытіе, которое не зависитъ отъ скорости теченія, тоже не прекращается.

Уже Гуліельмини [1]), знаменитый итальянскій гидравликъ конца XVII и начала XVIII столѣтій говоритъ, что размытіе прекращается при нѣкоторомъ конечномъ уклонѣ вообще тѣмъ меньшемъ, чѣмъ рѣка больше, а породы мягче и называетъ подобное состояніе упрочившимся [stabilito]. Гуліельмини, Вентуроли [2]), Доссъ [3]), Буссинекъ [4]), Коллиньонъ [5]), Рихтгофенъ [6]) всѣ они полагаютъ, что переходъ къ упрочившемуся состоянію совершается тогда, когда сопротивленіе породъ сдѣлался равнымъ энергіи рѣки. Но Вентуроли [7]) полагалъ, что переходъ къ прочному состоянію зависитъ тоже отъ мутности воды (torbi-

---

[1]) Guglielmini. Sulla natura de fiumi 1697 см. Dausse Etudes d'hydr. pratique Mem. Sav. etr. 20 томъ (1872) стр. 340.

[2]) ibidem. (Venturoli Elementi d'idraulica 3 изд. Milano 1818).

[3]) ibidem.

[4]) Boussinesq. Essai etc. стр. 156.

[5]) Collignon. Cours de méc. стр. 286.

[6]) Richthofen Führer etc. стр. 141.

[7]) См. Dausse loc. cit. стр. 341.

dezza). Поуэлль и Дуттонъ [1]) полагаютъ, что это состояніе совпадаетъ съ состояніемъ полнаго насыщенія. Мы уже выше указали на то, что насыщенная рѣка можетъ въ то-же самое время углублять свое русло, слѣдовательно не можемъ признать этого взгляда правильнымъ тѣмъ болѣе, что рѣка можетъ оказаться въ насыщенномъ состояніи при какихъ угодно скоростяхъ а размытіе прекращается при опредѣленныхъ скоростяхъ. Наконецъ состояніе, о которомъ говорятъ указанные американскіе ученые, не можетъ распространиться на все теченіе, ибо насыщенная рѣка должна гдѣ нибудь находиться въ преимущественно размывающемъ состояніи. Дѣйствительно, еслибы русло нигдѣ не подвергалось размытію, откуда взялись-бы насыщающіе рѣку продукты размытія. Когда размытіе прекращается на всемъ теченіи, то очевидно тѣмъ самымъ прекращается и отложеніе и русло не подвергается никакимъ измѣненіямъ. Подобное состояніе можетъ быть конечно названо «прочнымъ». Строго говоря, оно можетъ быть осуществлено только послѣ истеченія безконечно долгаго времени. Тѣмъ не менѣе очевидно, что чѣмъ размытіе болѣе ничтожно, тѣмъ состояніе рѣки болѣе сходно съ предѣльнымъ, прочнымъ неразмывающимъ состояніемъ. Уклонъ въ прочномъ состояніи очевидно тѣмъ больше, чѣмъ породы болѣе способны сопротивляться размытію, ибо, чѣмъ больше было сопротивленіе породы, тѣмъ больше были тѣ предѣльныя скорости у дна и береговъ, при которыхъ размытіе прекратилось. Съ другой стороны, такъ

---

[1]) Dutton. Tert. hist. Grand Canon district. II Mon. U. S. Geol. Surv. стр. 76. Вопросомъ предѣловъ размытія занимался тоже Пенкъ (Penck. Das Endziel der Erosion Verh. VIII deutsch. Geogr. tages.). Оригинальная статья Пенка была для меня недоступна, но изъ реферата Дрыгальскаго (Neues Jahrb. für Min. 1891 г. I, 2 стр. 52) вижу, что физическая сторона вопроса разработана неудовлетворительно. Пенкъ между прочимъ указываетъ на то, что нивелляціи суши вообще, а водораздѣловъ спеціально содѣйствуетъ размытіе дождемъ, котораго капли, падая съ высоты, обладаютъ сравнительно значительной кинетической энергіей.

какъ «ceteris paribus» у большей рѣки скорости вообще и подонныя спеціально больше чѣмъ у малой, то предѣльные уклоны должны быть тѣмъ меньше, чѣмъ рѣка больше. Такъ какъ рѣка увеличивается по мѣрѣ присоединенія притоковъ, то слѣдуетъ ожидать, что во всякомъ состояніи болѣе или менѣе близкомъ къ предѣльному уклонъ долженъ убывать отъ верховьевъ къ устью.

Малыя рѣки очень часто находятся всецѣло въ области распространенія одной породы и, если эта порода не особенно тверда, то не нужно было очень много времени для того, чтобы создать уклоны, правильно убывающіе отъ верховьевъ къ устью. Поэтому указанная черта теченія очень часто наблюдается у малыхъ рѣкъ и потоковъ. Такъ н. п. у Альпійскихъ потоковъ правильное убываніе уклона наблюдали Сюрелль [1]) и другіе, у потоковъ, стекающихъ по склонамъ вулканическихъ конусовъ, Дэна [2]). У большихъ рѣкъ нельзя ожидать столь правильныхъ отношеній, но убываніе средняго уклона наблюдается весьма часто. Такъ н. п. у Эльбы въ Богеміи средній уклонъ поверхности воды [3]) — 0,00035, а вблизи Гамбурга 0,0000315, у Рейна отъ Констанціи до Страсбурга 0,00114, отъ Страсбурга до Ротердама 0,00045, у Дуная отъ Донауэшингена до Вѣны 0,00049, отъ Вѣны до моря 0,00009. У Миссисипи уклонъ у Каиро 0,000094, у Колумбуса 0,000108, потомъ постепенно уменьшается до 0,000022 у самаго раздѣ-

---

[1]) Surell. Etudes sur les torrents des Hautes alpes. Къ сожалѣнію эта книга была для меня недоступной.

[2]) Dana. Manual of Geology стр. 688 и On the denudation in the Pacific. Rep. Exp. Wilkes 1863 г.

[3]) При гидрологическихъ измѣреніяхъ опредѣляется уклонъ поверхности воды. Мѣстный уклонъ въ руслахъ неправильной формы есть вещь неопредѣленная. Само собою понятно, что не смотря на измѣненія глубины, можно на длинныхъ участкахъ по уклону поверхности судить о среднемъ уклонѣ дна.

ленія на рукавѣ. Въ рукавахъ, какъ и слѣдовало ожидать, уклоны опять нѣсколько больше—0,000031—0,000037 [1]).

Нѣкоторые, какъ н. п. Грэфъ [2]), Гринвудъ [3]), Тайлоръ [4]) полагаютъ, что вертикальные продольные профили рѣкъ должны имѣть видъ параболъ, другіе н. п. Оппикоферъ [5]) думаютъ, что эти профили должны имѣть видъ циклоидъ. Это заблужденіе основано на поверхностномъ сходствѣ всякой кривой, обращенной вогнутостью къ верху, а вмѣстѣ съ тѣмъ асимптотически приближающейся къ горизонтали съ кускомъ параболы или циклоиды. Видъ профиля зависитъ прежде всего отъ распредѣленія притоковъ, ихъ величины, насыщенія и т. д., не говоря уже объ измѣненіяхъ кривизны, обусловленныхъ разнообразіемъ породъ, составляющихъ стѣны русла.

Размытіе идетъ «ceteris paribus» тѣмъ медленнѣе, чѣмъ порода тверже, а потому выходы твердыхъ породъ обыкновенно сопровождаются нѣкоторымъ измѣненіемъ характера теченія и соотвѣтственнаго продольнаго профиля дна.

Всякое теченіе можетъ быть раздѣлено на участки [6]), гдѣ преобладаетъ размытіе и участки, гдѣ преобладаетъ отложеніе. Количество вторыхъ всегда равно количеству первыхъ, они всегда являются попарно, но послѣдній участокъ отложенія мо-

---

[1]) Rühlmann loc. cit. стр. 352 и 353. Въ иныхъ случаяхъ большіе уклоны верхняго теченія несомнѣнно происходятъ отъ того, что рѣка вытекаетъ изъ горъ, а не отъ того, что она уже успѣла придти въ приблизительно прочное состояніе.

[2]) Graëff. Memoire sur les Courbes des débits. Mem. Sav. Etr. 21 томъ стр. 634.

[3]) Greenwood см. Oldham. On the law etc. Quart. Journ. Geol. Soc. London 1888 стр. 734.

[4]) Tylor. On the action of denuding agencies. Особое приложеніе къ Geol. Magazine за 1873 г. Безсвязный бредъ разными теоріями.

[5]) Phillipson loc. cit. стр. 73 ср. Trautweiler. Natürliche Gefällsverhältnisse der Flüsse. Gaea. 1883 г. стр. 449.

[6]) Строго говоря, длина участковъ, гдѣ размытіе абсолютно равно отложенію, равна нулю.

жетъ находиться уже внѣ рѣки, въ морѣ, или озерѣ, или въ другой рѣкѣ.

Распаденіе рѣки на участки размытія и участки отложенія есть результатъ внѣшнихъ причинъ, ибо рѣки сами по себѣ не переходятъ въ преимущественно отлагающее состояніе. Нужно, чтобы какая нибудь внѣшняя причина дала поводъ къ уменьшенію скоростей ниже того предѣла, при которомъ рѣка еще можетъ переносить имѣющіеся продукты размитія, или чтобы количество ихъ чрезмѣрно увеличилось. Если насыщеніе увеличивается вслѣдствіе впаденія притока, несущаго много продуктовъ размытія, то причина перехода въ преимущественно отлагающее состояніе въ сущности сводится къ первому случаю, ибо разсматривая рѣку, образовавшуюся изъ соединенія обѣихъ рѣкъ, какъ продолженіе притока, всегда найдемъ, что скорости ея теченія недостаточны для перенесенія того количества или столь крупныхъ продуктовъ размытія, какіе приносятся притокомъ. Причина уменьшенія скоростей чаще всего заключается въ уменьшеніи уклона подъ вліяніемъ нѣкоторыхъ топографическихъ и тектоническихъ условій, н. п. можетъ случиться, что рѣка переходитъ съ болѣе крутой покатости на менѣе крутую, или пересѣкаетъ выходы твердыхъ породъ и т. п. Точно также причиной отложенія бываетъ подпираніе моремъ, озеромъ или другой рѣкою. Если главная рѣка течетъ быстро, если въ морѣ у берега существуетъ сильное теченіе, то вода впадающей рѣки и несомые ею продукты размытія увлекаются, въ противномъ случаѣ является пересыщеніе и наносы отлагаются вблизи устья. Область отложенія очень часто распространяется на впадающую рѣку. Такъ н. п., выходя изъ устья въ спокойное море, неимѣющее ни теченій, ни приливовъ и отливовъ, рѣка приводитъ въ движеніе воду моря, но тѣмъ самымъ теряетъ свою энергію и скорость ея уменьшается. Такъ какъ скорость теченія у рѣкъ регулируется снизу вверхъ, то замедленіе теченія при выходѣ изъ устья сообщается вверхъ по рѣ-

кѣ, что даетъ поводъ къ отложенію наносовъ на низовьяхъ. Когда существуютъ теченія, приливы и отливы, то условія, конечно, осложняются.

Наносы отлагаются слоями, одни на другихъ и, если есть достаточно мѣста, распространяются во всѣ стороны, образуя характеристичный, подобный вѣеру, конусъ отложенія, по которому вода стекаетъ во всѣ стороны и раздѣляется на рукава. Если дѣло не доходитъ до раздѣленія на рукава, то по крайней мѣрѣ наблюдается расширеніе и обмелѣніе русла.

Очень часто накопленія наносовъ возвышаются надъ окрестною мѣстностью. Это наблюдается тамъ, гдѣ рѣка переходитъ изъ большей покатости на меньшую, изъ одной террасы на другую. Такъ какъ нижній предѣлъ той скорости, при которой твердыя частицы выдѣляются и больше уже не сдвигаются, тѣмъ больше, чѣмъ частицы крупнѣе, то, смотря по характеру отлагаемаго матеріяла, уклонъ поверхности конуса отложенія бываетъ то больше, то меньше. Большая рѣка обладаетъ большей скоростью при меньшемъ уклонѣ, а потому уклоны поверхности ея конуса отложенія «ceteris paribus» меньше, чѣмъ у малой рѣки, но съ другой стороны тѣмъ больше, чѣмъ крупнѣе отлагающіяся частицы.

Накопленіе наносовъ увеличивается до тѣхъ поръ, пока продукты размытія приносятся въ изобиліи съ верхняго теченія. Но количество ихъ уменьшается то вслѣдствіе ослабленія размытія при уменьшеніи уклоновъ, обусловленномъ прогрессомъ размытія, то вслѣдствіе того, что рѣка на верхнемъ теченіи углубилась до пластовъ, хорошо сопротивляющихся размытію. Тогда отложеніе наносовъ можетъ не только прекратиться, но даже замѣниться размытіемъ. Именно, если передъ накопленіемъ наносовъ есть участокъ размытія, то этотъ послѣдній, удлинняясь своимъ верхнимъ концомъ, вторгается въ область накопленія наносовъ и вымываетъ посреди старыхъ наносовъ новый глубокій и узкій каналъ. Иной разъ накопленіе

наносовъ еще увеличивается во верхней, задней своей части а въ нижней уже размывается.

Происшедшій отъ размытія стараго конуса отложенія матеріялъ отлагаеття въ другомъ мѣстѣ и образуетъ вторичный конусъ [1]). Продукты размытія могутъ попасть на другое уже уменьшающееся наконленіе, пріостановить его размытіе, даже вновь увеличить до большихъ чѣмъ прежде размѣровъ. Тамъ, гдѣ много участковъ размытія и отложенія, гдѣ условія сложны йли измѣнчивы, образованіе и уничтоженіе накопленій на одномъ и томъ-же или на разныхъ мѣстахъ можетъ повторяться много разъ [2]).

Конусы отложенія, находящіеся у устья притоковъ, очень часто размываются потому, что главная рѣка вновь углубляетъ свое русло и заставляетъ притоки слѣдовать за собою. Иногда углубленіе главной рѣки происходитъ настолько быстрѣе углубленія притока, что онъ соединяется съ главной рѣкой водопадомъ. Примѣры этого явленія и другихъ ему подобныхъ встрѣчаются у Лэвля [3]), Рютимейера [4]) и другихъ авторовъ.

Наоборотъ бываетъ тоже обратное явленіе. Главная рѣка отлагаетъ такъ много наносовъ и такъ быстро возвышаетъ свое русло и долину, что притоки, не будучи въ состояніи стольже быстро возвышать свои русла, запружаются и образуютъ озера. Примѣромъ этого явленія могутъ служить лѣвые притоки Дуная отъ Галаца до устья [5]). Многіе изъ притоковъ Волги

---

[1]) Ср. Oldham. On the law etc.... Quart. Journ. Geol. Soc. London 1888 г. стр. 735. Ольдгэмъ называетъ такое вторичное накопленіе: secondary fan.

[2]) Rütimeyer. Ueber Thal und Seebildung Basel. 1874 г. стр. 32. Рютимейеръ кажется полагаетъ, что причина многократнаго образованія и уничтоженія накопленій состоитъ въ томъ, что поочередно размываются выходы твердыхъ породъ, пересѣкающіе русло рѣки. Во всякомъ случаѣ это только одна изъ причинъ. Впрочемъ Рютимейеръ имѣлъ, кажется, въ виду спеціально Рейссъ и ея притоки.

[3]) Löwl. Ueber Thalbildung. Prag. 1884 г.

[4]) Rütimeyer loc. cit.

[5]) Ср. Richthofen loc. cit. стр. 266.

подпираются ея водою во время весеннихъ разливовъ и образуютъ у своихъ устьевъ временныя озера.

Многократнымъ накопленіемъ и размытіемъ наносовъ объясняется происхожденіе многихъ продольныхъ террасъ. Мы только что показали, что однѣ уже реакціи между различными частями теченія даютъ поводъ то къ образованію накопленій, то къ размытію ихъ. Замѣтимъ, что положительныя измѣненія уровня моря или озера, въ которое впадаетъ рѣка, тоже даютъ поводъ къ образованію новыхъ накопленій повыше старыхъ и къ одновременному погруженію старыхъ, наоборотъ отрицательныя измѣненія уровня моря заставляютъ рѣку глубже врѣзаться въ старые наносы, нести дальше матеріялъ и отлагать его пониже старыхъ наносовъ. Потому-то увеличивающіяся дельты находятся по большей части на тѣхъ берегахъ, гдѣ уровень моря понижается [1]).

Само собою очевидно, что террасы могутъ тоже образоваться вслѣдствіе измѣненія климата [2]) или орографическихъ условій, ибо эти причины тоже заставляютъ рѣку переходить изъ размывающаго состоянія въ намывающее и обратно. Прежніе авторы слишкомъ охотно пользовались послѣдними причинами [3]). Между тѣмъ нельзя «à priori» разсматривать продольныя террасы какъ доказательства измѣненія климата или поднятія нѣкоторой части бассейна рѣки. Нужно прежде убѣдиться, насколько образованію террасъ могли способствовать реакціи между разными частями рѣчной системы и колебанія уровня моря.

---

[1]) Credner. Die Deltas. 56 Ergänzh. Pet. Mitth.

[2]) Такъ н. п. размытіе усиливается, когда весенніе разливы увеличиваются.

[3]) Penck. Ueber die Periodicität in der Thalbildung Verh. Gesell. der Erdkunde zu Berlin 1884 г. стр. 39. Работа Пенка, хотя приписываетъ образованіе террасъ климатическимъ причинамъ, не заслуживаетъ на этотъ упрекъ. Онъ указываетъ на то, что не одна рѣка и не въ одномъ мѣстѣ, а многія рѣки на значительныхъ участкахъ отлагали массу щебня. Онъ связываетъ это явленіе съ ледниковымъ періодомъ.

Къ внезапному увеличенію насыщенія даетъ поводъ впаденіе притока, несущаго больше продуктовъ размытія, чѣмъ главная рѣка въ состояніи переносить. Такъ н. п. въ руслѣ Миссисипи послѣ впаденія каждаго изъ болѣе крупныхъ притоковъ находятся накопленія наносовъ [1]). Тоже самое наблюдается у многихъ рѣкъ.

Когда накопленія наносовъ, приносимыхъ притокомъ, очень значительны, то дѣло можетъ дойти до запруженія главной рѣки и до образованія озера. Форель [2]) склоненъ думать, что нѣчто подобное способствовало образованію Женевскаго озера. Конечно, такое запруженіе возможно только въ узкихъ горныхъ долинахъ.

Точно также причиной образованія накопленій бываютъ обвалы стѣнъ долины. У равнинныхъ рѣкъ обвалъ можетъ нетолько довести до образованія переката, но даже заставить рѣку измѣнить свое теченіе, чтобы обойти запруду. Въ узкихъ горныхъ долинахъ случается, что обвалъ совершенно запружаетъ рѣку [3]). Повыше плотины образуется озеро, существующее до тѣхъ поръ, пока переливающаяся черезъ край плотины рѣка не размоетъ ее и не спуститъ озера. Но исчезновенію такихъ плотинныхъ озеръ еще больше способствуетъ возвышеніе ихъ дна наносами, приносимыми впадающими въ него горными потоками. Въ результатѣ послѣ исчезновенія озера въ долинѣ остается поперечная терраса, иногда достигающая цѣлыя сотни метровъ высоты.

Верховья рѣкъ остаются въ преимущественно размывающемъ состояніи, ибо позади ихъ нѣтъ участка рѣки, посылающаго имъ свои продукты размытія. Даже въ томъ, впрочемъ неосуществимомъ случаѣ, когда рѣка питается исключительно

---

[1]) Ср. Warren. Valley of Minnesota and Missisipi Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 16 томъ стр. 420.

[2]) Forel. Le Leman Lausanne 1892 г. стр. 247 и слѣд.

[3]) Löwl. Ueber Thalbildung Prag. 1884 г. стр. 62, 81.

источниками, размытіе верховьевъ имѣетъ мѣсто съ той разницею, что размытіе на поверхности замѣняется подземнымъ [1]); образуются полости, своды которыхъ должны когда нибудь обрушиться. Иногда верховья вторгаются въ бассейны другихъ рѣкъ или наоборотъ сокращаются. Во многихъ случаяхъ рѣки замѣтно удлиняются своимъ верхнимъ концомъ и отбираютъ у сосѣднихъ рѣкъ ихъ притоки. Удлиняющаяся своимъ верхнимъ концомъ рѣка пересѣкаетъ другую и такимъ образомъ съ начала даетъ поводъ къ нѣкоторому раздвоенію [2]) [бифуркаціи] теченія. Чаще всего пересѣкающая рѣка сильнѣе углубляется, чѣмъ пересѣкаемая, а потому захватываетъ въ свою пользу весь ея верхній участокъ.

Условія, способствующія удлиненію рѣкъ верхнимъ концомъ суть слѣдующія: 1) Значительная разность уровня между русломъ рѣки и тѣми возвышенностями, въ которыхъ находится ея бассейнъ питанія. 2) Присутствіе легко размываемыхъ породъ на водораздѣлахъ. 3) Абсолютное и относительное обиліе осадковъ въ бассейнѣ питанія. При равенствѣ прочихъ условій удлиняются рѣки того склона, на которомъ выпадаетъ больше осадковъ.

Въ мѣстахъ удлиненія рѣкъ и вообще всюду, гдѣ образованіе русла и долины находятся еще въ первой фазѣ, всегда наблюдается сильное мѣстное увеличеніе уклона (torrent portion) въ схэмѣ размытія Дэны [3]).

Это мѣстное увеличеніе уклона есть прямой результатъ самаго хода размытія. Мелкіе ручьи, маленькія дождевыя струй-

---

[1]) Иные говорятъ, что размытіе самаго водораздѣла равно нулю, но слѣдуетъ помнить, что онъ размывается дождевою водою, которая, падая съ высоты, обладаетъ нѣкоторой кинетической энергіей, во вторыхъ склоны, находящіеся по обѣимъ сторонамъ водораздѣла размываются; а потому водораздѣлъ долженъ въ концѣ концовъ обвалиться.

[2]) Ср. Haase. Ueber Bifurcationen. etc.... Pet. Mitth. 1886 г. стр. 195.

[3]) Dana Manual of Geology II изд. 1875 г. стр. 638 ср. тоже Richthofen loc. cit. стр. 139.

ки, стекающія по склону, отклоняются малыми неровностями почвы и т. п. причинами то вправо, то влѣво, а потому должны встрѣтиться. Но встрѣча двухъ струй проточной воды всегда равняется ихъ соединенію, ибо онѣ не отражаются другъ отъ друга, а пройти одна сквозь другую тоже не могутъ. Въ этомъ-то заключается главная причина соединенія рѣкъ во все большія и большія. И такъ, мелкія струйки дождевой воды соединяются въ нѣсколько большій ручей. Энергія такого ручья всегда больше энергіи составляющихъ струекъ, ибо масса воды больше, а на болѣе или менѣе однообразномъ покатомъ склонѣ скорость теченія скорѣе увеличивается, чѣмъ уменьшается. И такъ обыкновенно вымывается рытвина, болѣе глубокая внизу склона, чѣмъ вверху. Дальнѣйшее углубленіе идетъ снизу вверхъ. Вскорѣ углубленіе внизу склона доходитъ до того, что уклонъ уменьшается ниже того предѣла, при которомъ въ виду даннаго насыщенія ручеекъ переходитъ въ преимущественно отлагающее состояніе. Вмѣстѣ съ тѣмъ мѣсто, гдѣ размывающая энергія доходитъ до максимума, оказывается дальше сзади. На нашей схэмѣ см. F. 1, *a* — *a* обозначаетъ «torrent portion» Дэны. Участокъ *a*—*a* имѣетъ обыкновенно всѣ характеристическія черты потока, ямы на днѣ, водопады, рѣзкіе повороты и т. д. Быстрому отступленію участка *a*—*a* способствуетъ нетолько болѣе энергичное размытіе, обусловленное значительнымъ уклономъ, но также частые обвалы. Въ рыхлыхъ городахъ очень часто случается, что уклонъ въ какомъ нибудь мѣстѣ «torrent portion» дѣлается больше угла покоя.

Въ рыхлыхъ породахъ противуположность между быстрымъ размытіемъ участка *a*—*a* и медленнымъ повыше *a* усиливается еще тѣмъ, что повыше *a* склонъ обыкновенно покрытъ растительностью значительно увеличивающей сопротивленіе размытію. Мелкія дождевыя струйки не въ состояніи размывать верхній скрѣпленный растительностью слой почвы. Разумѣется, скрѣпленіе поверхностнаго слоя почвы не можетъ помѣшать ни под-

мыванію, ни образованію осыпей и обваловъ на впереди лежащей «torrent portion» и захватывающихъ почву повыше точки *a*.

И такъ, вліяніе растительности сводится преимущественно къ тому, что она мѣшаетъ образованію зачатковъ оврага.

Докучаевъ замѣчаетъ [1]), что развитію оврага, особенноже образованію вертикальныхъ обваловъ способствуютъ выходы ключей на днѣ и въ стѣнахъ оврага. Этотъ факторъ оказываетъ свое вліяніе съ того момента, когда дно оврага дойдетъ до водоупорныхъ пластовъ.

Даже тогда, когда рытвина образовалась сверху внизъ, дальнѣйшее ея углубленіе идетъ снизу вверхъ. Вообще углубленіе русла идетъ всегда снизу вверхъ. Дѣйствительно, положимъ, что гдѣ нибудь на днѣ рѣки или на склонѣ образуется углубленіе (см. F. 2). Всегда уклонъ уменьшается на передней, а увеличивается на задней сторонѣ выемки. Слѣдовательно размытіе усиливается на задней сторонѣ выемки и увеличиваетъ ее заднимъ ходомъ; напротивъ того на передней сторонѣ выемки размытіе слабѣетъ. Быстро стекающей по заднемъ склонѣ выемки водою въ точкѣ *m* долбится болѣе или менѣе глубокая яма. Можно хорошо прослѣдить первыя фазы образонія и углубленія рытвинъ на правильныхъ склонахъ желѣзнодорожныхъ выемокъ. 1. *Фаза:* образованіе рытвины нѣсколько болѣе глубокой внизу склона. 2. *Фаза:* обвалы внизу склона и образованіе ломаннаго профиля дна; внизу меньшій уклонъ, нѣсколько выше крутой уклонъ, еще выше опять меньшій уклонъ. Дальнѣйшихъ фазъ не видно, такъ какъ администрація желѣзныхъ дорогъ старается прекратить дальнѣйшее образованіе овраговъ и спѣшитъ починить испорченные склоны.

Если какая нибудь причина даетъ поводъ къ возобновленію или къ усиленію размывающей дѣятельности, то всегда

[1]) Способы образованія долинъ. С.-Петерб. 1878 г. стр. 63.

оказывается, что вліяніе ея доходитъ до максимума въ одной или нѣсколькихъ точкахъ теченія. Начиная съ такой точки, размытіе отступаетъ вверхъ по теченію, т. е. всякая такая точка даетъ начало къ образованію своего участка размытія, удлиняющагося верхнимъ концомъ.

Новобразующіяся накопленія наносовъ запружаютъ вышележащій участокъ теченія. Вслѣдствіе этого скорость на этомъ участкѣ уменьшается [1]) и новые наносы отлагаются нетолько поверхъ но и позади старыхъ. Такимъ образомъ участокъ отложенія тоже увеличивается своимъ верхнимъ концомъ.

---

[1]) Ср. выше то, что было сказано о подпираніи моремъ.

ГЛАВА VI.

Извилины.

Извилистость теченія есть общій характеристическій признакъ рѣкъ. Разсматривая очертанія какого угодно теченія, всегда найдемъ, что можно провести нѣкоторую идеальную линію, какъбы ось теченія. Настоящее теченіе уклоняется то въ ту, то въ другую сторону этой идеальной линіи. Изгибы теченія всегда болѣе или менѣе округлены. Сильно развитыя извилины принимаютъ форму петель. Участки теченія, совершенно лишенные изгибовъ, крайне рѣдки. У большихъ рѣкъ, гдѣ стрежень очень часто отчетливо выдѣляется среди остального теченія, извилины стрежени бываютъ обыкновенно еще болѣе изогнуты, чѣмъ извилины главнаго теченія, а иногда короче. Само собою очевидно, что за исключеніемъ нѣкоторыхъ второстепенныхъ признаковъ, извилины стрежени представляютъ собою явленіе, совершенно сходное съ извилинами самаго теченія. Точно также очевидно, что всѣ извилины, начиная отъ слабо изогнутыхъ и и кончая петлеобразными, принадлежатъ къ одной категоріи явленій.

Уже одна общность явленія доказываетъ, что происхожденіе извилинъ не можетъ быть объяснено вліяніемъ тектоники и топографіи мѣстности. Это становится особенно яснымъ, если обратимъ вниманіе на то, что наиболѣе извилистыя теченія находятся именно среди наносныхъ равнинъ. Здѣсь почва создана самой рѣкою, слѣдовательно, утверждая, что извилины обра-

зовались въ зависимости отъ строенія почвы, мы бы попали въ нѣкотораго рода «circulus vitiosus». Извилины могутъ образоваться среди абсолютно однородной и всюду одинаковой породы, среди совершенно однообразной равнины.

Уже Лекрэ [1]) говоритъ, что настоящая причина образованія извилинъ, размытіе. Тоже самое говоритъ и Ляелль. Но Зонкляръ, Бэръ, Пэшель [2]) выражаются болѣе опредѣленно. Они указываютъ на то, что въ извилинѣ вода размываетъ вогнутый берегъ и отлагаетъ наносы на выпукломъ. Такимъ образомъ извилина должна сама по себѣ все дальше развиваться.

Извилины появляются не одиноко, а цѣлыми серіями. Обыкновенно говорятъ, что это результатъ попеременнаго отраженія воды то отъ одного, то отъ другого берега, причемъ уголъ отраженія равенъ углу паденія [3]). Хотя основная мисль этого взгляда справедлива, однако подведеніе отраженія воды подъ законы отраженія твердыхъ упругихъ тѣлъ не можетъ быть строго оправдано. Отраженіе воды отъ береговъ есть сложное явленіе. Не всѣ частицы воды стремятся съ одинаковой скоростью, движеніе отражаемой струи зависитъ отъ движенія всей окружающей воды. При большой скорости, н. п. у горныхъ потоковъ, отраженіе сопровождается бурнымъ движеніемъ, образованіемъ вихрей у того мѣста, гдѣ вода ударяется о берегъ [4]). Бываютъ случаи, когда уголъ отраженія вовсе не равенъ углу

---

[1]) Le Creulx. Recherches sur la formation des rivières Paris 1804 г. стр. 52.

[2]) Sonklar Allgem. Orogr. приведено по Schneider'y. Studien über Thalbildung etc. Zeitschr. Gesell. Erdkunde. Berlin 1883 г. стр. 44.

E. v. Baer. Studien aus dem Gebiete der Naturwiss. Pet. 1873 г. стр. 125

Peschel.—Leipoldt. Phys. Erdkunde II томъ стр. 389.

[3]) Reclus-Ule. Die Erde Leipzig 1874 г. I томъ стр. 269.

Докучаевъ. Матер. для оцѣнки земель Нижег. губ. вып. XIII. С.-Пет. 1886 г. глава I стр. 8.

Никитинъ. Общая Геол. карта Россіи листъ 56. Труды Геол. ком. I, 2. стр. 110.

[4]) Водовороты въ «колѣнахъ» т. е. въ мѣстахъ отраженія встрѣчаются очень часто и у тихихъ рѣкъ.

паденія. Такъ н. п. прямая струя, встрѣчая стѣну, стоящую перпендикулярно къ направленію ея движенія, раздѣляется на двѣ струи, текущія вдоль преграды въ противуположныхъ направленіяхъ. Здѣсь уголъ паденія 0°, а углы отраженія 90° и —90°. И такъ, уголъ отраженія можетъ быть то больше, то меньше угла паденія, смотря по условіямъ.

Извилины быстрыхъ рѣкъ менѣе изогнуты, чѣмъ извилины медленныхъ. По Жильберту [1]) быстрыя, сильно размывающія рѣки стремятся удержать прямолинейное теченіе и углубить свое русло, но, приближаясь къ своему базису размытія [ср. предыдущую главу] рѣки начинаютъ блуждать и размытіе дна смѣняется размытіемъ береговъ. Причину, по которой быстрыя рѣки стремятся удержать прежнее направленіе указываетъ Рихтгофенъ, говоря [2]), что прежде чѣмъ рѣка успѣетъ размыть берегъ, русло уже углубилось, а мѣсто, гдѣ вода наиболѣе сильно размываетъ берега, очень часто и скоро передвигается то назадъ то впередъ.

Разсмотримъ сначала движеніе воды въ извилинахъ. Вода, движущаяся по поверхности земли, подвержена сложному центробѣжному ускоренію, происходящему отъ вращенія земли, о которомъ будетъ рѣчь впереди. Кромѣ того, коль скоро пути, проходимые частицами, изогнуты, то постоянно дѣйствуетъ обыкновенное центробѣжное ускореніе, всегда напирающее воду къ вогнутому берегу русла, вслѣдствіе чего поверхность воды нѣсколько приподнимается у вогнутаго берега. Въ извилинахъ большихъ рѣкъ, н. п. Дуная [3]), это возвышеніе поверхности доходитъ до нѣсколькихъ сантиметровъ [въ случаѣ Дуная до 8-ми].

---

[1]) G. K. Gilbert. Geology of Henry Mountains. Такъ какъ книга Жильберта была для меня недоступна, то привожу его мнѣніе по выноскѣ у Макъ-Джи. Mac.-Gee. Geology of the head of the Chesapeake bay. VII Ann. Rep. U. S. Geol. Surv. стр. 617.

[2]) Richthofen. Führer etc.... стр. 146.

[3]) Wagner. Hydrologische Untersuchungen Braunschweig. 1881 г. стр. 42.

Центробѣжное ускореніе пропорціонально квадрату скорости и кривизнѣ пути, притомъ всегда устремлено по направленію радіуса кривизны пути частицы изъ внутри извилины наружу. Такъ какъ всѣ частицы воды текутъ приблизительно въ одномъ направленіи, то кривизны путей различныхъ частицъ, проходящихъ въ данный моментъ сквозь извѣстное поперечное сѣченіе русла, не могутъ значительно различаться другъ отъ друга. Между тѣмъ поступательная скорость частицъ, проходящихъ сквозь разсматриваемое сѣченіе, измѣняется въ широкихъ предѣлахъ отъ нуля [въ нѣкоторыхъ мѣстахъ у береговъ] до нѣсколькихъ метровъ въ секунду [1]) [на динамической оси].

Поэтому центробѣжная сила дѣйствуетъ наиболѣе сильно на тѣ частицы, которыя въ данный моментъ обладаютъ наибольшей скоростью. Чѣмъ скорость частицы больше, тѣмъ сильнѣе она стремится къ вогнутому берегу и динамическая ось теченія, т. е. совокупность наиболѣе быстро текущихъ частицъ, перемѣщается къ вогнутому берегу и такимъ образомъ тамъ вызываетъ сосредоточеніе размывающей дѣятельности. Буссинекъ, кажется, первый [2]) замѣтилъ, что, коль скоро вода движется по каналу съ кривой осью, то поступательное движеніе непремѣнно сопровождается нѣкоторой поперечной циркуляціей. Онъ даже пытался теоретически опредѣлить скорости поперечной циркуляціи въ томъ простѣйшемъ случаѣ, когда каналъ имѣетъ видъ замкнутаго кольца. Независимо отъ Буссинека, Джемсъ Томсонъ и Мэллеръ [3]) пришли къ тому-же заключенію. Впрочемъ

---

[4]) Н. п. у того же Дуная вблизи Вѣны 3 метра въ секунду ср. Harlacher. Die Messungen an der Elbe und Donau. Leipzig 1887 г.

[1]) Boussinesq. Influence des frottements. etc. Journ. Liouv. II сер. XIII томъ §§ XI и XII.

[2]) J. Thomson. Experimental Illustrations etc. Rep. Br. Ass. 1876 г. Его болѣе обширная статья въ Proceedings Roy. Soc. была для меня недоступна.

Möller см. Günther. Geophysik II томъ Stuttgart 1885 г. стр. 601. Оригинальная статья Мэллера была тоже для меня недоступна.

уже одинъ подробный аналитическій разборъ условій теченія по кривому руслу показываетъ необходимость поперечной циркуляціи. Но и безъ анализа можно себѣ уяснить ея причину.

Центробѣжная сила гонитъ каждую частицу къ вогнутому берегу тѣмъ сильнѣе, чѣмъ ея поступательная скорость больше. Но при этомъ общемъ напорѣ воды къ вогнутому берегу, дѣйствительно передвигаются въ его сторону только частицы, обладающія наибольшей скоростью или скорѣе скоростью большей, чѣмъ нѣкоторая критическая [1]) скорость; остальныя оттѣсняются назадъ потому, что, несмотря на нѣкоторое поднятіе воды со стороны вогнутаго берега, для нихъ нѣтъ достаточнаго мѣста. Въ то время, когда частицы, бывшія на динамической оси, подходятъ къ вогнутому берегу, находившіяся тамъ болѣе медленно текущія частицы, оттѣсняются внизъ. Но первыя частицы, подходя къ берегу, испытываютъ его сопротивленіе, теряютъ свою скорость и оттѣсняются внизъ новыми частицами, подходящими съ динамической оси. Такимъ образомъ все новыя и новыя частицы опускаются ко дну, потомъ оттѣсняются вдоль его на противуположную сторону русла, тамъ опять вытѣсняются на верхъ, чтобы въ послѣдствіи опять попасть на динамическую ось. Поступательная скорость частицъ доходитъ до минимума у выпуклаго берега вслѣдствіе отдаленности сего послѣдняго отъ динамической оси.

Поперечная циркуляція зависитъ отъ разностей между скоростями, а потому ея собственныя скорости всегда незначительны. Ея значеніе состоитъ въ томъ, что, слагаясь съ поступательнымъ движеніемъ вдоль русла, она заставляетъ частицы воды не только спускаться вдоль теченія, но тоже переходить отъ одного берега къ другому. Вслѣдствіе перемѣщенія динамической оси къ вогнутому берегу, скорости теченія значительно

---

[1]) Критическая скорость вѣроятно довольно близка къ той, которой квадратъ равняется средней изъ квадратовъ всѣхъ скоростей, встрѣчающихся въ данномъ сѣченіи.

больше у этого берега, чѣмъ у выпуклаго, а потому размывающая дѣятельность сосредоточивается у вогнутаго берега. Размытыя вещества переносятся внизъ по теченію, но благодаря поперечной циркуляціи, попадаютъ къ противуположному берегу, а такъ какъ скорости теченія у выпуклаго берега именно меньше, то тамъ происходитъ отложеніе.

У тѣхъ рѣкъ, у которыхъ динамическая ось находится на значительной глубинѣ, (ср. гл. II) движенія въ верхнихъ слояхъ воды т. е. въ тѣхъ, которые находятся выше динамической оси, слагаются нѣсколько иначе и не вся вода участвуетъ въ нижнемъ круговоротѣ. Впрочемъ, движенія верхнихъ слоевъ никогда не пріобрѣтаютъ особенно большого значенія.

И такъ, при движеніи по кривому руслу дѣятельность рѣки раздѣляется на преимущественно размывающую у вогнутаго и преимущественно намывающую у выпуклаго берега [2]). Вслѣдствіе этого вогнутый берегъ отступаетъ, а выпуклый наростаетъ и, если гдѣ нибудь на теченіи рѣки образовалась самая незначительная извилина, то, благодаря самому механизму движенія рѣки, она должна увеличиваться. Благодаря обра-

---

[1]) Здѣсь невольно являетск вопросъ, не оказываетъ ли движеніе въ извилинахъ нѣкотораго вліянія на глубину динамической оси. Къ сожалѣнію мнѣ не довелось найти наблюденій или опытовъ, позволяющихъ судить объ этомъ вопросѣ. Только изъ нѣкоторыхъ теоретическихъ соображеній вывожу заключеніе, что въ извилинахъ динамическал ось теченія должна находиться сравнительно выше.

[2]) Если вогнутый берегъ вмѣстѣ съ тѣмъ правый, то размыванію кромѣ того способствуетъ сложное центробѣжное ускореніе, (ускореніе Коріолиса) происходящее отъ вращенія землм; если вогнутый берегъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ лѣвый, то ускореніе Коріолиса противудѣйствуетъ размыванію. Но почти всегда ускореніе, происходящее отъ кривизны русла значительно больше чѣмъ то, которое происходитъ отъ вращенія земли. Такъ н. п. Жильбертъ (Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 27 томъ стр. 430) вычисляетъ, что въ сильно изогнутыхъ извилинахъ Миссисипи (радіусъ кривизны 8 килом.) центробѣжное ускореніе въ слишкомъ 20 разъ больше ускоренія Коріолиса. Хотя нельзя полагаться на точность подобныхъ вычисленій, тѣмъ не менѣе они даютъ понятіе объ отношеніяхъ между извѣстными величинами. Для *точной* оцѣнки вліянія этихъ факторовъ нужно рѣшить задачу, чуть-ли не провосходящую средства современнаго анализа.

зованію извилины, участокъ теченія удлиняется, а разность уровней начала и конца извилины въ среднемъ не увеличивается. Такимъ образомъ уклонъ уменьшается, что въ свою очередь влечетъ за собою уменьшеніе скорости. Съ другой стороны, средняя кривизна теченія увеличивается по мѣрѣ развитія извилины но только до нѣкотораго предѣла. Съ того момента, какъ извилина станетъ принимать форму петли, дальнѣйшій ростъ ея уже не увеличиваетъ средней кривизны, а напротивъ того уменьшаетъ ее.

Но развитіе извилины зависитъ отъ центробѣжной силы, пропорціональной квадрату скорости и кривизнѣ. При развитіи извилины первый факторъ постоянно убываетъ, второй сначала растетъ, а потомъ тоже начинаетъ убывать. И такъ, всегда долженъ наступить моментъ, когда произведеніе обоихъ факторовъ доходитъ до максимума и ростъ извилины идетъ особенно интензивно, послѣ чего скорость ея развитія «ceteris paribus» уменьшается и наконецъ дѣлается совершенно ничтожной.

Существованіе извилинъ очень часто прекращается слѣдующимъ образомъ. Сильно развитыя извилины имѣютъ форму петель. Очень часто случается, что двѣ слѣдующія другъ за другомъ петли настолько сближаются, что раздѣляющій ихъ перешеекъ размывается въ самомъ узкомъ мѣстѣ и извилины соединяются. Рѣка съ большей силой устремляется по сокращенному а потому болѣе наклонному пути и вновь углубляетъ русло. Между тѣмъ входъ и выходъ изъ покинутаго русла засориваются и бывшая извилина превращается въ дугообразное озеро, въ старицу. Размытіе перешейковъ между извилинами чаще всего случается во время разливовъ. Нельзя сказать, чтобы въ этомъ явленіи обнаруживалось стремленіе рѣки къ сокращенію [1]) своего теченія. Это только результатъ гипертрофіи въ развитіи

---

[1]) Споръ на счетъ того, стремятся ли рѣки выпрямить свое русло или нѣтъ, довольно старый. Такъ н. п. Лекрэ (1804) споритъ съ современнымъ гидротехникомъ Фабромъ (1797) по поводу этого вопроса. Фабръ стоялъ за самоспрямленіе, Лекрэ доказываетъ противное.

извилинъ. Собственно говоря, при совершенно правильномъ и безпрепятственномъ развитіи извилинъ подобный конецъ ихъ существованія является неизбѣжнымъ, такъ какъ петлеобразныя извилины, разростаясь все дальше и дальше, должны непремѣнно [1]) прійти въ соприкосновеніе. Точно также существованіе извилины можетъ прекратиться вслѣдствіе засоренія, когда количество приносимыхъ съ верхняго теченія наносовъ увеличивается.

Извилины появляются не въ одиночку, а цѣлыми серіями. Коль скоро гдѣ нибудь на теченіи образовалась самая незначительная извилина, то выходящая изъ нея вода пересѣкаетъ русло подъ угломъ, вслѣдствіе чего динамическая ось теченія повыше и пониже извилины отклоняется къ противуположному берегу. Слѣдовательно всегда повыше и пониже извилины найдутся два такія мѣста, гдѣ вода станетъ подмывать берега, образовать выемку а за тѣмъ извилину. Это и есть отраженіе воды, о которомъ говорятъ многіе авторы (см. выше).

Новообразовавшіяся извилины даютъ поводъ къ образованію другихъ извилинъ, тѣ въ свою очередь влекутъ за собою образованіе новыхъ и т. д. Подъ вліяніемъ множества внѣшнихъ факторовъ и благодаря реакціямъ одной извилины на другую, исторія каждой изъ нихъ слагается различно. Извилины образуются, разростаются, замираютъ и опять возникаютъ, передвигаются вдоль теченія и т. д.

Въ извилинѣ вогнутый берегъ отступаетъ, а выпуклый наростаетъ. Такимъ обратомъ извилина увеличивается. Захваченныя у вогнутаго берега вещества отлагаются преимуществен-

---

[1]) Размытіе перешейковъ совершается обыкновенно во время половодья, когда вода бѣжитъ черезъ верхъ перешейка. Днѣпровскіе старожилы увѣряли проф. Докучаева, что, если перешеекъ не распаханъ, то весеннія воды Днѣпра, перекатываясь черезъ него, не въ состояніи разорвать толстый слой луговою дерна, но стоитъ только появиться небольшой бороздкѣ пареллельно весеннему теченію, и новое русло въ какіе нибудь 3 — 4 года, а иногда и скорѣе будетъ готово. См. Докучаевъ. Способы образованія долинъ. С.-Пет. 1878 г. стр. 137.

но у выпуклаго, но всегда ниже того мѣста, откуда были захвачены. Распредѣленіе этихъ отложеній зависитъ отъ мѣстныхъ условій. Если н. п. наростаніе одного берега и отступленіе другого захватываетъ и то мѣсто, гдѣ дуга, изогнутая въ одну сторону соединяется съ дугою, изогнутой въ другую и это явленіе повторяется на нѣсколькихъ извилинахъ подъ рядъ, то послѣ нѣкотораго времени извилины нетолько увеличатся, но и передвинутся внизъ по теченію. Точно также извилины могутъ передвигаться и вверхъ по теченію.

Поперечное сѣченіе русла имѣетъ болѣе симметричную форму въ томъ мѣстѣ, гдѣ дуги, обращенныя въ различныя стороны, соединяются другъ съ другомъ, но чѣмъ дальше отъ этого мѣста и ближе къ колѣну, т. е. къ тому мѣсту, гдѣ размываніе вогнутаго берега наиболѣе сильно, тѣмъ динамическая ось и стрежень ближе подступаютъ къ вогнутому берегу. Сѣченіе русла принимаетъ несимметричный видъ, оно гораздо глубже со стороны вогнутаго берега.

Буссинекъ [1]) находитъ, что глубина стрежени приблизительно равна величинѣ:

$$h\left(1 + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{a}{k}}\right)$$

гдѣ a обозначаетъ ширину
» k » радіусъ кривизны теченія въ разматриваемомъ мѣстѣ
» h » глубину, которую стрежень имѣла бы при тѣхъ-же условіяхъ но на прямомъ теченіи. По словамъ Букси-

---

[1]) Boussinesq. Essai etc. стр. 606. Очень часто на мѣстахъ соединенія изогнутыхъ въ разные стороны дугъ образуются малые перекаты. Плёсы находятся въ колѣнахъ извилинъ. Отличный примѣръ этого явленія имѣется на Рейнѣ отъ Гермерсгейма до границы Эльзаса. Глубина стрежени при среднемъ состояніи рѣки на перекатахъ иногда уменьшается до 2 метровъ—на плёсахъ увеличивается до 7 м. см. Wagner Hydrologische Untersuchungen. Braunschweig. 1881 г. стр. 23.

нека измѣренія глубины въ Гароннѣ, произведенныя Фаргомъ, (Fargue) довольно хорошо согласуются съ этой формулой.

Извилины большихъ рѣкъ имѣютъ вообще большіе размѣры, чѣмъ извилины малыхъ рѣкъ. Нетрудно указать причину этого явленія. Направленіе движенія воды въ извилинѣ измѣняется благодаря сопротивленію вогнутаго берега. Но сопротивленіе берега дѣйствуетъ непосредственно только на ту воду, которая прикасается къ нему. Значитъ, чѣмъ рѣка больше, тѣмъ меньше, сравнительно съ массой воды, площадь, въ которой сопротивленіе непосредственно дѣйствуетъ на теченіе, а потому нужно больше времени, чтобы вліяніе этого сопротивленія сообщилось всей массѣ воды. Слѣдовательно, чѣмъ больше рѣка, тѣмъ при равенствѣ прочихъ условій медленнѣе измѣняется направленіе теченія, тѣмъ больше размѣры извилинъ.

У меньшихъ рѣкъ извилины стрежени обыкновенно совпадаютъ съ извилинами теченія, съ тою только разницею, что стрежень переходитъ отъ одного берега къ другому, а потому ея извилины еще болѣе изогнуты, чѣмъ извилины самаго теченія. У большихъ же рѣкъ н. п. у Волги, случается, что само теченіе мало извилисто, а стрежень сильно извивается, причемъ его очертанія повидимому до нѣкоторой степени независимы отъ очертаній главнаго теченія.

Несмотря на наклонность рѣкъ къ образованію извилинъ, эти послѣднія бываютъ слабо развиты или крайне неправильны, если внѣшнія условія слагаются неблагопріятно. Неблагопріятныя условія встрѣчаются у слишкомъ широкихъ и сравнительно неглубокихъ рѣкъ какъ н. п. Волга. Въ широкомъ и мелкомъ руслѣ поперечная циркуляція ничтожна, кромѣ главной динамической оси появляются второстепенныя, посреди теченія оказываются мѣста, гдѣ скорость совсѣмъ незначительна. Вещества, размытыя у одного берега по большей части не попадаютъ на другой, а отлагаются посреди рѣки на отмеляхъ. Понятно, что при подобныхъ условіяхъ образованіе такихъ сильно изогнутыхъ извилинъ, какія наблюдаются у глубокихъ рѣкъ

н. п. у Миссисипи невозможно. Правильныя сильно изогнутыя извилины образуются только на стрежени, имѣющей болѣе глубокое русло и болѣе правильную поперечную циркуляцію.

Тарръ [1]) полагаетъ, что при уклонѣ въ 0,0005 извилины уже не могутъ образоваться. Не знаю на какихъ наблюденіяхъ или соображеніяхъ основано это мнѣніе. Вопервыхъ, «à priori» очевидно, что здѣсь не можетъ быть никакой рѣзкой границы даже для уклоновъ въ 0,0036—0,0039, отдѣляющихъ потоки отъ рѣкъ, такъ какъ процессъ образованія извилинъ не стоитъ въ связи съ распространеніемъ волнъ и возмущеній, совершающимся (см. гл. III) иначе у рѣкъ, а иначе у потоковъ. Значительная скорость, какъ видно изъ механизма явленія даже способствуетъ образованію извилинъ и если быстрыя рѣки мало извилисты, такъ это совершается по другой причинѣ, именно по той, на которую намекаетъ Рихтгофенъ (см. выше). Во вторыхъ нетрудно найти факты, опровергающіе мнѣніе Тарра. Притоки Бѣлой и Уфы [2]), Ай, Юрезань, Симъ, Катавъ и др. рѣки, вытекающія изъ Урала въ равнинномъ своемъ теченіи обладаютъ уклонами отъ 0,0005 — 0,0008, а между тѣмъ весьма извилисты. Впрочемъ каждый можетъ наблюдать небольшія извилины въ любомъ изъ овраговъ въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ уклоны далеко больше 0,0005.

Разсматривая движеніе воды въ извилинахъ, мы отмѣтили, что всякой извилинѣ свойственно стремленіе къ дальнѣйшему развитію, что это стремленіе сначала увеличивается, затѣмъ уменьшается. Оно дѣлается равнымъ нулю только при безконечно малой скорости. Такимъ образомъ извилины должны-бы увеличиваться до безконечности. Единственной преградой въ этомъ безконечномъ развитіи было-бы пересѣченіе однихъ извилинъ другими, о чемъ была выше рѣчь. Но, не говоря о томъ, что измѣненіе внѣшнихъ условій и реакціи между разными ча-

---

[1]) Tarr. Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 40 томъ стр. 360.

[2]) Карпинскій и Чернышевъ. Труды Геол. Ком. III, 2 стр. 40.

стями теченія прекращаютъ дальнѣйшее развитіе извилинъ,— [н. п. путемъ засоренія] ростъ извилинъ прекращается въ тотъ моментъ, когда скорости у вогнутаго подмываемаго берега сдѣлаются меньше тѣхъ предѣльныхъ скоростей, при которыхъ дальнѣйшее размытіе данной породы дѣлается невозможнымъ (ср. предъидущую главу). Если рядомъ съ этимъ отложеніе приносимыхъ съ верхняго теченія продуктовъ размытія на выпукломъ берегу не прекращается, то извилина подвергается засоренію, но если отложенія нѣтъ, а другія условія неизмѣняются, то извилина остается въ прочномъ состояніи.

Но до тѣхъ поръ, пока размытіе береговъ возможно, извилина должна развиваться и если имѣется гдѣ нибудь самая незначительная извилина, самый легкій изгибъ теченія, то этотъ изгибъ долженъ увеличиваться. Даже совершенно прямой каналъ съ симметричнымъ сѣченіемъ, съ совершенно однородными берегами сдѣлается извилистымъ, если только эти берега подвергаются размытію. Самое незначительное временное возмущеніе, въ одномъ мѣстѣ заставившее динамическую ось подойти ближе къ одному берегу чѣмъ къ другому, дастъ поводъ къ образованію цѣлой серіи извилинъ. Сначала образуется малая выемка въ одномъ берегу и небольшое скопленіе наносовъ у другого, потомъ малая, потомъ все большая и большая извилина. Но одна извилина дастъ поводъ къ возникновенію цѣлой серіи. Лучшее опытное подтвержденіе этого положенія имѣемъ въ каналахъ Пинскаго Полѣсья, которые уже успѣли по большей части подѣлаться извилистыми [1]).

Если даже берега не подвергаются размытію, но вода несетъ твердый матеріялъ, то возмущенія, временно отклоняющія динамическую ось, вызовутъ образованіе малаго скопленія наносовъ у того берега, отъ котораго удалилась динамическая ось. За этимъ скопленіемъ образуются другія отмели, распре-

[1]) Воейковъ. Пинское Полѣсье. Изв. Русск. Геогр. Общ. томъ 29. вып. II 1893 г. стр. 68.

дѣленныя попеременно то у одного, то у другого берега, а стрежень извивается между ними. Какъ примѣръ приведемъ регулированный участокъ Рейна [1]) отъ Гермерсгейма до границы Эльзаса, гдѣ наблюдаются подобныя правильно распредѣленныя отмели и извилистая стрежень. Эти отмели передвигаются внизъ по теченію, переходя приблизительно въ $2^3/_4$ года пространство, равное разстоянію двухъ слѣдующихъ другъ за другомъ извилинъ.

И такъ, образованіе и развитіе извилинъ прекращается только тогда, когда русло всюду достигло прочнаго состоянія т. е. когда во всякомъ мѣстѣ любого сѣченія скорости ниже тѣхъ предѣльныхъ скоростей, при которыхъ размытіе прекращается и когда по руслу несется вода или совсѣмъ чистая, или содержащая только тончайшую полухимически растворенную (см. гл. IV) почти неосѣдающую муть. Поэтому спрямленіе теченія не можетъ повести къ ничему, какъ только къ напрасной растратѣ капиталовъ и труда, если берега не будутъ одновременно достаточно укрѣплены на всемъ теченіи, причемъ, разумѣется, нужно, чтобы облицовка береговъ могла устоять даже во время самыхъ сильныхъ половодій.

Рѣки сами по себѣ не имѣютъ никакой наклонности спрямлять свое русло, напротивъ того онѣ склонны образовать извилины, поскольку не мѣшаетъ сопротивленіе береговъ.

Есть только одинъ случай, въ которомъ условія слагаются неблагопріятно для образованія извилинъ. Этотъ случай имѣетъ мѣсто у потоковъ и весьма быстро текущихъ рѣкъ. Центробѣжныя силы на криволинейныхъ участкахъ у быстраго теченія больше, чѣмъ у медленнаго, но за то мѣста, гдѣ въ данный моментъ извѣстная часть берега подмывается, очень часто мѣняются. Если породы мягки, то эти измѣненія совершаются почти ежедневно. Поэтому, какъ это можно видѣть во верхней части любого изъ нашихъ овраговъ (послѣ дождя), извилины

---

[1]) См. Wagner loc. cit.

хотя и появляются, но чаще всего уничтожаются прежде чѣмъ успѣваютъ развиться. Если-же потокъ или быстрая рѣка течетъ среди твердыхъ породъ, то конфигурація русла не мѣняется столь быстро, но за то болѣе сильное вліяніе оказываетъ другой факторъ, тоже мѣшающій развитію извилинъ. Въ то время, когда размытіе береговъ производится водою, содержащей развѣ одну муть и маленькія песчинки, дно истирается галькою и пескомъ. Поэтому у быстрой рѣки, текущей среди весьма твердыхъ породъ размытіе берега въ сравненіи съ углубленіемъ дна совсѣмъ ничтожно. Оно тѣмъ болѣе ничтожно, что вслѣдствіе опусканія русла внизъ, вода долбитъ берегъ все ниже и ниже. Рѣка врѣзывается все глубже и глубже и если вмѣстѣ съ тѣмъ нѣсколько перемѣщается въ горизонтальномъ направленіи, такъ это совершается скорѣе благодаря вліянію какихъ-нибудь особенностей въ тектоническомъ строеніи п. п. благодаря наклонному залеганію пластовъ, чѣмъ благодаря тѣмъ процессамъ, которые ведутъ къ образованію извилинъ.

Итакъ у быстрыхъ рѣкъ извилины возможны только въ такомъ случаѣ, когда въ прежнемъ историческомъ развитіи рѣки была фаза, благопріятная для образованія извилинъ и когда эти извилины сохранились. Замѣчательный примѣръ подобнаго явленія наблюдается у Колорадо. Эта чрезвычайно быстрая рѣка тѣмъ не менѣе обладаетъ большими извилинами. Въ далекомъ прошломъ рѣка [1]) текла въ гораздо болѣе высокомъ (относительно) уровнѣ, имѣла малый уклонъ, медленное и извилистое теченіе. Затѣмъ, вслѣдствіе нѣкоторыхъ геологическихъ происшествій, о которыхъ здѣсь нечего говорить, уклонъ сильно увеличился, рѣка стала быстро углублять свое русло, но сохранила очертанія стараго теченія. Слѣды сего послѣдняго еще видны въ такъ называемой эспланадѣ. Форма долины, знаменитый каньонъ Колорадо лучше всего доказываетъ, что эти

---

[1]) Dutton. Tert. history. of the Grand Canon district. II Monograph U. S. Geol. Survey. стр. 219

извилины унаслѣдованы, сохранены отъ прежняго теченія: въ каньонѣ не видно слѣдовъ размытія одного берега и нарастанія другого, не видно, чтобы извилины развивались, разширялись и т. д. Есть только слѣды самаго интензивнаго вертикальнаго углубленія. Послѣднему въ высокой степени способствовало однообразіе геологическаго строенія страны и замѣчательная горизонтальность пластовъ, а потому можно сказать, что горизонтальное напластованіе и однообразіе строенія способствовали сохраненію древнихъ извилинъ. Кстати замѣтимъ, что тѣ же условія въ высокой степени способствуютъ правильному развитію извилинъ. Въ мѣстности съ пестрымъ и сложнымъ строеніемъ и рельефомъ извилины всегда будутъ болѣе или менѣе неправильны.

Образованію знаменитаго каньона Колорадо способствовали тоже твердость породъ и сухость климата. Иначе вертикальныя стѣны въ тысячи метровъ высоты не могли бы сохраниться.

Благопріятныя условія для образованія извилинъ очень часто встрѣчаются у медленныхъ рѣкъ, текущихъ среди мягкихъ породъ. Эти рѣки обыкновенно находятся въ томъ состояніи, при которомъ размытіе дна или почти, или съ избыткомъ уравновѣшивается отложеніемъ. Въ тоже самое время въ болѣе быстро текущихъ струяхъ, окружающихъ динамическую ось, скрывается энергія, достаточная для замѣтнаго размытія берега, особенно если тотъ состоитъ изъ мягкихъ породъ. Единственной помѣхой для образованія извилинъ бываетъ иногда чрезмѣрная ширина русла, но въ такомъ случаѣ извилины образуются по крайней мѣрѣ на стрежени.

И такъ неудивительно, что равнинныя рѣки по большей части весьма извилисты. Въ наносныхъ равнинахъ въ мѣстахъ, гдѣ намывающая дѣятельность сильно преобладаетъ надъ размытіемъ, образованіе извилинъ идетъ рядомъ съ другими явленіями: съ раздѣленіемъ на рукава, съ проложеніемъ новыхъ руслъ.

Въ весьма рыхлыхъ породахъ извилины не прочны, онѣ скоро разростаются, но быстро исчезаютъ. Если къ тому рѣка страдаетъ сильными половодьями, то конфигурація русла вообще и извилинъ спеціально мѣняется почти ежегодно.

Наиболѣе благопріятныя условія для образованія правильныхъ и прочныхъ извилинъ бываютъ у рѣкъ, обладающихъ небольшой скоростью среди твердыхъ породъ. Подобныхъ рѣкъ мало, время нужное для образованія извилинъ велико, а потому этотъ типъ наблюдается сравнительно рѣже.

У рѣкъ, текущихъ среди твердыхъ породъ, даже самыя сильныя половодья мало измѣняютъ конфигурацію русла. Они только способствуютъ болѣе сильному размытію существующихъ уже формъ. Конечно, это размытіе сопровождается измѣненіемъ формы русла, но далеко не въ тѣхъ предѣлахъ, какъ у рѣкъ, текущихъ среди рыхлыхъ породъ.

Случается, что и другія обстоятельства слагаются благопріятно: геологическое строеніе мѣстности на большихъ пространствахъ бываетъ однообразно, породы горизонтальны (случай Днѣстра въ Подольскомъ Силурѣ), рѣка одновременно размываетъ берега и углубляетъ русло, причемъ размытіе берега есть величина конечная въ сравненіи съ размытіемъ дна, а не ничтожная, какъ это бываетъ у быстрыхъ рѣкъ, текущихъ среди твердыхъ породъ.

Вслѣдствіе одновременнаго углубленія русла и размытія береговъ въ извилинахъ, долины рѣкъ этого типа принимаютъ совершенно своеобразную форму. Выпуклые берега извилинъ сопровождаются высокими, крутыми, даже отвѣсными (въ горизонтально наслоенныхъ породахъ) скатами, вогнутые сопровождаются пологими склонами, па которыхъ во многихъ мѣстахъ разсѣяны рѣчныя отложенія. Только тамъ, гдѣ двѣ въ разныя стороны изогнутыя дуги соединяются другъ съ другомъ, долина принимаетъ симметричную форму, въ иныхъ случаяхъ (н. п. на Днѣстрѣ) она даже имѣетъ видъ каньона. Чертежъ (F. 3)

изображаетъ схэму разрѣза долины Днѣстра въ колѣнахъ т. е. въ вершинахъ извилинъ, разумѣется съ преувеличенными вертикальными размѣрами. Пунктиромъ обозначены очертанія сѣченія долины въ разное время, причемъ 5 обозначаетъ современныя очертанія, *А* вогнутый, *В* выпуклый берегъ. Заштрыхованныя мѣста обозначаютъ отложенія наносовъ на выпукломъ берегу, причемъ самые древніе залегаютъ выше прочихъ. Кромѣ извилинъ Днѣстра въ области Подольскаго Силурійскаго плато можно привести много подобныхъ случаевъ н. п. рѣки Арденновъ, особенно Сэмуа (Semois) [1]), рѣки, текущія въ области Пририйнскихъ горъ [2]) и т. д.

Иногда, обходя какое нибудь препятствіе, или по другой причинѣ рѣка дѣлаетъ повороты, сходные съ извилинами. При условіяхъ благопріятныхъ для образовая извилинъ, за такой «вынужденной» извилиной иногда слѣдуетъ нѣсколько «свободныхъ», но, если условія неблагопріятны, то «вынужденная» извилина обыкновенно остается одинокой.

Въ странахъ гористыхъ, гдѣ натуральныя покатости обладаютъ значительной крутизной, молодыя рѣки обыкновенно текутъ быстро по направленіямъ, опредѣляемымъ рельефомъ и тектоникой мѣстности, — ихъ извилины находятся въ зачаточномъ состояніи. По мѣрѣ уменьшенія скорости и уклоновъ углубленіе дна слабѣетъ, размытіе береговъ сравнительно усиливается, теченіе дѣлается болѣе извилистымъ. Въ странахъ равнинныхъ рѣки по большей части и были и остаются извилистыми.

Припомнимъ еще разъ, что горизонтальное напластованіе, однообразный рельефъ и однородность породъ способствуютъ правильному развитію извилинъ; сложный рельефъ и сложная тектоника мѣшаютъ ему.

---

[1]) Penck. Belgien. Länderkunde von Europa. Leipzig 1889 г. стр. 518.

[2]) Ср. Schneider. Studien Ueber Thalbildungen aus der Vordereifel. Zeitschr. Gesell. für Erdkunde Berlin 1883 г. стр. 43 и слѣд.

И здѣсь и въ прежней главѣ мы говорили о породахъ твердыхъ и мягкихъ, хотя въ твердости есть безчисленныя градаціи и различія. Этотъ способъ выраженія былъ для насъ удобенъ, всякій пойметъ, что признакъ, свойственный твердымъ породамъ долженъ выражаться тѣмъ рѣзче, чѣмъ порода тверже, тѣмъ слабѣе, чѣмъ порода мягче.

ГЛАВА VII.

Форма русла.

Для отдѣльныхъ участковъ рѣки, находящихся въ установившемся состояніи (ср. гл. II) мыслимы такія формы русла, при которыхъ во всякомъ мѣстѣ всякаго сѣченія количество сверху приносимаго и отлагаемаго матеріала равно количеству размываемаго и уносимаго внизъ. Подобное состояніе мыслимо только въ прямолинейномъ каналѣ, ибо въ криволинейномъ каналѣ (ср. гл. VI) дѣятельность рѣки раздѣляется на преимущественно размывающую у одного и преимущественно намывающую у другого берега. Но въ свою очередь (ср. гл. VI) движеніе въ прямомъ каналѣ неустойчиво. Самое небольшое возмущеніе даетъ поводъ къ размыванію одного берега и намыванію другого и къ преобразованію прямого канала въ извилистый. Поэтому состояніе полнаго равновѣсія неосуществимо. Возможны только состоянія приблизительнаго равновѣсія, въ которыхъ за извѣстный промежутокъ времени н. п. за годъ въ извѣстный участокъ теченія вносится столько-же продуктовъ размытія, сколько изъ него было вынесено. Но это состояніе само по себѣ не связано еще съ какой-нибудь спеціальной конфигураціей русла. Съ другой стороны, не смотря

на приблизительное равновѣсіе между размытіемъ и отложеніемъ, въ руслѣ могутъ произойти тѣ и другія измѣненія.

Уже въ V гл. мы указали на прочныя состоянія русла т. е. такія, въ которыхъ нѣтъ нигдѣ ни размытія ни отложенія. Когда рѣка и ея притоки, малые и большіе нигдѣ не размываютъ, то тѣмъ самымъ и отложеніе всюду отсутствуетъ, но до такого состоянія рѣчная система можетъ дойти, строго говоря, только послѣ безконечнаго времени. Наблюдаются только такія состоянія, при которыхъ на извѣстномъ болѣе или менѣе длинномъ участкѣ берега и дно даже во время самыхъ сильныхъ половодій почти не подвергаются размытію, а съ другой стороны накопленія отложеній или вовсе не образуются или образуются временно и скоро опять размываются и уносятся [1]).

Подобное состояніе русла можно назвать прочнымъ, ибо оно почти неизмѣняется дѣятельностью самой рѣки и можетъ существовать до тѣхъ поръ, пока внѣшнія условія, н. п. климатъ, орографія страны и т. д. не подвергаются измѣненіямъ.

Можно разсматривать различныя состоянія рѣкъ, какъ состоянія переходныя, болѣе или менѣе близкія къ прочнымъ состояніямъ. Многія рѣки находятся въ состояніи близкомъ къ прочному, а потому свойственныя этому состоянію формы русла представляютъ большой интересъ.

Эти формы зависятъ отъ многихъ условій. Такъ н. п. въ извилинѣ измѣненія конфигураціи русла прекращаются только тогда, когда въ одно и тоже время скорость у подмываемаго берега окажется недостаточной для преодолѣнія сопротивленія породы, составляющей этотъ берегъ, а у намываемаго берега, гдѣ вода и безъ того давно не размываетъ, скорости окажутся какъ разъ достаточными для перенесенія тѣхъ продуктовъ размытія, которые приносятся съ верхняго теченія. Если количество этихъ продуктовъ и величина ихъ не увеличивается, (хотя можетъ уменьшаться) то форма русла можетъ сохраниться.

---

[1]) Сюрелль называетъ такой участокъ: Canal d'écoulement.

Значитъ, упроченіе формы русла въ данномъ случаѣ зависитъ заразъ отъ нѣсколькихъ факторовъ.

Обыкновенная форма русла несимметрична, съ наибольшей глубиной со стороны вогнутаго берега. Образованные намываніемъ подводные склоны и берега пологи, берега, созданные размытіемъ, круче. Большинство рыхлыхъ породъ не могутъ образовать крупныхъ подводныхъ склоновъ. Такъ н. п. сыпучія породы по Тулэ [1]) даже при самыхъ благопріятныхъ условіяхъ, въ совершенно тихой водѣ не могутъ образовать склоновъ, которыхъ уклонъ превышаетъ 41^0. Въ подвижной водѣ уголъ покоя еще меньше, особенно, если скорость протекающей вдоль нихъ воды мало-мальски значительна. Наконецъ, чѣмъ выше подводный склонъ, тѣмъ вообще крутизна его должна быть меньше, ибо нижняя часть высокаго склона легче подвергается обвалу вслѣдствіе давленія сверху лежащихъ пластовъ.

Для русла, проложеннаго среди однородной породы, минимальное мыслимое отношеніе наибольшей ширины къ наибольшей глубинѣ равно приблизительно [2]) 2:1.

Это отношеніе возможно только тогда, когда динамическая ось находится на серединѣ теченія, когда породы, составляющія стѣны русла, не обсыпываются и не обваливаются. Но, если даже послѣднее условіе исполняется, то уже благодаря одной несимметричности сѣченія отношеніе наибольшей ширины къ глубинѣ всегда должно быть больше, чѣмъ 2:1, Динамическая ось всегда находится ближе къ одному чѣмъ къ другому берегу и русло можетъ сдѣлаться прочнымъ или приблизительно прочнымъ то-

---

[1]) Thoulet см. Forel. Le Léman Lausanne 1892 г. стр. 47. У подножія самаго крутого подводнаго склона точно какъ у подножія всякаго склона на поверхности суши находится осыпь, состоящая изъ упавшихъ съ него-же кусковъ породы.

[2]) Еслибы динамическая ось находилась въ самой поверхности, то соотвѣтственная форма сѣченія должнабы быть полукруглая. Динамическая ось почти всегда находится нѣсколько ниже. Какая форма соотвѣтствуетъ этому положенію динамической оси, неизвѣстно съ точностью.

гда, когда берегъ, находящійся близко къ динамической оси не размывается даже во время половодій. Само собою очевидно, что подобное состояніе возможно только тогда, когда ширина русла значительно превышаетъ глубину.

Въ искусственномъ каналѣ можно создать какія угодно отношенія между шириной и глубиной, если сдѣлать стѣны изъ прочнаго матеріяла и вмѣстѣ съ тѣмъ установить такой уклонъ, что протекающая вода не будетъ въ состояніи размывать берега, однако и въ искусственныхъ каналахъ, не облицеванныхъ твердымъ матеріяломъ, которыхъ стѣны могутъ подвергаться размытію, отношеніе ширины къ глубинѣ должно быть всегда больше, чѣмъ 2:1.

Нѣкоторые практики, какъ н. п. Редтенбахеръ [1]) утверждаютъ, что отношеніе средней ширины къ глубинѣ не должно быть меньше 2,7:1. Онъ предлагаетъ слѣдующую эмпирическую формулу:

$$\frac{b}{e} = 2,7 + 0,9a$$

гдѣ b обозначаетъ среднюю ширину
» e » » глубину
» a » площадь сѣченія, причемъ предполагается, что всѣ эти величины выражены въ метрахъ. Русла рѣкъ образуются подъ вліяніемъ ихъ собственной дѣятельности—отчасти путемъ размытія, отчасти путемъ отложенія, но всегда и всюду при какомъ угодно состояніи рѣки динамическая ось находится не на срединѣ теченія а ближе то къ одному, то къ другому берегу, всегда во время образованія русла рядомъ съ вертикальнымъ возвышеніемъ или углубленіемъ происходятъ перемѣщенія въ горизонтальномъ направленіи и русло всегда пріобрѣтаетъ размѣры, въ которыхъ отношеніе ширины къ глубинѣ больше минимальнаго.

---

[1]) Redtenbacher. см. Rühlmann Hydromech. стр. 432.

Исключенія, впрочемъ совершенно мѣстныя, возможны только тамъ, гдѣ на днѣ находятся большія ямы. Онѣ обыкновенно попадаются въ такъ наз. колѣнахъ т. е. въ мѣстахъ перегиба извилинъ. Въ такихъ мѣстахъ вода, отталкиваемая отъ береговъ, очень часто попадаетъ во вращательное движеніе. Если дно не состоитъ изъ твердаго вещества, то водоворотъ долбитъ яму, иногда весьма глубокую. На Днѣстрѣ вблизи устья, гдѣ глубина на стрежени въ среднемъ не больше 4 саж., иныя ямы имѣютъ вдвое и втрое большую глубину.

Почти столь-же характеристичнымъ явленіемъ какъ извилины, является чередованіе участковъ, гдѣ рѣка расширяется, съ такими участками, гдѣ она съуживается, или чередованіе такъ называемыхъ *перекатовъ* съ такъ называемыми *плёсами*. Если для извѣстной рѣки на достаточно длинномъ участкѣ опредѣлимъ средній уклонъ, среднюю ширину и глубину, то на перекатахъ рѣка обладаетъ большимъ уклономъ, большей шириной и меньшей глубиной, чѣмъ средніе, на плёсахъ она обладаетъ меньшимъ уклономъ, меньшей чѣмъ средняя шириной, но за то большей глубиной.

«За исключеніемъ небольшихъ участковъ, всякое теченіе» говоритъ Доссъ [1]) «состоитъ изъ нѣсколько съуженныхъ кусковъ, обладающихъ меньшимъ уклономъ, перемежающихся съ съ участками, расширяющимися на болѣе или менѣе срѣзанныхъ (tronqués) конусахъ отложенія и обладающими большимъ уклономъ». Ольдгэмъ [2]) говоритъ, что можно раздѣлить всякое теченіе на рядъ перемежающихся участковъ, гдѣ рѣка то расширяется, то съуживается, причемъ на первыхъ участкахъ глубина меньше, а уклонъ больше, чѣмъ на вторыхъ. Участки перваго рода т. е. перекаты Ольдгэмъ называетъ вѣерами (*fans*), участки второго рода онъ называетъ *reaches*. Слово: *reach* обо-

---

[1]) Dausse. Etudes d'hydr. pratique. Mem. Sav. Etr. томъ 20 стр. 311.

[2]) Oldham. On the law, that governs the action of flowing streams. Quart. Journ. Geol. Soc. London. 1888 г. стр. 835.

значаетъ прямой участокъ теченія, а потому оно пожалуй не совсѣмъ удачно выбрано. Такъ н. п. рѣки на нижнемъ теченіи по большей части обладаютъ всѣми характеристическими чертами плёса: большой глубиной, узкимъ русломъ, малымъ паденіемъ—а рядомъ съ этимъ онѣ обыкновенно бываютъ извилисты.

Уже въ предъидущей главѣ мы указывали на то, что теорія и опытъ согласны въ томъ, что въ колѣнахъ, т. е мѣстахъ перегиба извилинъ глубина доходитъ до максимума. Это тоже характеристическая черта плёса. Напротивъ того въ мѣстахъ перехода отъ одной дуги къ слѣдующей часто попадаются отмели, несмотря на то, что въ этихъ мѣстахъ русло имѣетъ видъ болѣе или менѣе прямолинейнаго канала.

Ольдгэмъ указываетъ на то, что на перекатѣ въ широкомъ и мелкомъ руслѣ поверхность, въ которой происходитъ треніе о стѣны русла значительно больше, чѣмъ на плёсѣ, обладающемъ большой глубиной и узкимъ русломъ, а потому не смотря на большій уклонъ, средняя скорость на перекатѣ можетъ быть почти равна средней скорости на плёсѣ. «И въ томъ, и въ другомъ случаѣ» говоритъ онъ [1]) «скорость остается такой, какая нужна для того, чтобы рѣка могла переносить свой грузъ». Другими словами онъ разсматриваетъ плёсы и перекаты какъ двѣ различныя прочныя формы теченія, причемъ подъ прочнымъ состояніемъ онъ такъ-же какъ Дуттонъ и Поуэлль понимаетъ состояніе полнаго насыщенія. Съ этимъ послѣднимъ взглядомъ мы не согласны, такъ какъ прочное состояніе прежде всего зависитъ отъ отношенія периферическихъ скоростей къ сопротивленію породъ; что касается насыщенія, то единственное условіе состоитъ въ томъ, чтобы оно не превышало того предѣла, при которомъ начинается выдѣленіе твердыхъ веществъ, но оно можетъ быть сколько угодно меньше этого предѣла.

---

[1]) loc. cit. стр. 735 «the velocity in each case being such, as will just enable the stream to transport its burden of débris».

Ольдгэмъ полагаетъ, что перекаты образуются на накопленіяхъ наносовъ. Если н. п. рѣка выходитъ изъ горъ на равнину, гдѣ уклонъ ея внезапно уменьшается, то у выхода отлагаются наносы и образуютъ конусъ отложенія. Рѣка расширяется на конусѣ—даже иногда раздѣляется на рукава и стекаетъ тонкой но широкой струей по поверхности конуса. Наносы отлагаются одни на другихъ и одни позади другихъ до тѣхъ поръ, пока уклонъ поверхности конуса отложенія не сдѣлается настолько значительнымъ, что рѣка уже оказывается въ состояніи переносить продукты размытія не отлагая ихъ по пути. Предѣльный уклонъ, при которомъ рѣка перестаетъ отлагать осадки на перекатѣ очевидно тѣмъ больше, чѣмъ крупнѣе переносимый матеріялъ—а потому уклонъ поверхности конуса отложенія «ceteris paribus» [1]) тѣмъ больше, чѣмъ крупнѣе тѣ вещества, изъ которыхъ онъ состоитъ.

Мнѣніе Ольдгэма подтверждается такъ его собственными наблюденіями надъ нѣкоторыми индѣйскими потоками, какъ наблюденіями другихъ авторовъ. Такъ н. п. Уорренъ [2]) замѣчаетъ, что въ руслѣ Миссисипи послѣ впаденія каждаго изъ болѣе крупныхъ притоковъ находится накопленіе его наносовъ, на которомъ главная рѣка расширяется и пріобрѣтаетъ большій уклонъ, но за то дѣлается болѣе мелкой. Повыше устья притока находится участокъ, обладающій малымъ уклономъ, глубокимъ и узкимъ русломъ т. е. участокъ, имѣющій всѣ характеристическія черты плёса.

Само собою очевидно, что на всякомъ накопленіи наносовъ, образовавшемся на днѣ рѣки, долженъ находиться перекатъ, все равно произошло ли накопленіе отъ того, что рѣка должна была отлагать наносы вслѣдствіе уменьшенія уклона

---

[1]) Съ другой стороны у большихъ рѣкъ уклонъ поверхности конуса отложенія «ceteris paribus» меньше, чѣмъ у малыхъ, ибо при томъ самомъ уклонѣ скорость большой рѣки больше.

[2]) Warren. Valley of Missisipi and Minnesota. Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 16 томъ стр. 420.

—или отъ того, что тѣмъ или другимъ притокомъ приносились продукты размытія настолько крупные, что главная рѣка не была въ состояніи переносить ихъ.

Но кромѣ того перекаты должны непремѣнно образоваться тамъ, гдѣ дно оказываетъ большее сопротивленіе размытію, чѣмъ берега. Потому-то выходы твердыхъ породъ на днѣ сопровождаются перекатами.

На перекатахъ дно всегда каменисто или потому, что здѣсь обнажаются твердыя породы, или потому, что здѣсь залегаетъ крупная галька, принесенная самой рѣкой или какимъ нибудь притокомъ. Поэтому ключъ къ объясненію характеристическихъ свойствъ перекатовъ находится не въ происхожденіи ихъ изъ бывшихъ участковъ отложенія наносовъ, какъ думаетъ Ольдгэмъ, а въ различіи между свойствами породъ, составляющихъ дно и берега. Они не пріурочены ко всякимъ участкамъ накопленія наносовъ, но только къ такимъ, гдѣ на днѣ залегаетъ болѣе крупный матеріялъ чѣмъ тотъ, который отлагается на берегахъ.

Можно различать перекаты, образовавшіеся преимущественно путемъ размытія. Они появляются тамъ, гдѣ берега состоятъ изъ породы, легко подвергающейся размытію, а дно изъ породы, оказывающей большое сопротивленіе. Скорости, при которыхъ прекращается размытіе дна, значительно больше тѣхъ, при которыхъ прекращается размытіе береговъ. Прочная форма русла, соотвѣтствующая этимъ условіямъ, должна отличаться большимъ уклономъ, большой глубиной и малой шириной, ибо въ руслѣ, обладающемъ подобными чертами, возможно сочетаніе большой скорости у дна съ малой скоростью у береговъ.

Съ другой стороны можно различать перекаты, образовавшіеся путемъ отложенія, причемъ нужно, чтобы это отложеніе происходило извѣстнымъ образомъ, именно нужно, чтобы матеріялы отлагались на днѣ, а не на берегу. Тогда возвышеніе дна непремѣнно ведетъ къ расширенію, ибо рѣка должна раз-

ливаться въ сторону. Потому-то перекаты пріурочены къ накопленіямъ гальки и крупнаго песку, которые й передвигаются по дну и отлагаются на днѣ.

Напротивъ того устьевые участки рѣкъ очень часто имѣютъ характеръ плёсовъ несмотря на то, что тѣже участки очень часто характеризуются рѣшительнымъ преобладаніемъ отложенія. Возьмемъ н. п. Днѣстръ. На всемъ теченіи въ предѣлахъ Австрійской и Русской Подоліи онъ обиленъ перекатами: на одномъ участкѣ отъ Могилева до Выхватинецъ (около 200 верстъ) насчитываютъ не меньше 34 большихъ и меньшйхъ перекатовъ [1]). На многихъ перекатахъ во время низкаго состоянія воды глубина не доходитъ до аршина—ширина рѣки значительна. Даже на плёсахъ глубина Днѣстра не особенно велика. Но вблизи устья отъ Бендеръ до лимана, уклонъ уменьшается, рѣка съуживается и значительно углубляется (глубина не меньше 3 — 4 сажень), дно и низкіе берега (плавни) состоятъ изъ ила, принесеннаго самой рѣкой. Дѣло въ томъ, что Днѣстръ здѣсь несетъ преимущественно муть, которая выдѣляется и осѣдаетъ весьма медленно. Вслѣдствіе этого на днѣ здѣсь осѣдаетъ мало мути—отложеніе ея происходитъ главнымъ образомъ на берегахъ, когда во время паводковъ рѣка выходитъ изъ русла, заливаетъ плавни и застаивается на нихъ. Послѣ всякаго разлива можно видѣть новые слои ила, отложенные на берегахъ. Такимъ образомъ устьевой участокъ Днѣстра пріобрѣлъ характеръ плёса. Съуженіе и углубленіе русла вблйзи устья среди наносныхъ равнинъ наблюдается тоже у Миссисипи, у Желтой рѣки и у многихъ другихъ рѣкъ.

Мы здѣсь указали на плёсы, образовавшіеся на участкахъ, характеризуемыхъ преобладаніемъ отложенія. Точно также участки размытія пріобрѣтаютъ характеръ плёсовъ, коль скоро условія слагались такъ, что размытіе дна могло происходить

---

[1]) Большинство изъ нихъ обусловлены выходами болѣе твердыхъ слоевъ на днѣ.

болѣе или по крайней мѣрѣ столь-же энергично, какъ размытіе береговъ. Особенно глубокіе плёсы образуются передъ отступающими водопадами. Ниспадающая въ водопадѣ вода долбитъ внизу яму, удлиняющуюся вверхъ по теченію по мѣрѣ того какъ водопадъ отступаетъ.

Тоже самое, но въ болѣе слабой степени, имѣетъ мѣсто передъ отступающими порогами и перекатами.

Ольдгэмъ полагаетъ, что бывшіе участки размытія, гдѣ рѣка углублялась вертикально и вслѣдствіе этого образовала узкій каналъ, даютъ начало плёсамъ. Дѣйствительно можно себѣ представить, что углубленіе русла на участкѣ размытія продолжается даже при меньшемъ уклонѣ чѣмъ тотъ, который установился на нижележащемъ участкѣ отложенія. Крупная галька, накопившаяся внизу и давшая поводъ къ образованію переката, была вынесена съ вышележащаго участка размытія еще въ то время, когда онъ отличался большимъ уклономъ. Съ теченіемъ времени размытіе ослабѣло, съ участка размытія выносились все болѣе и болѣе мелкіе матеріялы, наконецъ настолько мелкіе, что ничто изъ нихъ не отлагалось на нижеслѣдующемъ перекатѣ. Размытіе прекратилось при уклонѣ далеко меньшемъ, чѣмъ уклонъ на перекатѣ, сложившійся во время отложенія крупнозернистыхъ наносовъ.

Нѣтъ сомнѣнія что плёсы, находящіеся повыше перекатовъ, образовавшихся на накопленіяхъ наносовъ, произошли изъ бывшихъ участковъ размытія, если, разумѣется, здѣсь не было условій, способствующихъ образованію того вида переката, который попадается на участкахъ размытія. [Мы имѣемъ въ виду тотъ случай, когда дно въ данномъ мѣстѣ оказываетъ большее сопротивленіе размытію, чѣмъ берега].

Такимъ образомъ можно разсматривать подобные плёсы какъ нормальные участки теченія. Они болѣе глубоки, менѣе широки чѣмъ перекаты не потому, что здѣсь были или есть условія, способствующія образованію особенно глубокаго и уз-

каго русла но потому, что перекаты суть исключительно широкіе и мелководные участки теченія а плёсы сравнительно съ ними оказываются глубокими и узкими.

Если перекатъ находится на накопленіи наносовъ, принесенныхъ притокомъ или происшедшемъ отъ какого нибудь обвала стѣнъ долины, то вышележащій участокъ теченія подвергается запруженію. Запруженіе влечетъ непремѣнно за собою возвышеніе уровня воды и уменьшеніе уклона. Само собою понятно, что возвышеніе уровня воды выражается увеличеніемъ глубины вышележащаго участка. Такимъ образомъ вышележащій участокъ пріобрѣтаетъ одну изъ характеристическихъ чертъ плёса.

Перекаты отличаются большимъ уклономъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ широкимъ и мелкимъ русломъ. Гораздо рѣже встрѣчаются *стремнины*, обладающія большимъ уклономъ а вмѣстѣ съ тѣмъ узкимъ и глубокимъ русломъ. Само собою понятно, что скорость теченія на стремнинахъ бываетъ особенно велика. Онѣ образуются только въ весьма твердыхъ породахъ, гдѣ даже при самомъ большомъ приближеніи динамической оси къ берегу размытіе послѣдняго было всегда незначительно, гдѣ въ тоже самое время, благодаря присутствію гальки и песку и большой скорости дно размывалось энергично и рѣка углублялась почти вертикально. Примѣромъ могутъ послужить знаменитыя стремнины Дуная въ Желѣзныхъ Воротахъ.

Рихтгофенъ [1]) говоритъ, что форма русла зависитъ отъ распредѣленія силъ во время половодья. Дѣйствительно въ это время рѣка обладаетъ большей энергіей, больше размываетъ, больше переноситъ и больше отлагаетъ, чѣмъ въ остальное время года. Можно сказать, что встрѣчаются рѣки, которыя во время низкаго состоянія воды только пользуются русломъ, созданнымъ половодьями. Къ сожалѣнію вопросъ о зависимости формы русла отъ годичныхъ измѣненій расхода непосредственно связанъ съ теоріей перемѣннаго состоянія рѣкъ, которая, какъ

---

[1]) Führer стр. 153.

это было замѣчено во вступленіи и во второй главѣ, находится въ весьма неудовлетворительномъ состояніи.

Поэтому мы ограничимся только нѣкоторыми замѣчаніями. Вольтманъ [1]) указываетъ на то, что существуетъ нѣкоторая форма русла (см. F. 4), при которой средняя скорость и отношеніе глубины къ ширинѣ всегда (т. е. для какого угодно расхода) остается постоянной. Въ виду сохраненія постоянной скорости можно бы подумать, что форма (4) есть прочная.

Но не говоря о томъ, что для прочнаго состоянія нужны не столько постоянныя среднія, сколько непревышающія извѣстнаго предѣла подонныя и прибрежныя скорости, не говоря о томъ, что предположенія, сдѣланныя при теоретическомъ выводѣ этой формулы произвольны, замѣтимъ, что форма (4) невозможна уже потому, что размытіе создаетъ не выпуклые (вверхъ) а вогнутые подводные склоны. Только склоны, образуемые намываніемъ, могутъ быть выпуклыми.

Еслибы у извѣстной рѣки русло образовалось и измѣнялось только во время половодья, а въ остальное время года рѣка только пользовалась имъ, то оно имѣло-бы размѣры, соотвѣтствующіе количеству воды, протекающему во время половодья, — а въ остальное время рѣка занимала-бы только самую нижнюю часть русла, покрывая дно болѣе или менѣе толстымъ слоемъ воды.

Но обыкновенно русло соотвѣтствуетъ нѣкоторому среднему состоянію рѣки, излишекъ воды во время половодья выступаетъ изъ русла. У рѣкъ, возвышающихъ свое русло, излишекъ просто распространяется по заливной долинѣ. У размывающихъ рѣкъ, текущихъ въ глубокихъ ущельяхъ, разливъ заполняетъ ущелье до нѣкотораго уровня; по многимъ размывающимъ или размывавшимъ рѣкамъ свойственно двухъярусное

---

[1]) См. Rühlmann Hydromechanik стр 436. Связь между абсциссой x и ординатой y (см. F. I) выражается слѣдующей формулой

$$x = c\, log\, nat.(y + \sqrt{y^2 - c^2}) + A.$$

(см. F. V) русло, состоящее изъ нижняго болѣе узкаго русла, соотвѣтствующаго среднему состоянію рѣки (lit mineur) и верхняго яруса, широкой поймы, служащей вмѣстилищемъ для воды во время половодья (lit majeur). Замѣчательный примѣръ двухъярусного русла на Ян-тсе-кіангѣ въ горномъ ущельи приводится у Рихтгофена [1]).

И русло и пойма [2]) имѣютъ опредѣленные берега (въ заливной долинѣ нѣтъ опредѣленныхъ вторыхъ береговъ). Очевидно двухъярусная форма соотвѣтствуетъ двумъ состояніямъ водъ—среднему и самому высокому.—Кажется, что стреженью, рѣзко выдѣляющейся среди русла, выражается зависимость формы русла отъ третьяго, самаго низкаго состоянія рѣки [3]).

Отношеніе между глубиною и шириною у поймы меньше, чѣмъ у русла. Уклонъ рѣки одинъ и тотъ-же во всякое время года, породы, среди которыхъ она протекаетъ, однѣ и тѣ-же. Сравнимъ теперь двѣ рѣки, протекающія среди однѣхъ и тѣхъ-же породъ, всюду находящіяся въ одних и тѣхъ-же условіяхъ и обладающія однимъ и тѣмъ-же уклономъ, но различающіяся расходомъ. Если введемъ условіе, чтобы обѣ рѣки находились въ приблизительно прочномъ состояніи (т. е. въ томъ, въ которомъ размытіе дѣлается ничтожнымъ), то окажется, что у большей рѣки отношеніе между шириною и глубиною должно быть значительно больше, чѣмъ у малой. Именно, въ широкомъ и мелкомъ руслѣ треніе о берега и дно значительно больше, чѣмъ у узкой и глубокой, а потому скорости въ большей рѣки точно также какъ въ малой могутъ остаться меньше тѣхъ предѣльныхъ скоростей, при которыхъ вода можетъ размывать данную породу. И такъ, различіе между относительными размѣрами поймы и русла объясняется стремленіемъ къ тому, чтобы создать приблизительно прочную форму русла, приноровленную къ двумъ различнымъ состояніямъ рѣки.

---

[1]) Führer. etc. стр. 206.

[2]) Позволяю себѣ придать словамъ «пойма» и «заливная долина» нѣкоторыя спеціальныя значенія.

[3]) Въ такомъ случаѣ можно-бы различать даже трехъярусныя русла.

ГЛАВА VIII.

Перемѣщеніе русла подъ вліяніемъ внѣшнихъ причинъ и вслѣдствіе реакцій между рѣкою и притоками.

Словцовъ [1]) первый объяснялъ передвиженіе русла сибирскихъ рѣкъ съ запада на востокъ вліяніемъ вращенія земли. Независимо отъ него Бэръ высказалъ подобное мнѣніе относительно рѣкъ Россіи и другихъ странъ. Но и Бэръ и Словцевъ, а за ними многіе даже современные геологи и географы полали и полагаютъ, что вращеніе земли не оказываетъ никакого вліянія на рѣки, текущія вдоль параллелей. Это мнѣніе ложно. Въ механикѣ доказывается, что поступательное движеніе земли не оказываетъ вліянія на характеръ движенія тѣлъ, движущихся по поверхности земли, но вращательное движеніе даетъ поводъ къ нѣкоторому ускоренію, называемому ускореніемъ Коріолиса или сложнымъ центробѣжнымъ ускореніемъ. Ускореніе Коріолиса дается формулой:

$$2\omega . \upsilon . \sin\alpha \qquad (1)$$

гдѣ ω есть угловая скорость вращенія земли

» υ » поступательная скорость разсматриваемаго тѣла относительно земли.

» α » уголъ между сѣверной частью полярной оси земли и моментальнымъ направленіемъ скорости: υ.

---

[1]) Middendorff. Sibir. Reise Mem. Acad. St. Pet. IV томъ, I часть, 2 вып., стр. 244.

Если разсматриваемое тѣло находится подъ широтою λ и направленіе его движенія составляетъ съ меридіаномъ даннаго мѣста, считаемый по часовой стрѣлкѣ уголъ β (азимутъ), если обозначимъ вертикальную слагающую скорости тѣла посредствомъ u, а горизонтальную посредствомъ: w, то вертикальная слагающая сложнаго центробѣжнаго ускоренія будетъ:

$$-2\omega . w . \sin\beta . \cos\lambda$$

а горизонтальная:

$$-2\omega[w . \sin\lambda + u . \cos\beta . \cos\lambda] \qquad (2)$$

Изъ этого видно, что обѣ слагающія сложнаго центробѣжнаго ускоренія зависятъ отъ азимута. Но, если движеніе совершенно горизонтально [2]), то u равно нулю и ускореніе независитъ отъ азимута. Вертикальная его слагающая равна нулю, а горизонтальная будетъ:

$$-2\omega . w . \sin\lambda \qquad (3)$$

Эта формула употребляется въ метеорологіи и въ физической географіи, такъ какъ, разсматривая движенія воды и воздуха, можно чаще всего пренебречь вліяніемъ вертикальной слагающей скорости. Ускореніе Коріолиса всегда перпендикулярно къ направленію движенія. Оно дѣйствуетъ въ сѣверномъ полушаріи вправо, въ южномъ въ влѣво отъ направленія движенія.

Разсужденія о вліяніи вращенія земли переполнены заблужденіями. Такъ н. п. говорятъ о разности давленій на лѣвый и правый берегъ, когда здѣсь дѣло въ движеніи а не въ давленіи, сравниваютъ сложное центробѣжное ускореніе съ ускоре-

---

[1]) Baer. Ueber ein allgemeines Gesetz in der Gestaltung von Flussbetten. Bullet. Acad. St. Petersburg 1860 г. тоже Studien aus dem Gebiete der Naturwiss. стр. 120.

[2]) т. е. совершается по поверхности шара. Для эллипсоида наши формулы вѣрны только приблизительно.

ніемъ силою тяжести [1]) и, разумѣется, находятъ, что это последнее несравненно больше и т. п.

Кажется, что только американскіе ученые Жильбертъ и Бэнъ понимаютъ вопросъ, какъ слѣдуетъ. Жильбертъ [2]) сравниваетъ ускореніе вслѣдствіе вращенія земли съ центробѣжнымъ ускореніемъ въ извилинахъ Миссисипи и находитъ, что эти величины одинаковаго порядка. Бэнъ [3]) замѣчаетъ, что ускореніе вслѣдствіе вращенія земли совершенно сравнимо съ ускореніемъ вдоль теченія. Дѣйствительно, съ этимъ ускореніемъ, а не съ величиною: g (9,8 метра въ секунду) слѣдуетъ сравнивать ускореніе Коріолиса, ибо вода въ рѣкахъ не падаетъ вертикально, а стекаетъ по наклоннымъ поверхностямъ. Чтобы дать понятіе объ отношеніи между ускореніемъ вдоль теченія и ускореніемъ Коріолиса, возьмемъ слѣдующій примѣръ. Средняя скорость теченія Волги равна 1,4 метрамъ въ секунду, уклонъ: 0,00004, слѣдовательно, ускореніе вдоль теченія, если вмѣсто $sin i$ подставимъ i [4]) будетъ:

$$g \cdot i = 9{,}81 \times 0{,}00004 = 0{,}00039 \text{ метр. въ сек.}$$

Съ другой стороны, подставляя въ формулу: (3), $w = 1{,}4$ $sin\lambda = sin 50^0 = 0{,}776$, $\omega = \frac{2\pi}{86164}$, гдѣ $\pi = 3{,}141.....$ найдемъ, что ускореніе Коріолиса въ данномъ случаѣ составляетъ 0,000156 метр. въ сек. т. е. больше двухъ пятыхъ ускоренія

[1]) Насколько вижу изъ Гюнтера (Günther. Lehrbuch der Geophysik II томъ, Stuttgart 1885 г. стр. 602. (оригинальная статья Цэпприца была для меня недоступна), даже Пэпприцъ плохо понималъ это явленіе. Онъ доказываетъ, что возвышеніе уровня воды у праваго берега незначительно. Это правда, но дѣло не въ возвышеніи уровня воды, которое зависитъ отъ отношенія ускоренія Коріолиса къ ускоренію силой тяжести т. е. къ g а въ сравнительно болѣе сильномъ подмываніи праваго берега, которое зависитъ отъ отношенія ускоренія Коріолиса къ ускоренію вдоль теченія т. е. къ $g \times sin i$. Гюнтеръ, очевидно. тоже не понимаетъ вопроса.

[2]) G. K. Gilbert. The sufficiency of the terrestrial rotation for the deflection of streams. Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 27 томъ, стр. 430.

[3]) Baines. On the sufficiency... Amer. Journ. of Sc. 3 сер. 28 томъ стр. 434.

[4]) Это позволительно, такъ какъ i есть весьма малая величина.

вдоль теченія. Замѣтимъ, что ускореніе вдоль теченія пропорціонально уклону, а ускореніе Коріолиса пропорціонально скорости т. е. (ср. гл. II) возрастаетъ не только по мѣрѣ увеличенія уклона, но тоже по мѣрѣ увеличенія размѣровъ русла. Слѣдовательно, при томъ-же уклонѣ ускореніе Коріолиса тѣмъ больше, чѣмъ больше разсматриваемая рѣка.

Не слѣдуетъ полагать, что н. п. у Волги, гдѣ ускореніе, происходящее отъ вращенія земли равно двумъ пятымъ ускоренія вдоль теченія, скорость, съ которой вода подвигается къ правому берегу, равна двумъ пятымъ скорости вдоль теченія. Напротивъ того, скорость и ускореніе двѣ различныя вещи [1]). Но если ускореніе Коріолиса равно двумъ пятымъ ускоренія вдоль теченія, то можно навѣрно сказать, что значительная доля энергіи рѣки идетъ именно на разрушеніе праваго берега.

Такъ какъ частицы воды движутся съ различными скоростями, а ускореніе, происходящее отъ вращенія земли, пропорціонально скорости, то къ правому берегу дѣйствительно направляются только тѣ частицы воды, которыя обладаютъ скоростью большей, чѣмъ извѣстная критическая скорость; остальныя оттѣсняются назадъ къ лѣвому берегу. Благодаря отклоненію наиболѣе быстро текущихъ струй вправо, динамическая ось теченія перемѣщается къ правому берегу. Здѣсь происходитъ нѣчто подобное, какъ при движеніи воды въ извилинахъ (ср. гл. V), здѣсь тоже возникаетъ медленная поперечная циркуляція, точно также способствующая перенесенію размытыхъ у праваго берега веществъ на лѣвый. Такъ какъ въ извилинахъ вода подмываетъ то правый, то лѣвый берегъ, а ускореніе вслѣдствіе вращенія земли способствуетъ подмыванію праваго берега но мѣшаетъ подмыванію лѣваго, то, хотя центробѣжное ускореніе въ извилинахъ почти всегда больше ускоренія вслѣд-

---

[1]) Чтобы теоретически вычислитъ скорость, съ которой вода въ каналѣ данной величины съ даннымъ уклономъ устремляется къ правому берегу нужно рѣшить задачу, превосходящую средства современнаго анализа.

ствіе вращенія земли [1]), въ концѣ концовъ. если тому не мѣшаютъ постоянныя причины, сообщающія ускореніе влѣво причины, рѣка въ общемъ должна передвигаться вправо.

Кромѣ вращенія земли есть еще другіе факторы, дающіе поводъ къ перемѣщеніямъ русла. Стефановичъ [2]) и Клингэ [3]) придаютъ особенное значеніе дѣйствію вѣтра. Русло Дуная въ Венгріи ежегодно передвигается на западъ на 0,47, а русло Тиссы на 0,31 метровъ. Стефановичъ объясняетъ это передвиженіе дѣйствіемъ Кошавы, сильнаго юго-восточнаго вѣтра. Онъ указываетъ на удары волнъ, возбуждаемыхъ преобладающимъ вѣтромъ и размывающихъ преимущественно западный берегъ, на занесеніе русла пескомъ, навѣваемымъ вѣтромъ [4]). Клингэ утверждаетъ, что сибирскія рѣки передвигаются на востокъ потому, что лѣтомъ, когда онѣ вскрыты отъ льда въ Сибири дуютъ западные вѣтры, Волга-же потому отступаетъ на западъ, что въ Поволжьи лѣтомъ господствуютъ восточные вѣтры.

---

[1]) Ускореніе вслѣдствіе вращенія земли пропорціонально скорости и факторъ пропорціональности, какъ это видно изъ формулы (3), всегда малый. Центробѣжное ускореніе въ извилинахъ пропорціонально квадрату отъ скорости и факторъ пропорціональности: кривизна въ иныхъ случаяхъ бываетъ довольно большой. У Миссисипи въ иныхъ мѣстахъ центробѣжное ускореніе слишкомъ въ двадцать разъ больше, чѣмъ ускореніе вслѣдствіе вращенія земли.

[2]) См. Die Seitenverschiebung der Flüsse. Gaea. 1881 стр. 705.

[3]) Klinge. Ueber den Einfluss der Windrichtung etc. Englers Botan. Jahrb. XI стр. 264.

[4]) Является вопросъ, не возбуждаетъ-ли вѣтеръ нѣкоторыхъ теченій, способствующихъ перенесенію веществъ съ одного берега на другой.

Не вся энергія передаваемая вѣтромъ водѣ (ср. гл. II), идетъ на возбужденіе волнъ. Часть ея идетъ на возбужденіе поступательныхъ движеній. Такъ какъ берегъ мѣшаетъ движенію поперекъ русла, то оно должно непремѣнно перейти въ поперечную циркуляцію въ родѣ той, которая поддерживается центробѣжнымъ ускореніемъ и вращеніемъ земли. Разница состоитъ въ томъ, что вѣтеръ дѣйствуетъ непосредственно только на верхній слой воды, кромѣ того дѣйствіе вѣтра не зависитъ отъ поступательной скорости частицъ вдоль русла. Эта циркуляція всегда слаба и измѣняется вслѣдствіе измѣненія вѣтра. Весьма сомнительно, чтобы она могла имѣть существенное значеніе для перемѣщенія русла.

Хотя принципъ, защищаемый Стефановичемъ и Клингэ совершенно справедливъ, но изъ этого еще не слѣдуетъ, чтобы, какъ это дѣлаютъ указаные авторы, отрицать вліяніе вращенія земли. Оба фактора то слагаются, то противудѣйствуютъ другъ другу. Точно также воздѣйствіе притоковъ и направленіе паденія пластовъ имѣютъ вліяніе на перемѣщеніе русла.

Доказательства приводимыя Стефановичемъ и Клингэ вовсе не убѣдительны. Такъ н. п. Дунай и Тисса передвигаются вправо. Слѣдовательно можно сказать, что ихъ передвиженіе вызвано одновременно дѣйствіемъ Кошавы и вращеніемъ земли. Съ другой стороны замѣтимъ, что вѣтры предполагаемые г. Клингэ всегда почему то дуютъ въ ту-же сторону, въ которую дѣйствуетъ вращеніе земли, а истинные вѣтры дуютъ пожалуй не совсѣмъ такъ. На счетъ распредѣленія вѣтровъ въ Сибири у меня нѣтъ достаточныхъ данныхъ, но и г. Клингэ ихъ тоже не имѣлъ, если основалъ свое мнѣніе на наблюденіяхъ Финша [1]); который, кажется, былъ не особенно долго на Оби. Что касается Поволжья, то данныя есть, но онѣ не говорятъ въ пользу мнѣнія г. Клингэ. Вопервыхъ у Воейкова [2]) находимъ слѣдующее:

Вѣтры лѣтомъ	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Пенза	14	10	5	10	6	19	15	22
Самара	18	20	9	2	5	11	32	3
Оренбургъ	20	16	13	4	7	11	17	12
Астрахань	6	16	15	19	6	12	12	14

Изъ этого видно, что на станціяхъ сѣвернаго Поволжья лѣтомъ, когда на Волгѣ нѣтъ льда, преобладаютъ западные вѣтры, за то въ Астрахани балансъ слагается въ пользу восточныхъ вѣтровъ. Кромѣ того изъ разсмотрѣнія лѣтописей главной Метеорологической Обсерваторіи за 1886—1890 годы для станцій: Нижній, Казань, Тетюши, Буинскъ, Симбирскъ, Сама-

[1]) loc. cit. стр. 302.

[2]) Воейковъ. Климаты земного шара. С.-Пет. 1884 г. стр. 444.

ра, Сызрань, Вольскъ, Саратовъ, Дубовка, Николаевскъ и Камышинъ оказалось, что на станціяхъ сѣверной части Поволжья до Сызрани и годичный и лѣтній балансъ слагаются въ пользу вѣтровъ, дующихъ съ западныхъ румбовъ. Перевѣсъ оказался и количественный и качественный, т. е. западные вѣтры сильнѣе. На южномъ Поволжьи отношенія изъ году въ годъ болѣе измѣнчивы, на нѣкоторыхъ станціяхъ наблюденія недостаточно полны, но въ общемъ, кажется, лѣтомъ восточные вѣтры преобладаютъ надъ западными. Слѣдовательно по г. Клингэ Волга около Казани, Симбирска, Самары должнабы передвигаться влѣво, а дальше на югъ вправо, между тѣмъ она всюду передвигается вправо т. е. рѣшающее вліяніе въ данномъ случаѣ принадлежитъ вращенію земли.

Вліяніе вращенія земли и вѣтровъ должно особенно сильно сказываться у рѣкъ, текущихъ въ мягкихъ породахъ и мало углубляющихъ русло, притомъ тамъ, гдѣ пласты залегаютъ горизонтально. Само собою очевидно, что вліяніе внѣшнихъ причинъ отходитъ на второй планъ тамъ, гдѣ рельефъ разнообразный и тектоническое строеніе сложно, тамъ, гдѣ быстрая рѣка врѣзается вертикально въ твердыя породы, но мало размываетъ берега.

Точно также перемѣщеніе широкой но мелководной рѣки не можетъ достигать тѣхъ размѣровъ, что перемѣщеніе равной по расходу глубокой и узкой рѣки. Вообще здѣсь можно повторить тѣ-же замѣчанія относительно благопріятныхъ и неблагопріятныхъ условій, которыя уже были высказаны по поводу перемѣщенія русла при образованіи извилинъ.

Съ другой стороны, какъ это было выше отмѣчено, вращеніе земли оказываетъ большее вліяніе на большія рѣки, чѣмъ на малыя, поэтому неудивительно, что подмываніе правыхъ береговъ особенно замѣтно на нижнемъ равнинномъ теченіи большихъ рѣкъ, а въ равнинной Россіи, въ ея мягкихъ почвахъ, замѣчается и на малыхъ рѣкахъ, какъ это за немногими ис-

ключеніями наблюдается н. п. на рѣкахъ Нижегородской губерніи [1]).

Одна изъ причинъ передвиженія русла состоитъ въ наклонности пластовъ, разумѣется, за исключеніемъ того случая, когда рѣка течетъ перпендикулярно къ ихъ простиранію. Сопротивленіе, оказываемое размытію, больше въ направленіи перпендикулярномъ къ напластованію, чѣмъ въ продольномъ [обратное бываетъ только тамъ, гдѣ есть цѣлая сѣть перпендикулярныхъ трещинъ]. Поэтому рѣка какъ-бы соскользаетъ по пластамъ. Разумѣется, значеніе наклонности пластовъ усиливается твердыми прослойками. Этотъ способъ передвиженія особенно важенъ для тѣхъ участковъ рѣкъ, которые находятся въ размывающемъ состояніи.

Вѣрными признаками передвиженія русла служатъ слѣды старыхъ руслъ, обрывистые берега, состоящіе изъ породъ, несомнѣнно неотложенныхъ рѣкою въ связи съ несомнѣнно рѣчными наносами на противуположномъ низкомъ берегу.

Въ конфигураціи долины встрѣчаются очень часто черты, на первый взглядъ указывающія на перемѣщеніе рѣки, но обусловленныя неравномѣрнымъ развитіемъ склоновъ долины. Такъ н. п. склонъ, выставленный на дѣйствіе обильныхъ дождемъ вѣтровъ, бываетъ иногда болѣе крутой чѣмъ противуположный [2]), водораздѣлы, находящіеся между параллельными притоками большой рѣки [3]), удаляются отъ одного притока, и приближаются къ другому, благодаря неравномѣрному размытію склоновъ долинъ вторичными притоками (т. е. притоками притоковъ) и т. д.

Когда притокъ приноситъ больше продуктовъ размытія, чѣмъ рѣка можетъ переносить, то у устья его накопляются наносы. Очень часто накопленія достигаютъ такихъ размѣровъ, что главная рѣка принуждена обходить ихъ. Разумѣется,

---

[1]) Докучаевъ. Матеріалы и т. д. вып. XIII гл. I стр. 64.
[2]) Rucktäschel Ungleichseitigkeit etc. Pet. Mitth. 1889 г. стр. 224.
[3]) Hilber. Asymmetrische Thäler. Pet. Mitth. 1886 г. стр. 171.

это возможно только тогда, когда рѣка успѣваетъ соотвѣтственно подмывать противуположный берегъ. Въ противномъ случаѣ дѣло можетъ дойти до запруженія и до образованія озера. Форель [1]) склоненъ думать, что нѣчто подобное способствовало образованію Женевскаго озера.

Рядъ притоковъ, впадающихъ съ одной стороны и приносящихъ много наносовъ можетъ отодвигать теченіе главной рѣки. Такъ какъ обильные продуктами размытія притоки выходятъ изъ высокихъ горъ, то Пэшель [2]) говоритъ, что рѣки, текущія параллельно къ высокимъ горамъ, стремятся удалиться отъ нихъ.

Миссисипи вмѣсто того, чтобы перемѣщаться вправо, отодвигается влѣво. Давно [3]) уже было высказано мнѣніе, что это результатъ воздѣйствія правыхъ притоковъ, болѣе многоводныхъ и приносящихъ болѣе наносовъ. Реклю [4]) сомнѣвается въ многоводности правыхъ притоковъ и склоненъ думать, что это результатъ общей покатости страны и пластовъ къ востоку.

Полагаютъ тоже, что кромѣ односторонняго запруженія русла и долины передвиженію Миссисипи содѣйствуетъ само толканье водою притоковъ, въ подтвержденіе чего приводятъ, что послѣ впаденія Красной Рѣки (Red-River) [5]) Миссисипи принимаетъ направленіе своего притока.

Нѣтъ сомнѣнія, что подобное толканье всегда имѣетъ мѣсто, но выражается-ли оно въ перемѣщеніи русла, это дру-

---

[1]) Forel. Le Léman. Lausanne 1892 г. стр. 247 и слѣд.

[2]) Peschel. Neue Probleme 1870 г. стр. 134. Ср. Seitenverschiebung etc.... Gaea 1881 стр. 712.

[3]) Lyell. Principles (во фр. пер. II томъ Paris 1842 стр. 352).

[4]) Reclus. Geographie Universelle томъ XVI Paris 1892 г. стр. 352.

[5]) Shaler. Fresh water Morasses. 10 Ann Rep. U. S. Geol. Surv. стр. 279.

Вопросъ о перемѣщеніи Миссисипи влѣво повидимому не исчерпанъ. Кажется, что точныхъ данныхъ о количествѣ твердыхъ веществъ, приносимыхъ каждымъ притокомъ отдѣльно, вовсе нѣтъ, а потому нельзя высказаться въ пользу того или другого мнѣнія.

гой вопросъ. Состояніе рѣки всегда одновременно зависитъ отъ множества различныхъ условій, а потому тѣ же причины въ различныхъ случаяхъ производятъ различные результаты. Такъ н. п. «à priori» можно сказать, что толканье оказываетъ самое незначительное дѣйствіе на рѣки сильно углубляющія свое русло. Тѣ же рѣки обыкновенно въ состояніи подобрать наносы, приносимые притоками, а потому не подвержены одностороннему запруженію русла. Съ другой стороны, заставляя свои притоки тоже врѣзываться все глубже и глубже, онѣ вмѣстѣ съ тѣмъ способствуютъ упроченію устья послѣднихъ на одномъ мѣстѣ. Напротивъ того, рѣки, мало углубляющіяся, несущія много продуктовъ размытія, отлагаютъ свои наносы у устьевъ притоковъ. Струя воды, выходящей изъ притока дѣйствуетъ какъ запоръ и даетъ поводъ къ мгновенному уменьшенію скорости и выдѣленію наносовъ. На любой картѣ можно замѣтить, что притоки, подходящіе къ главной рѣкѣ среди наносныхъ равнинъ, поворачиваютъ какъ бы отталкиваемые главной рѣкою и наконецъ соединяются съ нею подъ острымъ угломъ. Примѣромъ могутъ послужить притоки Рейна между Базелемъ и Майнцомъ [1]). Однако не всегда можно сказать, что соединеніе подъ острымъ угломъ произошло отъ передвиженія устья притока. Генкель [2]) приводитъ случай подобной конфигураціи, происшедшей отъ того, что притокъ воспользовался старымъ русломъ главной рѣки. Когда рѣка возвышаетъ свое русло болѣе быстро чѣмъ притоки, то въ результатѣ оказывается запруженіе устьевъ послѣднихъ и образованіе озеръ.

Наконецъ, какъ замѣчаетъ Стефановичъ [3]), передвиженіе русла въ тропическихъ странахъ можетъ быть иногда обусловлено заростаніемъ.

---

[1]) Ср. Lapparent. loc. cit. стр. 212. Онъ ошибается, говоря, что скопленія наносовъ не образуются пониже соединенія двухъ рѣкъ.

[2]) Henkel. Das Umbiegen der Nebenflüsse. Peterm. Mitth. 1889 г. стр. 176

[3]) Ср. Seitenverschiebung etc. .. стр. 718.

ГЛАВА IX.

Нѣкоторыя замѣчанія объ образованіи долинъ.

На разныхъ участкахъ, даже въ разныхъ мѣстахъ того-же сѣченія рѣки приходятъ въ соприкосновеніе съ различными породами. Результаты ихъ дѣятельности въ высокой степени зависятъ отъ свойствъ породъ. При томъ же расходѣ, формѣ и величинѣ русла, при тѣхъ-же скоростяхъ, размытіе береговъ и дна, состоящаго изъ гранита можетъ быть въ сотни и тысячи разъ меньше, чѣмъ размытіе береговъ и дна, состоящаго изъ глины. Уже въ главѣ объ извилинахъ мы указывали на то, что размытіе твердыхъ породъ совершается путемъ истиранія пескомъ и галькою, а потому идетъ успѣшно только при большой скорости, что оно сосредоточивается на днѣ рѣки, а потому ведетъ къ образованію узкихъ и глубокихъ долинъ. Равнымъ образомъ мы указывали на то, что въ рыхлыхъ породахъ даже при малой скорости размытіе береговъ значительно. Потому то въ рыхлыхъ породахъ рѣка перемѣщается и подъ вліяніемъ внѣшнихъ причинъ, какъ н. п. вращенія земли и подъ вліяніемъ свойственной рѣкамъ наклонности къ образованію извилинъ. Если ея дѣятельность характеризуется преобладаніемъ размытія, то въ результатѣ оказывается образованіе широкой [сравнительно съ глубиною] долины, если же ея дѣятельность характеризуется преобладаніемъ отложенія, то въ результатѣ оказывается образованіе широкой наносной равнины.

Если рѣка попеременно протекаетъ то среди лучше сопротивляющихся, то среди хуже сопротивляющихся размытію породъ, то это очень часто сказывается на горизонтальныхъ очертаніяхъ ея теченія.

Зюссъ [1]) сравниваетъ Дунай съ веревкой, висящей на нѣсколькихъ гвоздяхъ. Подобно тому, какъ веревка свисаетъ дугами [2]) отъ одной точки повѣса до другой, точно также Дунай зацѣпляется за горы [3]), а между горами изгибается огромными дугами вправо. Веревка свисаетъ подъ вліяніемъ силы тяжести, Дунай изгибается вправо вслѣдствіе вращенія земли.

На теченіи Волги есть тоже одно мѣсто, гдѣ она зацѣпляется за твердыя породы, именно за твердый горный [4]) известнякъ каменноугольной формаціи. Это мѣсто находится на Самарской Лукѣ у Жегулевскихъ высотъ. Уже баронъ Розенъ [5]) высказалъ мысль, что Самарская Лука вѣроятно образовалась вслѣдствіе того, что Волга повыше и пониже Жегулевскихъ высотъ въ продолженіе многихъ вѣковъ передвигались вправо, а на этомъ мѣстѣ или очень мало или вовсе не передвинулась.

Въ самомъ фактѣ передвиженія Волги вправо нельзя сомнѣваться. Высокій правый берегъ сопровождаетъ рѣку отъ Нижняго-Новгорода до раздѣленія на рукава. Лѣвый берегъ низкій и страна постепенно поднимается къ востоку. Однимъ словомъ поперечное сѣченіе долины именно такое, какое должно образоваться у рѣки, отступающей на западъ да притомъ

---

[1]) См. Peters. Die Donau Leipzig 1876 г. стр. 351.

[2]) Собственно говоря это особыя кривыя, такъ наз. цѣпочки.

[3]) Дунай врѣзывается въ твердыя породы около Кремса (Богемскій массивъ) около Вѣны (въ отроги Альпъ), дальше около Вайцена, потомъ около Орсовы (Желѣзныя ворота) наконецъ въ Мачинскія горы въ сѣверо западномъ углу Добручи. Ср. Peters loc. cit. стр. 368 тоже Suess Antlitz der Erde I томъ Prag 1885 г. стр. 612.

[4]) Павловъ. Самарская Лука и Жегули. Труды Геол. Ком. томъ II, № 5 стр. 62.

[5]) Статья Розена помѣщена въ Трудахъ IV Съѣзда. Къ сожалѣнію она осталась для меня недоступной.

весьма медленно углубляющей русло. Современныя [1]) наблюденія свидѣтельствуютъ о томъ, что по большей части подмывается правый берегъ, историческія [2]) данныя доказываютъ тоже самое.

По самой величинѣ Самарской Луки можно судить, что Волга передвинулась вправо въ общемъ на болѣе чѣмъ восемдесятъ верстъ. Для такого перемѣщенія нуженъ весьма большой промежутокъ времени. Въ сравнительно недавнее геологическое время въ исторіи Волги случилось событіе, вслѣдствіе котораго ея отступленіе къ западу было временно прекращено, ибо сама рѣка [3]) временно перестала существовать. Мы говоримъ о каспійской трансгрессіи, во время которой море въ видѣ длиннаго залива простиралось до низовьевъ Камы. Очевидно, трансгрессія воспользовалась готовой низменностью т. е. старой долиной Волги. Ея западная граница была обозначена старымъ нагорнымъ правымъ берегомъ Волги. Въ настоящее время этотъ старый берегъ уже не существуетъ. Послѣ отступленія трансгрессіи Волга потекла по старой долинѣ, опять стала передвигаться вправо, подступила къ своему старому нагорному берегу, игравшему нѣкоторое время роль морского берега, подмыла его и унесла. Только тамъ, гдѣ вслѣдствіе зацѣпленія за Жегулевскіе твердые известняки рѣка не передвигается вправо, тамъ на правомъ нагорномъ берегу Волги, на южномъ склонѣ Самарской Луки, на высотѣ 104 м. надъ уровнемъ Каспія находятся каспійскіе осадки, какъ это было обнаружено Павловымъ [4]).

---

[1]) Ср. Докучаевъ Матеріялы для оцѣнки земель Нижегородской губ. вып. XIII С.-Пет. 1886 г. гл. I, стр. 7 и слѣд.

[2]) Ср. Baer. Studien aus dem Gebiete der Naturwissenschaften S.-Petersburg 1873 г. стр. 127.

Тоже Мушкетовъ Физ. Геол. II часть С.-Пет. 1888 г. стр. 247.

[3]) По крайней мѣрѣ на участкѣ отъ устья Камы до впаденія въ море.

[4]) См. Никитинъ. Изв Геол. Ком. V стр. 252.

Въ настоящее время [1]) на лѣвомъ берегу за полосой современнаго аллювія, ширина которой достигаетъ 3—15 верстъ, т. е. за поймой Волги слѣдуютъ постпліоценовыя прѣсноводныя отложенія Волги и ея притоковъ; за ними находятся осадки отчасти неопредѣленнаго характера, отчасти несомнѣнно оставленные каспійской трансгрессіей. Все это совершенно натурально и не даетъ повода къ какимъ-бы то ни было сомнѣніямъ или затрудненіямъ. Но слѣдуетъ отмѣтить важный фактъ, что подъ каспійскими осадками на востокъ отъ Волги и на югъ отъ Камы, находятся песчано-глинистые или песчано-галечниковые слои прѣсноводнаго происхожденія [2]). По всей вѣроятности это наносы древней Волги и ея притоковъ, отложившіеся раньше вторженія Каспія въ долину Волги. Конечно та древняя Волга, которая существовала до каспійской трансгрессіи, во многомъ различалась отъ современной, но она тоже текла съ сѣвера на югъ, тоже зацѣплялась за Жегулевскія высоты и образовала уже, хотя меньшую чѣмъ теперь, Самарскую Луку.

О причинахъ каспійской трансгрессіи здѣсь говорить не мѣсто. Замѣтимъ только мимоходомъ, что слѣдуетъ à priori исключить поднятія и опусканія въ области самой Волжской долины, такъ какъ здѣсь нѣтъ слѣдовъ какихъ-нибудь геотектоническихъ измѣненій, относящихся къ этому времени. Во вторыхъ, слѣдуетъ исключить вліяніе притяженія скандиново-русскимъ ледникомъ. Послѣ работъ Гергезеля, Дрыгальскаго, особенно же Удварда [3]) не остается никакихъ сомнѣній, что измѣненія геоида, обусловленныя притяженіемъ ледяныхъ покрововъ, въ большинствѣ случаевъ незначительны.

---

[1]) Ср. Кроговъ Казанское Закамье. Труды Казанскаго Общ. Естеств. XXII стр. 67 и слѣд.

Розенъ. Отчетъ о геол. экскурсіяхъ. Казань 1879 г.

Никятинъ статьи въ Извѣстіяхъ Геол. Ком. томъ V и VII.

Чернышевъ статьи въ Извѣстіяхъ Геол. Ком. томъ VII.

[2]) Кротовъ. loc. cit. стр. 298 и 299.

[1]) Woodward. U. S. Geol. Survey Bulletin № 48.

Когда вдоль теченія твердыя породы перемежаются съ мягкими, то на участкахъ съ твердыми [1]) породами должна образоваться узкая, на участкахъ съ мягкими широкая долина. «Долина Миннесоты» говоритъ Уорренъ [2]) расширяется всюду, гдѣ стѣны ея состоятъ изъ мягкихъ породъ, съуживается, гдѣ породы тверже». Долина въ родѣ долины Миннесоты на первый взглядъ наводитъ на мысль, что здѣсь былъ рядъ озеръ, впослѣдствіи соединившихся въ рѣку. Такъ какъ озеровидныя расширенія очень часто попадаются у рѣкъ южной и средней Россіи, то Докучаевъ [3]) высказываетъ мысль, что и эти рѣки по большей части образовались изъ рядовъ озеръ, хотя первоначально эта теорія была создана для рѣкъ той части Россіи, которая нѣкогда находилась подъ ледниковымъ покровомъ. Противъ этого взгляда были высказаны [4]) многія вѣскія возраженія. Указывалось на то, что озеровидныя расширенія долинъ всегда продолговаты, что онѣ наблюдаются у степныхъ рѣкъ т. е. въ мѣстахъ, гдѣ пожалуй никогда не было климатическихъ условій, благопріятныхъ для образованія озеръ. Кромѣ того имѣемъ нѣкоторое право предполагать, что въ данномъ случаѣ истинная прячина заключается во вліяніи различнаго сопротивленія породъ. По крайней мѣрѣ Докучаевъ замѣчаетъ [5]), что въ Нижегородской губерніи съуженія долинъ чаще всего совпадаютъ съ возвышеніями нагорнаго берега. Это совпаденіе объясняется весьма просто, если допустимъ, что тѣ-же самыя породы, которыя лучше сопротивлялись размытію атмосферной водою, малыми рѣчками и т. д. и вслѣдствіе этого остались въ видѣ возвышенностей, вмѣстѣ съ тѣмъ лучше сопротивлялись и сопротивляются размытію рѣкою. Это тѣмъ болѣе вѣ-

---

[1]) Ср. Richthofen Führer стр. 168.

[2]) Warren. Valley of Minnesota and Missisipi. Amer. Journ. of Science 3 сер. 16 томъ стр. 424.

[3]) Докучаевъ. Способы образованія долинъ. Стр. 215—218 и др.

[4]) См. Никитинъ. Общая Геол. карта Россіи листъ 56. Труды Геол. Ком. томъ I № 2, стр. 118 и слѣд.

[5]) Докучаевъ. Матеріялы и т. д. I гл. стр. 23.

роятно, что вовсе неособенно значительныя различія въ твердости породъ достаточны для того, чтобы дать поводъ къ образованію замѣтныхъ расширеній и съуженій. Что-же касается озерныхъ отложеній въ долинахъ рѣкъ, то съ употребленіемъ ихъ какъ доказательства озернаго происхожденія рѣкъ слѣдуетъ быть весьма осторожнымъ, такъ какъ они весьма легко могутъ происходить отъ древнихъ старицъ рѣки.

Долина Рейна отъ Базеля до Бингена имѣетъ видъ большого продолговатаго озернаго бассейна. Она слѣва ограждена Вогезами, справа Шварцвальдомъ, спереди прирейнскими горами [1]). (Таунусъ, Гундсрюкъ). Узкая и глубокая долина отъ Бингена до Боннъ служитъ истокомъ для этого бассейна. Мнѣніе, что здѣсь дѣйствительно было нѣкогда озеро, попало даже въ Бэдекеръ, однако Рамзей [2]) думаетъ, что предполагаемый озерный бассейнъ вымытъ самимъ Рейномъ. Есть слѣды того, что вся эта долина была прежде заполнена міоценовыми отложеніями до высоты 300 — 500 футомъ надъ современнымъ дномъ долины. По Рамзею эти міоценовыя отложенія вмѣстѣ съ девонскими пластами прирейнскихъ [3]) горъ нѣкогда образовали одну покатость, по которой Рейнъ стекалъ въ томъ-же направленіи, что и теперь. Но русло его постоянно углублялось, въ одно и тоже время въ твердомъ Девонѣ Рейнъ вымылъ узкую, а въ мягкомъ Міоценѣ, перемѣщаясь то вправо, то влѣво, широкую долину. Вся толща міоценовыхъ отложеній, заполнявшихъ теперешнюю долину, была вынесена сквозь узкое ущелье въ Девонѣ. Слѣдуетъ однако замѣтить, что многіе, между прочими Гонселль [4]), защищаютъ теорію озернаго происхожденія этой долины.

---

[1]) Rheinisches Gebirge у нѣмецкихъ авторовъ.

[2]) Ramsay. On the physical history of the valley of the Rhine. Quart. Journ. Geol. Soc. London XXX. 1874 г. стр. 81. Остальныя гипотезы Рамзюя н. п. о томъ, что нѣкогда рѣки этой мѣстности текли съ сѣвера на югъ, не съ юга на сѣверъ не представляютъ для насъ интереса.

[3]) Ramsay loc. cit. стр. 92.

[4]) Honsell Der Rheinstrom. Berlin 1889 ср. Jahrb. für Astron. und Geoph. за 1890 г. стр. 206.

Точно также вліяніе разнообразія породъ сказывается и въ очертаніяхъ вертикальнаго профиля рѣкъ. Углубленіе дна на участкахъ съ болѣе мягкими породами обыкновенно [1]) опережаетъ углубленіе на участкахъ съ болѣе твердыми. Вслѣдствіе этого на теченіи образуются какъ бы ступени. Скорость теченія достигаетъ минимума сейчасъ повыше выходовъ твердыхъ породъ или въ самомъ ихъ началѣ, максимума сейчасъ пониже выходовъ. Чѣмъ разности въ твердости больше, чѣмъ средній уклонъ больше, тѣмъ покатость при переходѣ отъ твердыхъ породъ къ мягкимъ больше. Рихтгофенъ [2]) замѣчаетъ, что переходы бываютъ болѣе рѣзки, когда пласты падаютъ противъ направленія теченія, чѣмъ когда они падаютъ по его направленію. Причина очевидна само собою: во второмъ случаѣ на дѣйствіе размытія выставлены поперечные разрѣзы пластовъ, оказывающіе меньшее сопротивленіе. За то въ этомъ случаѣ на выходахъ твердыхъ пластовъ очень часто происходитъ раздѣленіе на рукава, теченіе усѣяно скалами и порогами. На мѣстѣ перехода отъ твердыхъ породъ къ мягкимъ образуются водопады особенно, если пласты залегаютъ горизонтально. Благодаря выхревому движенію на днѣ водопада случается, что задняя его стѣна подмывается, водопадъ отступаетъ, а отступая, роетъ въ твердыхъ породахъ ущелье.

Образованіе долины Рейна по теоріи Рамзея, о которомъ была выше рѣчь, относится уже къ разряду такъ называемыхъ эпигенетическихъ образованій т. е. такихъ, когда современная форма долины объясняется бывшими, теперь уже не существующими чертами рельефа или тектоники. Въ данномъ случаѣ

---

[1]) Обыкновенно, но не всегда. Иногда дѣятельность рѣки вслѣдствіе разныхъ обстоятельствъ сильнѣе въ твердыхъ, чѣмъ въ мягкихъ породахъ и вполнѣ преодолѣваетъ большее сопротивленіе. Съ другой стороны, какъ это было отмѣчено выше, ступени образуются тоже по причинамъ, неимѣющимъ ничего общаго съ различіями въ твердости породъ. Поэтому по присутствію ступеней нельзя еще судить о различіяхъ въ твердости. У Лэвля. (Löwl. Ueber Thalbildung стр. 73 и слѣд.) находятся многочисленные примѣры, доказывающіе ошибочность подобныхъ заключеній.

исчезнувшая черта рельефа это однообразный склонъ, образованный отчасти изъ міоценовыхъ, отчасти изъ девонскихъ пластовъ.

Классическимъ примѣромъ эпигенетическаго образованія долины считается каньонъ рѣки Ямпа въ Соединенныхъ Штатахъ. Онъ проложенъ въ одинокой твердой известковой горѣ, торчащей среди слегка холмистой страны, состоящей изъ мягкихъ породъ. Очевидно холмъ былъ нѣкогда скрытъ подъ однообразной толщей мягкихъ породъ, рѣка углубляясь, попала на твердый известнякъ и врѣзалась въ него. Въ послѣдствіи размытіе атмосферной водою и мелкими рѣчками снесло мягкія породы, но оставило одинокій твердый холмъ.

Согласно Рихтгофену эпигенетическія образованія распространены въ странахъ, какъ юго-восточный Китай, весьма долго подвергавшихся дѣятельности размытія, не прерываемой вмѣшательствомъ другихъ геологическихъ факторовъ и кромѣ того обладающихъ нѣкоторымъ специальнымъ геологическимъ строеніемъ. Особенность строенія состоитъ съ томъ, что существуютъ двѣ системы пластовъ, верхняя и нижняя. Верхняя въ юго-восточномъ Китаѣ уничтожена размытіемъ, за исключеніемъ небольшихъ клочковъ. Глазамъ наблюдателя обыкновенно представляется нижняя система, въ настоящее время уже тоже сильно разрушенная размытіемъ. Главныя рѣки очевидно образовались еще въ то время, когда верхняя система опредѣляла орографію страны, поэтому теченіе главныхъ рѣки по большей части обнаруживаетъ странныя несогласія съ современнымъ рельефомъ. Малыя рѣки верхней системы очевидно не могли сохраниться и были замѣнены новыми, сформировавшимися въ зависимости отъ новаго рельефа.

Въ юго-восточномъ Китаѣ верхняя система соститъ изъ красныхъ, горизонтально залегающихъ песчаниковъ, нижняя изъ изогнутыхъ и потресканныхъ пластовъ, нѣкогда принадлежав-

шихъ складчатымъ горамъ и въ послѣдствіи срѣзанныхъ дѣятельностью волнъ при морской трансгрессіи.

Когда рѣка при углубленіи попала на пласты нижней системы перпендикулярно къ ихъ простиранію, то въ конфигураціи теченія не замѣчается ничего особеннаго, кромѣ расширеній и съуженій, стремнинъ и т. п.

Интересныя формы теченія попадаются тамъ, гдѣ прежнее теченіе было въ среднемъ параллельно простиранію породъ и гдѣ рѣка при углубленіи врѣзалась въ нѣкоторыхъ мѣстахъ въ твердыя, а въ другихъ въ мягкія породы. Если притомъ пласты залегаютъ наклонно и падаютъ отъ рѣки наружу, то тѣ участки, которые сначала врѣзались въ мягкія породы, дойдя до поверхности твердыхъ пластовъ соскользаютъ по нимъ и удаляются отъ тѣхъ участковъ, которые, врѣзавшись сразу въ твердыя породы, углубляются почти вертикально.

«Въ то время, какъ» говоритъ Рихтгофенъ [1]) твердыя породы торчатъ въ видѣ горъ, мягкія снесены и округлены размытіемъ. Наблюдатель замѣчаетъ съ удивленіемъ, что рѣка вмѣсто того, чтобы продолжать повидимому легкій путь въ мягкихъ породахъ, избираетъ менѣе удобный и врѣзается въ твердыя горы.

Для поясненія присоединяемъ схематическій чертежъ (см. F. 6), составленный нѣсколько иначе, чѣмъ у Рихтгофена; подъ *A* помѣщены горизонтальныя проэкціи теченія въ разныхъ фазахъ, подъ *B* помѣщенъ вертикальный разрѣзъ пластовъ. Стрѣлка показываетъ направленіе паденія и вмѣстѣ съ тѣмъ положеніе вертикальнаго разрѣза относительно горизонтальныхъ проэкцій. Когда направленіе прежняго теченія оказывается діагональнымъ къ простиранію пластовъ нижней системы, то при углубленіи вслѣдствіе такого-же скольженія по твердымъ пластамъ, совершается разложеніе теченія на рядъ продольныхъ участковъ въ мягкихъ породахъ и поперечныхъ въ твердыхъ.

---

[1]) loc. cit. стр. 167.

Для поясненія присоединяемъ здѣсь схэму Рихтгофена [1]) (см. F. 7). Стрѣлка опять обозначаетъ направленіе паденія. Направленіе теченія безразлично.

На первый взглядъ видно, что для того, чтобы діагональное теченіе сдѣлалось ломаннымъ, нужно, чтобы нѣкоторые его участки повернулись вокругъ (см. F. 8) нѣкоторыхъ точекъ. При этомъ вращеніи, соединенномъ съ углубленіемъ, необходимо образуется долина формы нѣсколько сходной съ той, которая наблюдается у рѣкъ, углубляющихся и въ то-же время образующихъ извилины, какъ Днѣстръ, Семуа и др. (см. стр. 71) формы характеризуемой неравномѣрнымъ развитіемъ склоновъ, изъ которыхъ одинъ долженъ быть крутой, а другой пологій, причемъ долина должна въ однихъ мѣстахъ расширяться а въ другихъ съуживаться. Рихтгофенъ [2]) отмѣчаетъ несимметричность склоновъ долины въ продольныхъ участкахъ, но слѣдуетъ замѣтить, что слѣды вращенія должны точно также быть замѣтны на поперечныхъ участкахъ, проложенныхъ въ твердыхъ породахъ, особенно, когда эти послѣднія составляютъ широкую полосу. Если нѣтъ слѣдовъ вращенія на поперечномъ участкѣ, это значитъ, что здѣсь сохранилось прежнее направленіе рѣки. Тогда поперечная долина должна имѣть оба склона одинаково крутые и можетъ составлять какой угодно уголъ съ простираніемъ пластовъ.

Когда вращеніе завершено, то дальнѣйшее углубленіе можетъ происходить совершенно вертикально, но слѣды вращенія могутъ сохраниться въ высшей части долины.

Слѣды вращенія могутъ послужить какъ критеріумъ для опредѣленія происхожденія горной долины. Ломанныя теченія, образовавшіяся изъ продольныхъ и поперечныхъ рѣкъ вслѣдствіе удлиненія послѣднихъ верхнимъ концомъ и захвата продольныхъ рѣкъ (теорія регрессіи), могутъ оказывать нѣкоторые

[1]) loc. cit. стр. 169.

[2]) loc. cit. стр. 170.

[3]) Разумѣется, не говоримъ о томъ случаѣ, когда всякіе слѣды уничтожены.

слѣды перемѣщенія особенно въ продольныхъ участкахъ, но, очевидно, не должны оказывать слѣдовъ вращенія.

Рихтгофенъ [1]) указываетъ на то, что при образованіи долины по способу антецеденціи [теорія Поуэлля [2]), Тице [3]) и Медликотта [4])] дожно точно также произойти разложеніе на продольные и поперечные участки.

Дѣйствительно, все равно опускается-ли рѣка на систему горъ, скрытую подъ сверху налегающими пластами, или-же кряжи сами возвышаются на встрѣчу рѣкѣ. Противъ теоріи Тице возражалъ Лэвль [5]), доказывая, что при поднятіи кряжа, рѣка всегда должна подвергнуться запруженію, ибо уже съ самаго начала образованія складки, уклонъ на задней ея сторонѣ уменьшается, скорость теченія и размытіе слабѣютъ, а потому рѣка должна въ этомъ мѣстѣ сначала перейти въ отлагающее состояніе, а потомъ запрудиться.

Все это правда, тѣмъ не менѣе изъ десяти рѣкъ, девять могутъ подвергнуться запруженію, а десятая можетъ удержаться, ибо, какъ это много разъ повторялось другими (между прочими Тице и Рихтгофеномъ) все зависитъ отъ условій т. е. отъ скорости образованія горъ, отъ силы рѣки, отъ ея насыщенія и т. д.

Гораздо болѣе вѣское возраженіе [6]) состоитъ въ томъ, что поперечныя долины по большей части почти перпендикулярны къ простиранію пластовъ. Дѣйствительно, былобы странно, чтобы складки образовались перпендикулярно къ направленію су-

---

[1]) loc. cit. стр. 192.

[2]) Powell. Exploration of the Colorado River etc. Washington 1875 г. Къ сожалѣнію это сочиненіе осталось для меня недоступнымъ.

[3]) Tietze. Einige Bemerkungen Ueber die Bildung von Querthälern. Jahrb. Geol. Reichsanst. 1878 и 1882 г.

[4]) Medlicott. См. Hilber Die Bildung der Durchgangsthäler Peterm. Mitth. 1889 г. стр. 11.

[5]) Löwl. Über Thalbildung Prag. 1884 г. стр. 98.

[6]) Ср. Hilber. loc. cit. стр. 16.

ществующихъ рѣкъ. Отчего поперечныя долины не пересѣкаютъ горъ подъ какимъ угодно угломъ.

Но, если при поднятіи горъ существующія уже рѣки измѣняютъ свое направленіе, если теченіе ихъ становится поперекъ кряжей и выходовъ твердыхъ породъ, то, очевидно, важнѣйшее возраженіе противъ теоріи Тице (и теоріи суперформаціи или эпигенезиса) само собою падаетъ.

Интересные примѣры поперечныхъ долинъ имѣются на западномъ склонѣ Урала [1]). Рѣки: Ай, Юрезань, Симъ, Инзеръ и притоки послѣднихъ протекаютъ сначала въ видѣ потоковъ (уклоны доходятъ до 0,006) по продольнымъ долинамъ, затѣмъ поворачиваютъ на западъ, пересѣкая въ узкихъ ущельяхъ западные кряжи Урала. На этомъ участкѣ теченіе ихъ еще очень стремительно, но характеръ потока уже теряется (уклоны 0,001—0,002). Наконецъ послѣ выхода изъ горъ, онѣ текутъ уже плавно и тихо среди пермокарбоновыхъ мягкихъ породъ, (уклоны 0,0005—0,0008) отлагаютъ наносы, имѣютъ широкія въ нѣсколько верстъ долины съ рѣзко выраженными продольными террасами. Такимъ образомъ, за исключеніемъ нѣкоторыхъ участковъ на равнинномъ теченіи Юрезани и Ая, гдѣ эти рѣки, врѣзаясь въ твердый каменноугольный известнякъ, опять съуживаютъ свою долину, рѣки западнаго склона Урала подходятъ подъ избитый типъ рѣкъ, вытекающихъ изъ горъ: стремительное верхнее теченіе, тихое нижнее, на среднемъ постепенный переходъ отъ одного характера къ другому.

Изъ рѣкъ западнаго склона Урала ни одна не пересѣкаетъ хребта Уралъ-Тау, состоящаго изъ архейскихъ породъ, изъ рѣкъ восточнаго склона только небольшая рѣка Кіолимъ, притокъ Міаса имѣетъ свои истоки на западной сторонѣ Уралъ-Тау и переходитъ на восточную. Слѣдующая затѣмъ къ западу болѣе высокая цѣпь, носящая въ различныхъ мѣстахъ названія: Тагільная, Уреньги и т. д. пересѣкается только одной

---

[1]) Карпинскій и Чернышевъ. Труды Геол, Ком III, 2 стр. 39 и слѣд.

рѣкою Ай въ живописномъ ущельи между горами Косотуръ и Уреньга. Эта цѣпь тоже состоитъ изъ архейскихъ породъ, но пэтрографически различныхъ отъ тѣхъ породъ [1]), изъ которыхъ состоитъ Уралъ-Тау. Дальше къ западу слѣдуютъ кряжи, состоящіе изъ девонскихъ и каменноугольныхъ породъ. Эти то кряжи пересѣкаются узкими поперечными долинами рѣкъ.

Цѣпи Урала перерѣзаны многочисленными дислокаціями, направленными нетолько вдоль хребтовъ, но и поперекъ ихъ. Даже такія крупныя рѣки, какъ н. п. Симъ [2]) иногда пропадаютъ въ трещинахъ береговыхъ утесовъ или въ воронкообразныхъ провалахъ. Пропаданіе бываетъ или совершенное, или мѣстное или неполное. Совершенное исчезновеніе выражается въ томъ, что рѣка, уйдя въ разсѣлину, больше уже не появляется. Мѣстное исчезновеніе выражается въ томъ, что рѣка уходитъ въ разсѣлину горы, а затѣмъ нѣсколько ниже опять вытекаетъ однимъ или нѣсколькими родниками въ прежнее русло. Неполное исчезновеніе заключается въ томъ, что въ разсѣлину уходитъ только часть рѣки, остальная-же продолжаетъ струиться по старому руслу. Иногда одна и та-же рѣка въ меженную воду представляетъ мѣстное, но полное исчезновеніе, въ половодье-же раздѣляется на часть исчезающую и неисчезающую.

Еслибы долины образовались изъ бывшихъ разсѣлинъ, то мы-бы имѣли въ этой мѣстности цѣлый рядъ переходныхъ формъ отъ подземнаго теченія въ разсѣлинѣ до открытаго въ узкой горной долинѣ. Но на дѣлѣ никакихъ промежуточныхъ формъ, никакихъ на половину преобразованныхъ въ долины подземныхъ каналовъ нѣтъ. Есть только крайнія формы. Такимъ образомъ здѣсь имѣемъ еще однимъ доказательствомъ больше, что поперечныя долины не происходятъ изъ разсѣлинъ.

---

[1]) loc. cit. стр. 10.
[2]) loc. cit. стр. 41.

По Большой и Малой Саткѣ въ продольныхъ долинахъ въ однихъ мѣстахъ есть небольшія озера, въ другихъ клочки озернаго аллювія. Подобные клочки существуютъ и по верхнему теченію Ая тоже въ продольной долинѣ. Однако, судя по малому пространству, занимаемому этими отложеніями, кажется, что озера нетолько въ настоящее, но и въ прежнее время составляли второстепенную черту въ гидрографіи западнаго склона Урала. Поэтому они скорѣе составляютъ результаты временнаго и частнаго, чѣмъ совершеннаго запруженія рѣкъ.

Рѣки западнаго склона Урала состоятъ изъ поперечныхъ и продольныхъ участковъ. Большинство изъ нихъ имѣютъ только одинъ продольный и одинъ поперечный участокъ, иныя н. п. Ай состоятъ изъ двухъ поперечныхъ и двухъ продольныхъ. Продольные участки собираютъ справа и слѣва притоки почти перпендикулярные къ главной рѣкѣ и къ направленію кряжей. Можно-бы сказать, что присоединеніе продольныхъ участковъ произошло путемъ регрессіи нѣкоторыхъ изъ поперечныхъ рѣкъ. Но здѣсь есть нѣкоторая черта, несогласная съ теоріей регрессіи. Очень часто случается, что въ продольной долинѣ двѣ рѣки текутъ на встрѣчу другъ другу и, разумѣется, соединяются. Послѣ соединенія начинается поперечный участокъ, пересѣкающій горный кряжъ. Особенно типично соединеніе рѣки Калагазы съ Юрезанью въ долинѣ между хребтами Бакты Нургашъ и Зигальга. Эта черта характеристична для эпигенетическихъ рѣкъ [1]) или для рѣкъ, удержавшихся во время образованія горъ.

Наоборотъ, очень часто случается, что въ одной и тойже продольной долинѣ истоки двухъ продольныхъ теченій находятся близко другъ отъ друга, но рѣки текутъ въ прямо противуположныхъ направленіяхъ. Это т. н. «развилки». Слѣдовательно въ самомъ характерѣ теченія здѣшнихъ рѣкъ есть

[1]) Ср. Richthofen loc. cit. стр. 170.

признаки, указывающіе на то, что ломанное теченіе по крайней мѣрѣ нѣкоторыхъ изъ нихъ не есть результатъ соединенія продольныхъ и поперечныхъ рѣкъ вслѣдствіе регрессіи послѣднихъ и что пожалуй нѣкоторыя изъ нихъ образовались путемъ, указаннымъ теоріей Тице или теоріей эпигенезиса [1]).

Однако нельзя сказать ничего опредѣленнаго. Факты, приводимые Карпинскимъ и Чернышевымъ, недостаточны для рѣшенія этого вопроса. Слѣдовало-бы прежде установить, что есть несомнѣнные слѣды вращенія нѣкоторыхъ участковъ и что здѣсь не было никогда системы самостоятельныхъ продольныхъ рѣкъ. Нельзя даже à priori сказать, которая изъ теорій является въ данномъ случаѣ болѣе вѣроятной, теорія-ли эпигенезиса или Тице. Притомъ повторяю еще разъ, что детальное изслѣдованіе, быть можетъ, покажетъ, что, не смотря на сходную конфигурацію, различныя рѣки западнаго склона Урала образовались и развивались различными способами.

По поводу разсѣлинъ въ Уралѣ мы упомянули о предполагаемой связи разсѣлинъ и трещинъ съ направленіемъ теченія рѣкъ. Теорію, по которой рѣки пользуются готовыми разсѣлинами или-же, слѣдуя по трещинамъ, размываютъ ихъ, можно считать окончательно погребенной. Послѣдними ея защитниками были Пэшель [2]), Черульфъ [3]) и Добрэ [4]). Пэшель старался защитить ее для поперечныхъ, Черульфъ и Добрэ для всякихъ долинъ. Но разсужденіе Черульфа [5]) (тоже самое мож-

---

[1]) Мы уже выше отмѣтили, что рѣки западнаго склона Урала вытекаютъ изъ архэйскихъ кряжей и пересѣкаютъ болѣе юные. Это на первый взглядъ говоритъ въ пользу теоріи Тице, но 1) слѣдовало бы установить, что архейскіе кряжи поднялись раньше. 2) нужно доказать, что это не есть результатъ просто большей твердости архэйскихъ породъ, вслѣдствіе чего регрессія въ ихъ области незначительна.

[2]) Peschel. Neue Probleme. Leipzig 1870 г. стр. 143.

[3]) Kjerulf. Ein Stück Geographie in Norwegen. Zeitschr. Ges. für Erdkunde zu Berlin XIV 1879 г.

[4]) Daubrée. Geologie Exper. Paris 1879 г. стр. 358 и слѣд.

[5]) Cp. Löwl. loc. cit. стр. 21.

но сказать о Добрэ) сводится къ тому, чтобы, гдѣ окажется рѣчная долина, тамъ предполагать существованіе трещинъ, не спрашивая существуютъ-ли онѣ на дѣлѣ.

Факты показываютъ, что мелкія рытвины и ручьи часто слѣдуютъ по трещинамъ, что сопротивленіе, оказываемое размытію зависитъ отъ распредѣленія трещинъ. Но съ другой стороны постоянно наблюдаемъ, что даже тѣ рѣки, въ конфигураціи которыхъ ясно сказывается вліяніе рельефа и тектоники, вовсе не слѣдуютъ по трещинамъ. Ничего удивительнаго въ томъ нѣтъ. Трещины почти всегда весьма узки. Если онѣ заполнены какимъ-нибудь непроницаемымъ для воды веществомъ, то тонкая прослойка различнаго отъ окружающей породы вещества не можетъ оказать серьезнаго вліянія на размытіе; если онѣ не заполнены, или заполнены водопроницаемымъ веществомъ, то ихъ вліяніе сводится къ тому, чтобы способствовать передачѣ воды изъ рѣки въ окружающія породы и обратно.

Въ большихъ зіяющихъ трещинахъ рѣки просто пропадаютъ или совсѣмъ или отчасти. Пропаданіе особенно часто наблюдаются въ известковыхъ горахъ н. п. въ Карстѣ, гдѣ узкія скважины расширяются вслѣдствіе химическаго размытія просачивающеюся водою.

Трещины способствуютъ передачѣ воды, но главной причиной передачи воды въ породы и изъ породъ въ рѣку являются ихъ собственныя физическія свойства. Различаютъ водоупорныя породы, какъ глины, глинистые сланцы и водопроницаемыя, какъ пески, лёссъ и т. д. Отъ распредѣленія тѣхъ и другихъ породъ въ связи съ метеорологическими условіями и распредѣленіемъ притоковъ зависитъ количество воды въ рѣкѣ. Утверждаютъ н. п. что маловодность нѣкоторыхъ австралійскихъ рѣкъ происходитъ нестолько отъ сухости климата, сколько отъ особенной водопроницаемости породъ въ ихъ бассейнахъ. Такъ н. п. Дарлингъ несетъ у устья только немногимъ больше 1% всей воды, выпадающей въ его бассейнѣ. Полагаютъ, что ра-

страта атмосферной воды въ данномъ случаѣ происходитъ не-только отъ испаренія, но тоже отъ просяканія въ глубокіе пласты. Конечно слѣдуетъ предположить, что въ такихъ мѣстахъ подземныя воды имѣютъ гдѣ нибудь (подземный) истокъ къ морю. Напротивъ того, при нѣкоторомъ распредѣленіи водоупорныхъ и водопроницаемыхъ пластовъ рѣки получаютъ обильные подземные притоки. Такъ н. п. по Фишеру (Theobald Fischer) По отъ Валенціи до Олонетты на пространствѣ 80 кил. получаетъ отъ подземныхъ притоковъ столько-же воды, сколько несетъ Тичино при выходѣ изъ Лаго-Маджіоре. Онъ здѣсь течетъ посреди продольной котловины, состоящей изъ водоупорныхъ пластовъ, выполненной водопроницаемыми породами. Русло его проложено въ водопроницаемыхъ пластахъ, но дно достигаетъ до водоупорныхъ. Такимъ образомъ рѣка собираетъ всю воду, циркулирующую по водопроницаемымъ пластамъ.

Китайскій лёссъ есть порода въ высшей степени водопроницаемая. Онъ поглощаетъ дождевую воду какъ губка. Эта вода собирается на поверхности породъ, подстилающихъ лёссъ, или на поверхности прослоекъ рѣчного и озернаго лёсса, потерявшаго губчатую структуру, и образуетъ подземныя теченія, своды которыхъ въ послѣдствіи проваливаются. Сначала образуются провалы въ видѣ отдѣльныхъ колодцевъ, затѣмъ разростаются и образуютъ сплошной каньонъ. Каньоновидная форма подобнаго ущелья объясняется способностью лёсса къ вертикальной отдѣльности и къ тому, чтобы удерживать вертикальные склоны. Эта послѣдняя способность у такой рыхлой породы, какъ лёссъ опять таки объясняется его водопроницаемостью. Атмосферная вода всякаетъ въ лёссъ, но не образуетъ поверхностныхъ размывающихъ ручьевъ.

Вообще въ тѣхъ мѣстностяхъ [1]), гдѣ на поверхности залегаютъ водопроницаемые пласты, атмосферная вода прося-

[1]) Ср. Lapparent loc. cit. стр. 180.

каетъ въ почву, не застаивается на поверхности въ разныхъ мѣстахъ, не стекаетъ многочисленными ручьями по склонамъ, но собирается въ крупныя и постоянныя, изрѣдка разсѣянныя рѣки, питаемыя родниками и источниками, выходящими обыкновенно на границѣ между водопроницаемыми и водоупорными пластами.

Напротивъ того, въ мѣстностяхъ, гдѣ на поверхности залегаютъ водоупорныя породы, атмосферная вода на равнинахъ застаивается въ болотахъ, по склонамъ стекаетъ многочисленными ручьями. Рѣки и рѣчки многочисленны, подвержены значительнымъ измѣненіямъ расхода, сильно разливаютъ послѣ дождей, пересыхаютъ во время засухи; ключи встрѣчаются рѣдко.

Мѣстности съ водоупорной почвой могутъ быть, какъ это показалъ Бельгранъ [1]), различены на хорошей топографической картѣ, онѣ отличаются отъ сосѣднихъ мѣстностей, обладающихъ водопроницаемой почвой, многочисленностью малыхъ рѣчекъ и ручьевъ.

Точно также Бельгранъ [2]) показалъ, что водопроницаемость имѣетъ немалое вліяніе на конфигурацію долины. Если рѣка, протекая по узкой долинѣ, возвышаетъ дно, а склоны долины состоятъ изъ водоупорныхъ пластовъ, то дождевая вода, стекая по поверхности склоновъ увлекаетъ много матеріяла на дно долины, если-же склоны состоятъ изъ водопроницаемыхъ породъ, то дождевая вода проникаетъ въ почву, количество стекающей по поверхности склоновъ воды и увлекаемыхъ ею на дно долины матеріяловъ «ceteris paribus» меньше. Вслѣдствіе этого въ первомъ случаѣ имѣется больше шансовъ для того, чтобы отложеніе наносовъ у подножія склоновъ преобладало надъ возвышеніемъ русла, во второмъ возвышеніе русла будетъ скорѣе преобладать надъ накопленіемъ наносовъ у

---

[1]) Lapparent. loc. cit. стр. 181.

[3]) Lapparent. loc. cit. стр. 210.

подножія склоновъ. И такъ, въ первомъ случаѣ имѣется больше шансовъ для образованія вогнутаго внизъ дна долины, во второмъ имѣется больше шансовъ для образованія долины съ выпуклостью на серединѣ, соотвѣтствующей области отложенія собственно рѣчныхъ наносовъ (см. F. 9).

Кромѣ того слѣдуетъ обратить вниманіе на слѣдующія обстоятельства. Вопервыхъ, всякая мерзлая почва является въ тоже самое время водоупорной. Первыя весеннія воды стекаютъ по поверхности даже въ мѣстахъ съ сильно водопроницаемой почвой, если только климатическія условія слагаются такъ, что почва замерзаетъ зимою. Такимъ образомъ правило Бельграна въ Россіи примѣнимо въ болѣе тѣсныхъ предѣлахъ, чѣмъ во Франціи. Во вторыхъ, если водопроницаемая почва обладаетъ малой толщиной, а подъ ней залегаютъ менѣе водопроницаемые пласты, то продолжительные дожди могутъ совершенно напитать верхній слой водою и вода, происходящая отъ новыхъ осадковъ, уже не проникаетъ въ почву, а стекаетъ по поверхности и размываетъ рытвины точно такъ, какъ въ случаѣ водоупорной почвы. Наконецъ вліяніе водоупорности или водопроницаемости сказывается тѣмъ слабѣе, чѣмъ данный склонъ круче, по очень крутымъ склонамъ вода мчится по поверхности и мало проникаетъ въ почву, хотя-бы обладающую большой водопроницаемостью.

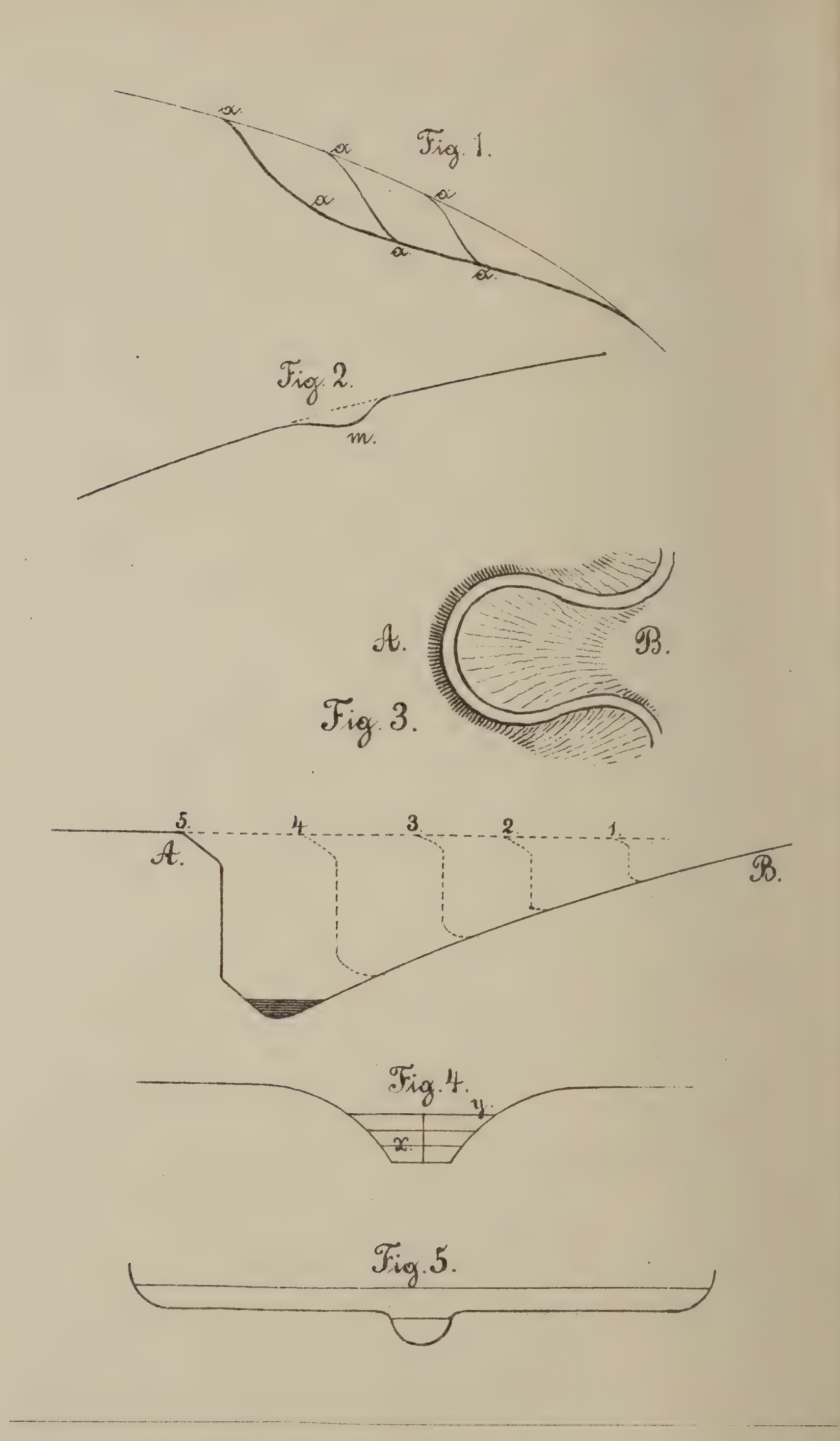
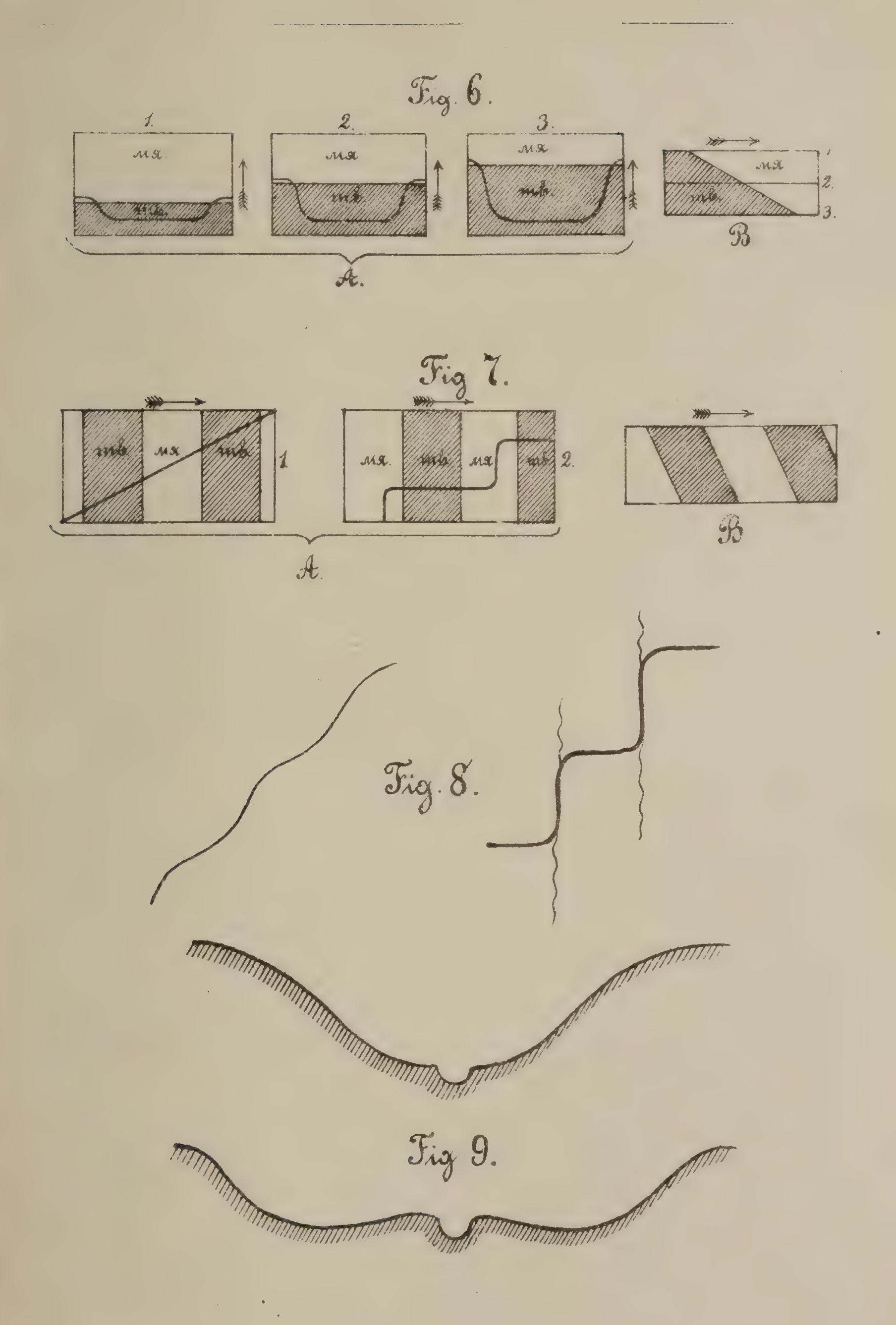
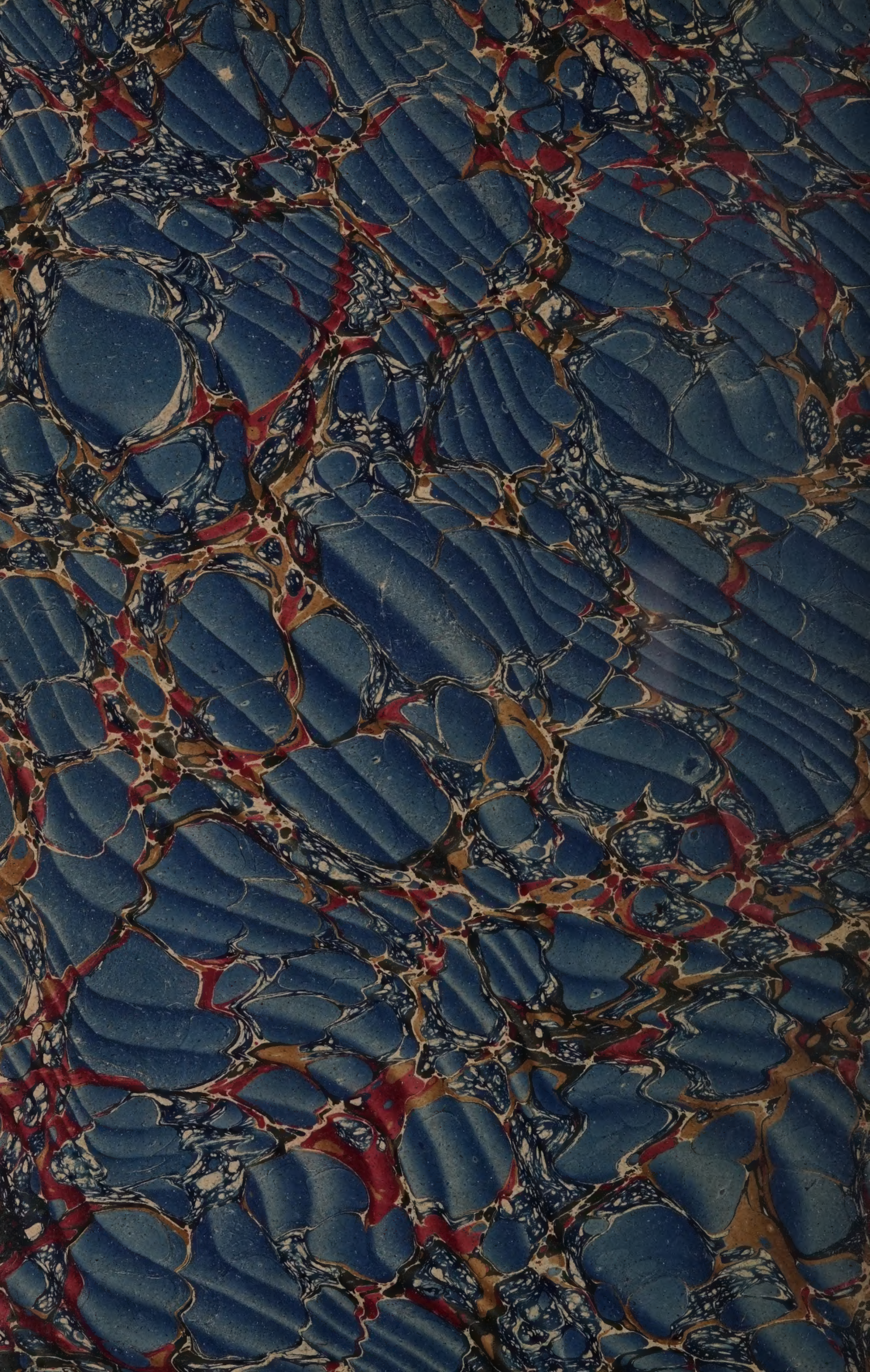
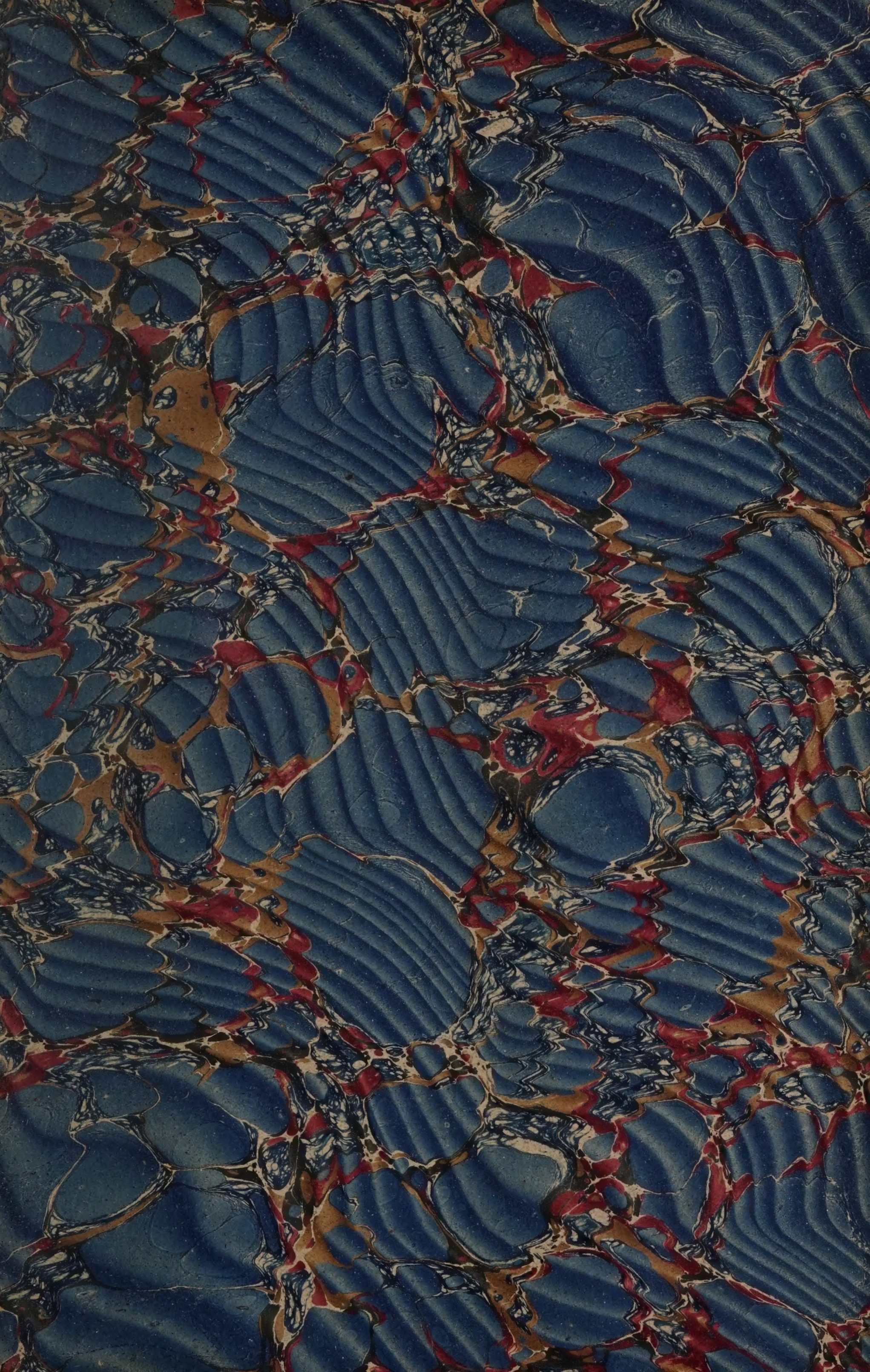
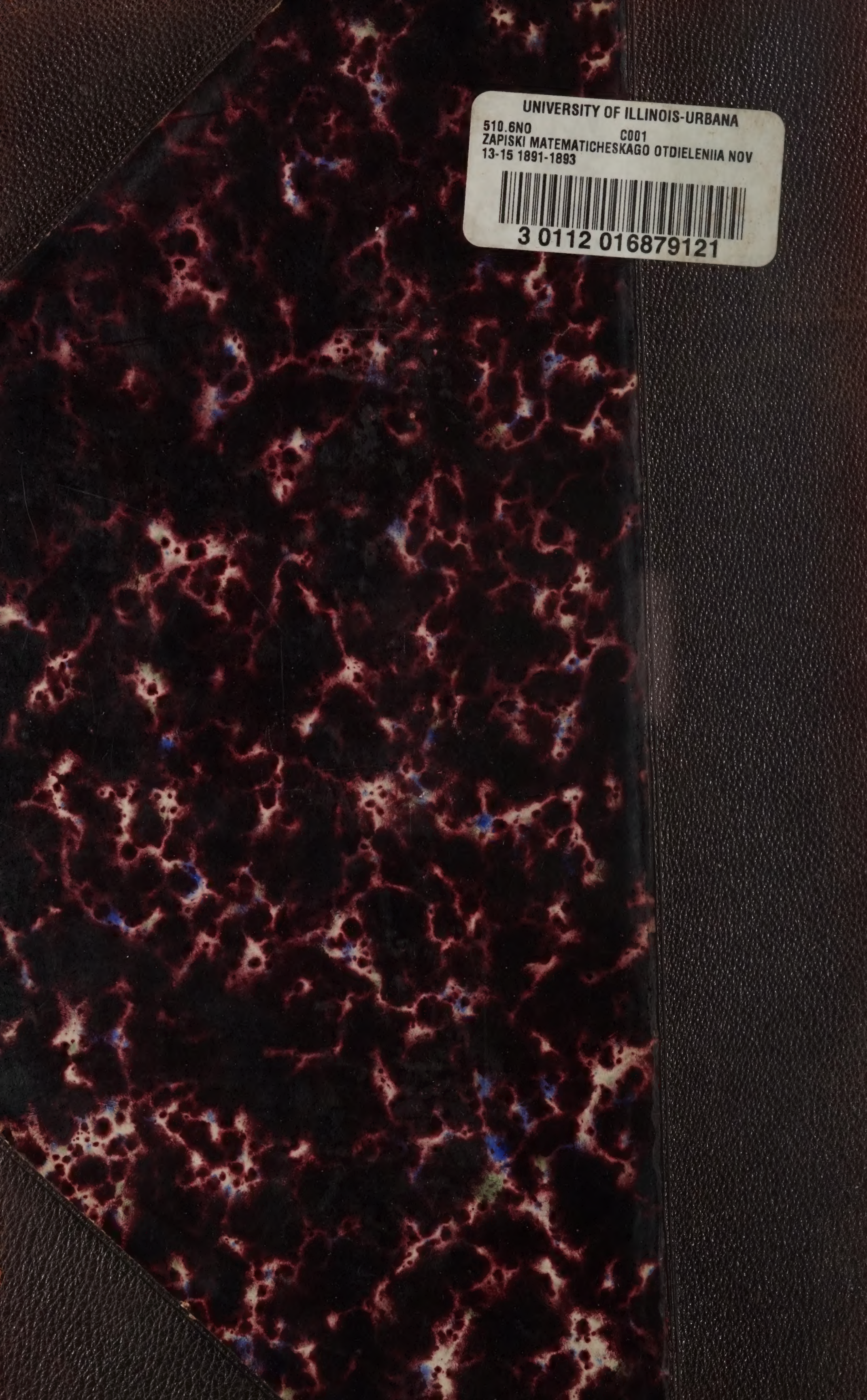


Fig. 1.
a.
a
a
a
a
a.
Fig. 2.
m.
A.
B.
Fig. 3.
5.
4
3.
2.
1.
A.
B.
Fig. 4.
y.
x.
Fig. 5.


Fig. 6.
1.
2.
3.
мя
тв
A.
B
Fig 7.
мя
тв
1
2.
A.
B
Fig. 8.
Fig 9.






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.6NO C001
ZAPISKI MATEMATICHESKAGO OTDIELENIIA NOV
13-15 1891-1893
3 0112 016879121